Ministerul Educației

MATEMATICĂ

Radu Gologan (coordonator)
Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța

Manual pentru clasa a V-a

CORINT LOGISTIC

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației.
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară
aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 3393 din 28.02.2017.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Ministerul Educației

MATEMATICĂ

Radu Gologan (coordonator)
Camelia Elena Nețța
Ciprian Constantin Nețța

Manual pentru clasa a V-a

CORINT LOGISTIC

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin ordinul de ministru nr. ....

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2022–2023.

Inspectoratul școlar ....

Școala / Colegiul / Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni:* ***nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.***

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Date despre autori:

Radu GOLOGAN – profesor universitar la Universitatea Politehnica din București - Facultatea de Automatică și Calculatoare, președinte al Societății de Științe Matematice din România, coordonator al olimpiadelor de matematică, medaliat la olimpiade internaționale de matematică, autor a peste 40 de lucrări științifice, dar și tratate, manuale, culegeri și articole de matematică școlară.

Camelia Elena NEȚA – profesor gradul didactic I, Școala Gimnazială nr. 2 din Piatra Neamț, inspector școlar la ISJ Neamț (2007-2020), formator în proiecte de formare continuă a profesorilor de matematică, lector la Centrul Județean de Excelență Neamț, autor de manuale și culegeri.

Ciprian Constantin NEȚA – profesor gradul didactic I, metodist, Școala Gimnazială nr. 2 Piatra Neamț; formator în proiecte de formare continuă a profesorilor de matematică, lector la Centrul Județean de Excelență Neamț, autor de manuale și culegeri.

Referenți științifici:

Prof. dr. Mircea Olteanu – Universitatea Politehnica din București, Departamentul de metode și modele matematice.

Roxana Camelia Goga – prof. gradul didactic I, titular la Colegiul Național „Sfântul Sava", director adjunct la Colegiul Național „Spiru Haret", profesor coordonator Centrul de Excelență București.

Redactare: **Corina Toader**
Tehnoredactare: **Dan Crăciun**
Design copertă: **Dan Mihalache**
Ilustrator: **Cornelia Revulets**
Credite foto: **Shutterstock**
În manual au fost folosite secvențe video din platforma de învățare a matematicii mquest.ro, cu acordul autorilor.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
GOLOGAN, RADU N.
Matematică : manual pentru clasa a V-a / Radu Gologan (coord.), Camelia Elena Neţa, Ciprian Constantin Neţa. - Bucureşti : Corint Logistic, 2022
ISBN 978-630-6526-00-0

I. Neţa, Camelia Elena
II. Neţa, Ciprian Constantin

51

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii Corint Logistic.

Pentru comenzi şi informaţii, contactaţi:
GRUPUL EDITORIAL CORINT
Departamentul de Vânzări
Str. Mihai Eminescu nr. 54A, sector 1, Bucureşti,
cod poştal 010517. Tel./Fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20
Depozit
Str. Gării nr. 11, Mogoșoaia, jud. Ilfov
Tel.: 0758.053.416
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
Magazin virtual: www.edituracorint.ro

Cuprins

Divizibilitatea numerelor naturale

2. FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

Fracții ordinare

Prefață

Plecând de la întrebarea *Cui să se adreseze acest manual*? am ajuns la concluzia că el trebuie să se adreseze în același timp și elevilor, și părinților și profesorilor.

Pentru *elevi* am prezentat noțiunile intuitiv, evitând abuzul de notații sau de abstractizare. Am pornit cu premiza că noțiunile învățate în clasele primare sunt baza pe care construim noțiunile noi, am prezentat exerciții rezolvate prin care i-am învățat să gândească, să analizeze, să observe mediul înconjurător și să extragă din viața cotidiană cunoștințe matematice, am prezentat și tipuri de greșeli ce pot apărea în rezolvări pentru a atrage atenția asupra lor. Am vrut să dezvoltăm creativitatea, capacitatea de analiză și sinteză a informațiilor dintr-o situație-problemă prin rezolvarea de probleme folosind metode aritmetice, iar noțiunile de geometrie le-am prezentat intutiv, am învățat să le desenăm, să le decupăm, să le suprapunem și să le recunoaștem în jurul nostru. Și, de ce nu, de multe ori îi punem pe elevi în situația de a se juca, căci se știe că prin joc se pot învăța mult mai ușor lucruri, care altfel par foarte grele.

Părinții sunt invitați să parcurgă manualul alături de copiii lor. Dacă nu vor să-i ajute la rezolvarea temelor, cu siguranță trebuie să-i ajute să facă planul casei, să facă împreună bugetul familiei sau pe cel personal al copilului, să proiecteze o excursie, să caute pe internet curiozități matematice, să construiască corpuri geometrice, să decupeze figuri geometrice, să joace împreună șah sau avioane…

Și, nu în ultimul rând, manualul reprezintă pentru *profesor* un instrument didactic cu rol de ghid, de orientare a activității didactice, respectiv de selectare a conținuturilor științifice valorificabile în vederea atingerii finalităților urmărite. Lecțiile sunt proiectate astfel încât programa școlară să poată fi parcursă în 75% din timpul alocat orelor de matematică, restul orelor (25%) fiind la dispoziția profesorului pentru activități remediale, de fixare sau de progres. Modul de prezentare a lecțiilor îi poate ajuta să-și proiecteze planificarea, aplicațiile practice propuse pot diversifica orele de matematică și pot ajuta la dezvoltarea motivației elevilor pentru a reuși în învățare și, implicit, pentru atragerea lor spre studiului disciplinei.

AUTORII

Competențe generale și competențe specifice

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate

1.2. Identificarea fracţiilor ordinare sau zecimale în contexte variate

1.3. Identificarea noţiunilor geometrice elementare şi a unităţilor de măsură în diferite contexte

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operaţiile aritmetice şi proprietăţile acestora

2.2. Efectuarea de calcule cu fracţii, folosind proprietăţi ale operaţiilor aritmetice

2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operaţiilor cu numere naturale şi pentru divizibilitate

3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operaţiilor cu fracţii ordinare sau zecimale

3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) şi a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) şi exprimarea acestora în unităţi de măsură corespunzătoare

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăţi referitoare la comparări, aproximări, estimări şi ale operaţiilor cu numere naturale

4.2. Utilizarea limbajului specific fracţiilor/procentelor în situații date

4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităţilor de măsură

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii date

5.1. Analizarea unor situaţii date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

5.2. Analizarea unor situaţii date în care intervin fracţii pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

5.3. Interpretarea, prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configuraţii geometrice dintr-o problemă dată

6. Modelarea matematică a unei situaţii date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obţinute prin metode aritmetice şi interpretarea rezultatului

6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situaţii date, în context intra și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)

6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unităţi de măsură şi la interpretarea rezultatelor

Ghid de utilizare a manualului

Manualul cuprinde variantele tipărită și digitală

Simboluri folosite în varianta digitală

Rezolvă

Privește

Vizionează

Manualul este structurat în trei capitole, fiecare dintre ele conținând lecții care păstrează, în general, titlurile existente la „Conținuturi” în programa școlară. Un grup de lecții formează o unitate de învățare, care se poate întinde pe una sau mai multe ore, dând posibilitatea profesorului să-și adapteze planificarea materiei în funcție de posibilitățile psihointelectuale ale elevilor. Fiecare unitate de învățare se finalizează cu un test de autoevalare ce permite elevilor să-și măsoare nivelul de competențe atins.

Conținuturile noi, specifice programei școlare, sunt prezentate în lecții la rubrica **Reținem**. În cazul în care conținutul ce trebuie prezentat se poate intui prin prezentarea sau/și analiza unor exemple, acestea sunt prezentate și comentate de către cele două personaje, *Ana* și *Andrei*, care însoțesc elevii pe tot parcursul manualului. Fiecare rubrică **Reținem** este continuată cu **Probleme rezolvate**, unde sunt prezentate exerciții rezolvate, comentate, exemple și contraexemple.

Zonele de exersare și probleme propuse, marcate prin rubrica **Probleme propuse** conțin, în general, probleme asemănătoare cu cele rezolvate, prezentate gradual. Pentru alte tipuri de probleme propuse sunt prezentate la finalul cărții rezolvări complete sau indicații pentru rezolvare. Unitățile de învățare se finalizează cu un set de **Probleme recapitulative** propuse spre rezolvare și **Test de autoevaluare**, urmate de un set de probleme pentru activități de **Consolidare/remediere/stimularea performanței**. Testele sunt grilă sau cu itemi deschiși, sunt indicate punctaje aferente fiecărui item – pentru a fi posibilă autoevaluarea – și au la finalul manualului rezolvările integrale, astfel încât elevii să poată verifica corectitudinea metodelor folosite și a rezultatelor obținute. Rubricile **Activitate în echipe/în perechi**, **Proiect**, **Activitate practică** și **Portofoliu**, prin care invităm elevii să pregătească, individual sau în colaborare, diferite teme, au rolul de a-i provoca să descopere latura aplicativă a matematicii, frumusețea acesteia și, se asemenea, de a-i atrage spre studiu, asigurându-se în același timp și o evaluare formativă a lor.

Noțiunile matematice sunt însoțite adesea de **Curiozități**, **Provocare**, **Investigație**, **Știați că?**, **Să ne jucăm**, cu scopul de a aduce elevului informații noi (din prezent sau din istoria matematicii), de a-l provoca să răspundă la eventuale întrebări legate de noțiunile prezentate, de a-i supune atenției diverse curiozități sau jocuri matematice.

Manualul letric este însoțit de manualul digital, care se constituie într-un instrument de învățare și de prelucrare a informațiilor prezentate, îmbogățind procesul de predare-învățare cu activități multimedia interactive (de tip static, animat și interactiv) și oferind o continuitate a acumulării/competențelor dobândite de elev.

Teste inițiale

Pentru fiecare test se acordă 10 puncte din oficiu.
Pentru fiecare test timpul de lucru este de 30 de minute.

TESTUL 1

1. Fie numerele: $a = 264 + 186$, $b = 310 - 229$, $c = 24 \times 17$ și $d = 576 : 16$.

a) (*20p*) Calculați numerele a, b, c și d.

b) (*10p*) Adunați la treimea numărului a sfertul sumei numerelor c și d.

2. a) (*5p*) Desenați un pătrat și apoi colorați un sfert din el.

b) (*5p*) Transformați: 400 cm = ... m; 10 dam = ... dm; 1 km = ... dam; 2 *l* = ... d*l*, 1 kg = ... g.

3. (*10p*) Un dreptunghi are perimetrul egal cu 48 m. Determinați lungimea și lățimea dreptunghiului, știind că lungimea este de 3 ori mai mare decât lățimea sa.

4. (*10p*) Determinați valoarea lui x din egalitatea:

$$25 + \{4 + [15 - (22 + x) : 3] \times 3\} : 11 = 27.$$

5. (*10p*) Când Maria avea 10 ani, fratele ei avea 6 ani. Acum au împreună 38 de ani. Ce vârstă are fiecare?

6. (*10p*) Un student începe un curs la ora 8 și 30 de minute. Cursul se desfășoară în 4 reprize a câte 50 de minute, cu pauze de 15 minute între ele. La ce oră se termină cursul respectiv?

7. (*10p*) Tata a cumpărat trei pachete de unt și două cutii cu smântână pentru care a plătit 31 lei. Bunicul a cumpărat 9 pachete de unt și 5 cutii cu smântână de același fel, pentru care a plătit 88 lei. Cât costă un pachet de unt?

TESTUL 2

1. (*20p*) Efectuați:

a) 21 009 + 597; b) 11 001 – 497;

c) 506 × 45; d) 7 357 : 7.

2. (*15p*) Maria a rezolvat probleme începând cu pagina 11 și terminând cu pagina 39. Câte pagini de probleme a rezolvat Maria?

3. (*15p*) Diferența a două numere este 94. Determinați numerele, știind că împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 7 și restul 4.

4. (*15p*) Calculați:

$$\{222 : 2 + [201 \times 3 - 520 - 2 \times (321 - 80 \times 4)]\}.$$

5. (*10p*) Câte triunghiuri se formează în interiorul unui pătrat dacă unim două câte două vârfurile opuse ale pătratului?

6. (*15p*) Sofia plătește 99 lei pentru 5 cărți și 8 caiete. Bogdan plătește 135 lei pentru 8 cărți și 5 caiete. Știind că toate cărțile au același preț și că cei doi copii au cumpărat același tip de caiete, determinați prețul unei cărți și prețul unui caiet.

TESTUL 3

1. (*20p*) Efectuați:

a) 82 943 + 3 517; b)10 201 – 6 759;

c) 608 × 19; d) 18 279 : 9.

2. (*10p*) Suma dintre un număr natural și sfertul său este 125. Determinați numărul.

3. (*15p*) Ștefan citește o carte care are 175 de pagini. Luni a citit 10 pagini, iar în fiecare dintre zilele următoare cu câte 5 pagini mai mult ca în ziua precedentă. Câte pagini va mai avea de citit Ștefan duminică?

4. (*15p*) Determinați a din egalitatea

$$[a : 2 + (95 - 45 : 3) \times 2] : 4 = 160.$$

5. (*15p*) Trei frați au împreună 128 lei. După ce primul cheltuie 27 lei, al doilea 19 lei, iar al treilea 34 lei, cei trei copii rămân cu sume egale. Câți lei a avut fiecare copil la început?

6. (*15p*) Dacă se împart merele dintr-un coș în mod egal la 6 copii mai rămân 2 mere, iar dacă se împart în mod egal la 8 copii rămân tot 2 mere.

a) Pot fi 50 de mere în coș?

b) Determinați numărul cel mai mic de mere din coș.

1

NUMERE NATURALE

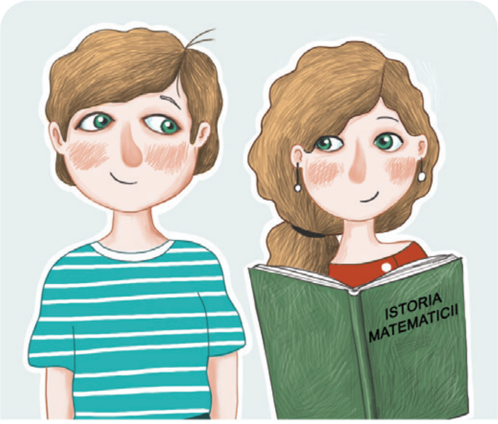
OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

Scrierea și citirea numerelor naturale

Ana și Andrei sunt frați gemeni și sunt în aceeași clasă. Ei se pregătesc să înceapă clasa a V-a. Au fost la bibliotecă și au împrumutat o carte despre istoria matematicii. Ei au vrut să afle mai multe despre numere, mai ales despre numerele naturale.



Ana: Andrei, am aflat că numerele au apărut încă din Antichitate, din nevoia de a face calcule în diverse domenii: agricultură, comerț, construcții, astronomie etc. Diferite popoare au inventat simboluri pentru a reprezenta numerele.

Andrei: Inițial, astronomii indieni au combinat simbolurile grecilor cu cele ale chinezilor. Mai târziu, arabii au preluat din simbolurile indienilor, pe care mai întâi le-au reprezentat prin linii drepte, considerând important numărul de unghiuri care se formează.

Ana: Egiptenii foloseau hieroglife pentru cifre, iar romanii foloseau literele (se mai folosesc și azi) I, V, X, L, C, D, M, dar aveau o mulțime de reguli pentru scrierea acestora. În secolul al X-lea au apărut cifrele arabe în Europa. Cele mai folosite simboluri au fost cifrele arabe, care se mai folosesc și astăzi.

Reținem

✓ Numim *numere naturale* toate numerele pe care le putem scrie cu cifre de la 0 la 9 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Șirul numerelor naturale este: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...

✓ Numerele pare sunt: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... În general, spunem că un număr de forma $2 \cdot n$, sau simplu $2n$, n număr natural, este *număr par*.

✓ Numerele impare sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ... În general, spunem că un număr de forma $2 \cdot n + 1$, sau simplu $2n + 1$, n număr natural, este *număr impar*.

✓ Sistemul de numerație pe care-l folosim se numește *sistem de numerație zecimal* – din zece în zece.

✓ Numerele naturale au două utilizări importante: sunt folosite pentru *numărare* (5 caise pe masă) – *numere cardinale* – și pentru *ordonarea* unei colecții de obiecte (obiectul numărul 1, obiectul numărul 2, ...) – *numere ordinale*.

✓ Sistemul de numerație zecimal este un sistem pozițional, pentru că fiecare cifră are o anumită poziție. Astfel se formează *clase de unități, mii, milioane, miliarde*, iar fiecare clasă cuprinde *sute, zeci, unități*.

Numele clasei	**Clasa miliardelor**			**Clasa milioanelor**			**Clasa miilor**			**Clasa unităților**		
Numele ordinului	Sute de miliarde	Zeci de miliarde	Unități de miliarde	Sute de milioane	Zeci de milioane	Unități de milioane	Sute de mii	Zeci de mii	Unități de mii	Sute	Zeci	Unități
Numărul ordinului	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Probleme rezolvate

- Completați un tabel asemănător celui de mai jos, conform exemplelor:

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților			
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	
							2	5	Numărul 25 – *douăzeci și cinci* – are două cifre; cifra 5 reprezintă unitățile și cifra 2 reprezintă zecile.
						3	1	6	Numărul 316 – *trei sute șaisprezece* – are trei cifre; 6 reprezintă unitățile, 1 reprezintă zecile și 3 reprezintă sutele.
					1	5	8	7	
				2	0	0	4	0	
	1	5	2	7	3	0	4	9	
3	4	9	7	5	0	1	2	8	

Reținem

✓ Pentru a scrie numerele naturale folosim cele zece cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cu ajutorul lor se formează:

10 numere naturale de o cifră: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

90 de numere naturale de două cifre: 10, 11, ..., 99.
Forma generală de scriere a acestora este $\overline{ab}$, a și b cifre, $a \neq 0$; $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$.

900 de numere naturale de trei cifre: 100, 101, ..., 999.
Forma generală de scriere a acestora este $\overline{abc}$, a, b și c cifre, $a \neq 0$; $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$.

Probleme rezolvate

- Descompunerile numerelor 37, 469 și 1025 în sistemul de numerație zecimal sunt:
$37 = 10 \cdot 3 + 7$; $469 = 100 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 9$; $1025 = 1000 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5$.

- Există 9 numere naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu 8 și acestea sunt: 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88 și 98.

- Pentru numărul 10639, cifra 0 ocupă poziția miilor, cifra 3 pe cea a zecilor, 6 este cifra sutelor, iar 9 este cifra unităților. Stabiliți poziția cifrelor pentru numerele 4301296, 9630, 96230, 3096 și verificați răspunsurile prin comparație cu răspunsul colegului de bancă.

- Numărul 3113 este de patru cifre și este egal cu răsturnatul lui (răsturnatul numărului $\overline{abcd}$ este numărul $\overline{dcba}$). Scrieți toate numerele de patru cifre cu cifra sutelor egală cu 1 și care sunt egale cu răsturnatele lor, apoi descompuneți în sistemul de numerație zecimal pe cel mai mic și pe cel mai mare dintre ele.

- Dacă înlocuim litera a în numărul $\overline{250a3}$ cu cifra 4 obținem numărul 25043. Scrieți și voi cel puțin patru numere de forma a) $\overline{250a3}$; b) $\overline{a93}$; c) $\overline{1a3b47}$.

Activitate în perechi

Formați perechi și scrieți cel mai mic și cel mai mare număr de trei cifre cu cifra zecilor egală cu 0 și cifra sutelor egală cu cea mai mare cifră, apoi descompuneți în sistemul de numerație zecimal. Verificați dacă răspunsul colegului este corect.

Portofoliu

Transcrieți în portofoliul personal părțile denumite **Reținem**. Vă vor folosi de câte ori veți vrea să vă amintiți sau să repetați. În clasa a VIII-a vă veți reaminti mai ușor noțiunile învățate.

Probleme propuse

•

1. Citiți numerele din tabel și prezentați poziția fiecărei cifre:

Clasa miliardelor			Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U
						4	0	2	1	5	0
			1	1	0	0	1	1	0	0	1
4	0	9	7	5	1	3	6	8	2	5	7
				8	1	5	7	3	6	9	2
			1	0	0	0	0	0	0	0	1

2. Scrieți cu cifre numerele:
a) zece mii trei;
b) un milion două sute treizeci și patru de mii cinci sute șaizeci și șapte;
c) patru sute nouăzeci și doi;
d) treizeci de mii patru sute cinci.

3. Descompuneți în sistemul de numerație zecimal numerele 62, 510, 3712, 49516, 784369.

4. Stabiliți poziția cifrelor 7, 5, 3, 1 pentru numerele:
a) 1357; b) 97351; c) 30215478.

5. Scrieți două numere de trei cifre și trei numere de patru cifre care să conțină o singură dată cifrele 9, 5 și 1.
Indicație. Pentru numerele de patru cifre mai folosiți o cifră în afară de cele trei date de problemă.

6. Scrieți:
a) cel mai mic număr natural de două cifre;
b) cel mai mare număr natural de două cifre diferite;
c) cel mai mic număr natural de trei cifre identice;
d) cel mai mare număr natural de patru cifre diferite.

••

7. Scrieți toate numerele naturale de două cifre care au cifra zecilor egală cu 3 și descompuneți în sistemul de numerație zecimal pe cel mai mic și pe cel mai mare dintre ele.

8. Scrieți toate numerele de trei cifre cu cifra unităților egală cu 8 și cifra sutelor egală cu cea mai mică cifră nenulă. Descompuneți în sistemul de numerație zecimal pe cel mai mic și pe cel mai mare dintre ele.

9. Scrieți numerele naturale care au următoarea descompunere în sistemul de numerație zecimal:
a) $100 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 1$;
b) $10000 \cdot 9 + 1000 \cdot 8 + 100 \cdot 2 + 10 \cdot 8$;
c) $1000000 \cdot 6 + 1000 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 3$.

10. Scrieți toate numerele de forma:
a) $\overline{a93}$; b) $\overline{2a}$; c) $\overline{a2b}$.
Numărați, în fiecare caz, câte numere ați obținut.
Indicație. Pentru a scrie numerele trebuie să înlocuim, pe rând, cifra lipsă cu cifrele de la 0 la 9.
Atenție! Nu există numere naturale care încep cu cifra 0.

11. Scrieți toate numerele pare de forma:
a) $\overline{a6}$; b) $\overline{29a}$; c) $\overline{a2b}$; d) $\overline{b5}$.
Numărați, în fiecare caz, câte numere ați obținut.

12. Determinați numărul de forma $\overline{a3bc}$, știind că cifra unităților este egală cu 4, suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor este egală cu 8, iar diferența dintre cifra miilor și cifra zecilor este egală cu 1.

•••

13. Scrieți toate numerele de două cifre care au cifra unităților egală cu 6 și cifra zecilor mai mică decât cifra unităților.

14. Scrieți toate numerele de patru cifre care sunt egale cu răsturnatele lor și au cifra sutelor egală cu 8.

15. Scrieți toate numerele de trei cifre care au suma cifrelor egală cu 8.

16. De câte ori se folosește cifra 6 în scrierea numerelor de două cifre?
Indicație. Numărați mai întâi numerele de două cifre cu cifra zecilor egală cu 6 și apoi pe cele care au cifra unităților 6.

17. Câte numere naturale de trei cifre puteți forma, știind că două cifre sunt egale cu 3?

18. Câte numere de trei cifre au cifra 4 poziționată la ordinul zecilor?

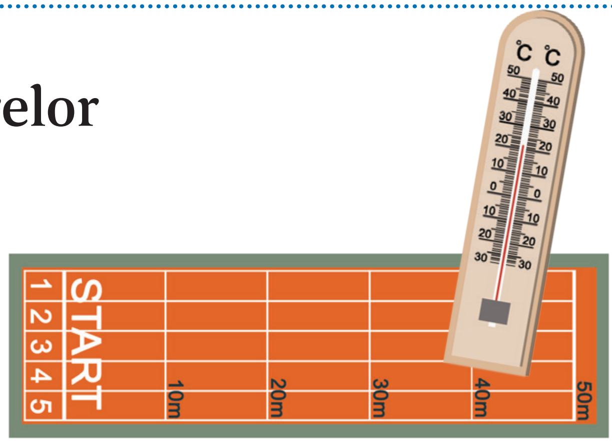
19. Determinați numerele consecutive $\overline{a12}$, $\overline{3bc}$, $\overline{xyz}$.

20. Determinați numărul $\overline{a27}$, știind că răsturnatul lui este numărul $\overline{7b5}$.

Reprezentarea pe axa numerelor

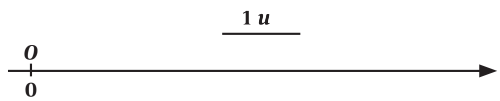
Andrei: Ana, ai observat pista de alergare pe care dăm proba de viteză la Educație fizică? La Start e scris 0, iar pe parcursul ei sunt marcate numerele 10, 20, 30, 40 și, la final, 50.

Ana: Da, am văzut-o și m-am gândit că seamănă cu o axă a numerelor. Și știi cine mai seamănă cu o axă? Termometrul meu din cameră, doar că sunt de dimensiuni diferite.

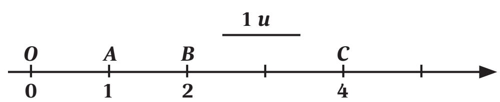


Reținem

✓ Se numește *axa numerelor* ansamblul format din: o dreaptă pe care se fixează un punct, numit *origine*, un *sens* pozitiv, spre dreapta, și o *unitate de măsură*. Originea axei corespunde numărului 0.



✓ Dacă așezăm unitatea de măsură pe axă, din origine spre dreapta, o singură dată, obținem un punct care corespunde numărului 1. Dacă așezăm unitatea de măsură de două ori, obținem punctul care corespunde numărului 2 și așa mai departe. Astfel, fiecărui număr natural îi corespunde un punct pe axa numerelor.

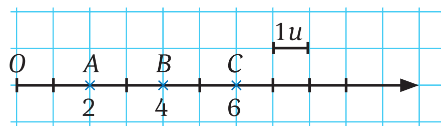


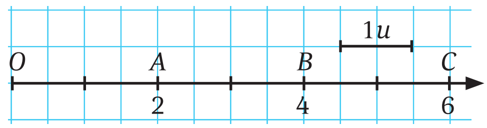
✓ Pe axa numerelor de mai sus, sunt reprezentate punctele: $O(0)$ – *citim O de coordonată 0;* $A(1)$ – *A de coordonată 1*; $B(2)$ – *B de coordonată 2*; $C(4)$ – *C de coordonată 4*.

✓ Când comparăm două numere naturale, numărul situat pe axă în stânga este mai mic.

Probleme rezolvate

● *Ana* și *Andrei* reprezintă pe axă numerele 2, 4 și 6. *Andrei* folosește ca unitate de măsură o pătrățică de caiet, iar *Ana* folosește ca unitate de măsură două pătrățele de caiet.





Ana: Desenele noastre arată la fel, doar că al meu este mai mare. Asta înseamnă că nu contează cât de mare luăm unitatea de măsură.

Andrei: Eu cred că, dacă avem de reprezentat pe axă numere mai mari, trebuie să luăm unitatea de măsură mai mică, pentru a ne încăpea desenul pe pagină.

Probleme propuse

1. Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(2)$, $B(3)$, $C(5)$, $D(6)$, $E(9)$, $F(10)$, $G(12)$.

2. Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(10)$, $B(80)$, $C(70)$, $D(40)$, $E(100)$, $F(30)$, $G(60)$. Cum veți lua unitatea de măsură pentru a realiza desenul?

3. Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(4)$, $B(8)$, $C(9)$, $D(10)$.

i. Câte unități de măsură sunt între punctele:

a) A și B; b) C și A; c) B și A;

d) A și D; e) B și D; f) C și D?

ii. Reprezentați punctul M, care este la mijlocul distanței dintre A și B. Ce coordonată are punctul M?

iii. Reprezentați punctul N, care este la mijlocul distanței dintre A și D. Ce coordonată are punctul N?

iv. Reprezentați punctul P, care este la mijlocul distanței dintre D și O. Ce coordonată are punctul P?

Compararea și ordonarea numerelor naturale

Ana: Am rezolvat problemele de la lecția anterioară. La problema 3. am reprezentat pe axă numerele (le citesc de la stânga la dreapta): 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ele sunt aranjate în ordine crescătoare. Dar noi putem compara numerele naturale și fără a le reprezenta pe axă.

Andrei: Da, dacă-mi amintesc bine, depinde de numărul de cifre ale fiecăruia dintre numere.

Reținem

✓ Dacă două numere naturale au un număr diferit de cifre, atunci este mai mare numărul cu mai multe cifre.

Exemplu: 123 > 98, pentru că 123 are trei cifre și 98 are două cifre.

✓ Dacă două numere naturale au același număr de cifre, atunci comparăm cifrele de același ordin, de la stânga la dreapta, până când ajungem la cifre diferite. Este mai mare numărul care are cifra respectivă mai mare.

Exemplu: 5769 > 5762 pentru că 5 = 5 (cifra miilor), 7 = 7 (cifra sutelor), 6 = 6 (cifra zecilor) și 9 > 2.

✓ Dacă primul număr este mai mare decât al doilea, vom folosi simbolul >.

Dacă primul număr este mai mic decât al doilea, vom folosi simbolul <.

Dacă două numere sunt egale, vom folosi simbolul =.

✓ Dacă vrem să spunem că două numere nu sunt egale, vom spune că ele sunt diferite și folosim simbolul ≠. Scriem 13 ≠ 9 și citim: *„13 este diferit de 9"*.

✓ A ordona mai multe numere înseamnă a le aranja în ordine crescătoare sau descrescătoare.

Activitate în perechi

Formați perechi și rezolvați exercițiile următoare. Verificați dacă răspunsul colegului este corect.

1. Comparați numerele:

a) 75 cu 57;

b) 136 cu 163;

c) 5248 cu 8524;

d) 21212 cu 12121;

e) 235 cu 1008;

f) 57101 cu 57201.

2. Ordonați întâi crescător, apoi descrescător numerele:

47, 32, 78, 56, 64, 89, 21 și 99.

Andrei: Ana, dar tu știi câte numere naturale există?

Ana: Sunt o infinitate de numere naturale, pentru că fiecare număr natural are un număr consecutiv lui: 0, 1, 2, 3, ..., n , n + 1, ...

Reținem

✓ Numerele n și n+1, n număr natural, sunt *numere consecutive*. Numerele consecutive cresc din 1 în 1.

Exemple: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sunt numere consecutive.

✓ Numerele 2n și 2n+2, n număr natural, sunt *numere consecutive pare*. Numerele consecutive pare cresc din 2 în 2.

Exemple: 4, 6, 8, 10, 12, 14 sunt numere consecutive pare.

✓ Numerele 2n+1 și 2n+3, unde n este număr natural, sunt *numere consecutive impare*. Numerele consecutive impare cresc din 2 în 2.

Exemple: 5, 7, 9, 11, 13, 15 sunt numere consecutive impare.

Probleme rezolvate

- Scrieți numerele naturale cuprinse între 52 și 62.

Rezolvare. Numerele naturale cuprinse între 52 și 62 sunt: 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60 și 61.

- Scrieți numerele a, $a+1$, $a+2$ și $a+3$, unde $a = 13$. Numerele obținute sunt consecutive? Sunt ordonate numerele obținute?

Rezolvare. Numerele obținute sunt: 13, 14, 15 și 16. Ele sunt numere consecutive, ordonate crescător.

- Scrieți numerele naturale pare cuprinse între 13 și 29.

Rezolvare. Numerele naturale pare cuprinse între 13 și 29 sunt: 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 și 28.

- Scrieți numerele $2a$, $2a+2$, $2a+4$ și $2a+6$, unde $a = 18$. Numerele obținute sunt consecutive pare? Sunt ordonate numerele obținute?

Rezolvare: Numerele obținute sunt: 36, 38, 40 și 42. Ele sunt numere consecutive pare, ordonate crescător.

Reținem

✓ Dacă avem un număr natural n, $n \neq 0$, numărul $n-1$ se numește *predecesorul* numărului n. Doar numărul 0 nu are predecesor număr natural.

✓ Dacă avem un număr natural n, numărul $n+1$ se numește *succesorul* numărului n. Orice număr natural are un succesor număr natural.

Andrei: Deci predecesorul numărului 45 este numărul 44 și succesorul numărului 45 este numărul 46. Adică 44 < 45 < 46.

Probleme rezolvate

- Scrieți predecesorul și succesorul fiecăruia dintre numerele: 10, 69, 105, 70.

Rezolvare: 9 < 10 < 11, 68 < 69 < 70, 104 < 105 < 106 și 69 < 70 < 71.

Probleme propuse

●

1. Comparați numerele: a) 85 cu 58; b) 69 cu 69; c) 185 cu 158; d) 352 cu 3521; e) 1920 cu 1930; f) 3751 cu 3571; g) 99 cu 29; h) 65 cu 56; i) 281 cu 2813; j) 1111 cu 111; k) 6134 cu 6143; l) 7894 cu 7893.

2. Scrieți numerele naturale mai mici decât 7. Scrieți numerele naturale cuprinse între 25 și 31.

3. Comparați cel mai mare număr natural de trei cifre diferite cu cel mai mare număr natural de trei cifre.

4. Ordonați crescător numerele: 1230, 452, 2018, 54, 345, 79, 991, 357 și 9510.

5. Ordonați descrescător numerele: 751, 953, 4510, 349, 8520, 3016, 29 și 6248.

6. Scrieți predecesorul și succesorul numerelor: 66, 59, 80, 100, 99.

●●

7. Scrieți numerele naturale impare cuprinse între 78 și 100.

8. Scrieți numerele $2a+1$, $2a+3$, $2a+5$ și $2a+7$, unde $a = 80$. Numerele obținute sunt consecutive impare? Sunt ordonate numerele obținute?

9. Scrieți numerele $a+5$, $a+4$, $a+3$ și $a+2$, unde $a = 89$. Numerele obținute sunt consecutive? Sunt ordonate numerele obținute?

●●●

10. Scrieți cinci numere consecutive, știind că cel din mijloc este egal cu 74.

Indicație. Scriem numărul 74 și apoi predecesorul și succesorul lui, 73 < 74 < 75, și apoi scriem predecesorul lui 73 și succesorul lui 75.

11. Scrieți cinci numere consecutive pare, știind că cel din mijloc este 46.

12. Scrieți cinci numere consecutive impare, știind că cel din mijloc este 99.

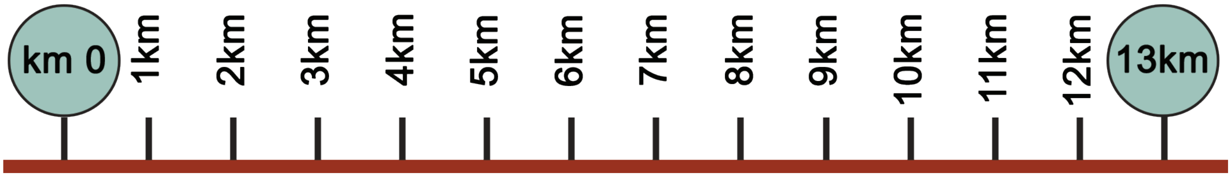
13. Fie numerele $\overline{8x4}$ și $\overline{84y}$. Determinați numerele naturale x și y pentru care $\overline{8x4} < \overline{84y}$.

14. Fie numerele $\overline{x25}$ și $\overline{42y}$. Determinați numerele naturale x și y pentru care $\overline{x25} > \overline{42y}$.

Aproximări. Probleme de estimare

Ana: Ieri am fost cu părinții la un magazin aflat la ieșirea din București spre Pitești. Am plecat din centrul orașului, de la kilometrul 0. Din kilometru în kilometru există câte o bornă kilometrică. Ultima bornă kilometrică pe care am întâlnit-o a fost cea cu 13 km și apoi imediat am ajuns. Mi-am închipuit drumul ca o axă a numerelor pe care am reprezentat fiecare kilometru. Pot spune că am făcut aproximativ 13 km?

Andrei: Da. E foarte bine. Ai făcut o aproximare prin lipsă, fiind foarte aproape de borna de 13 km. Să ne amintim despre aproximări!



Reținem

✓ Dacă în locul unui număr punem un număr apropiat de el, spunem că am făcut o aproximare a numărului dat. Putem *aproxima* un număr *prin lipsă* sau *prin adaos*.

✓ *Aproximarea prin lipsă* până la zeci (sute, mii) a unui număr natural este cel mai mare număr format numai din zeci (sute, mii) mai mic sau egal decât numărul dat.

Aproximarea prin lipsă, de un anumit ordin, a unui număr este numărul obținut prin *neluarea* în considerare a cifrelor situate după ordinul respectiv (adică cifrele din dreapta acelui ordin se înlocuiesc cu zerouri).

✓ *Aproximarea prin adaos* până la zeci (sute, mii) a unui număr natural este cel mai mic număr format numai din zeci (sute, mii) mai mare decât numărul dat.

Aproximarea prin adaos, de un anumit ordin, este numărul obținut prin mărirea cifrei corespunzătoare ordinului respectiv cu o unitate, iar cifrele situate la dreapta acelui ordin se înlocuiesc cu zerouri.

✓ *Rotunjirea* unui număr până la zeci (sute, mii) este aproximarea prin lipsă sau prin adaos mai „apropiată” de numărul respectiv. Dacă ambele aproximări sunt la fel de „apropiate” de număr, atunci se consideră aproximarea prin adaos.

Problemă rezolvată

● Aproximați prin lipsă și prin adaos, la zeci, sute și mii, numărul 1263. Apoi rotunjiți numărul în fiecare caz.

	Aproximarea prin lipsă	Numărul	Aproximarea prin adaos	Rotunjirea
La zeci	1260	**1263**	1270	1260
La sute	1200	**1263**	1300	1300
La mii	1000	**1263**	2000	1000

Încercați și voi să rotunjiți numerele 6345 și 11279 și verificați cu colegul de bancă.

Activitate în perechi

Formați perechi și aproximați prin lipsă și prin adaos, la zeci, sute și mii, numărul 3527. Rotunjiți numărul în fiecare caz.

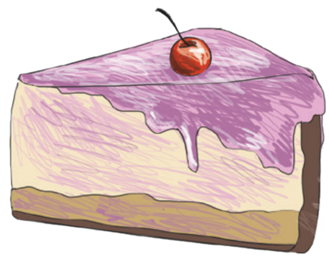
Unul dintre voi să facă aproximările prin lipsă, celălalt aproximările prin adaos, apoi hotărâți împreună care este rotunjirea în fiecare caz.

Andrei: Ana, ce înțelegi tu prin estimare?
Ana: De exemplu, cam câți centimetri crezi că are un creion fără să-l măsori?
Andrei: Cam 15 cm.
Ana: Dar banca noastră cam câți centimetri crezi că are fără să o măsori?
Andrei: Cam 120 cm.
Ana: Dacă mergi să-ți cumperi o minge, cam câți lei trebuie să ai la tine?
Andrei: Cam 60 lei. Am înțeles.

Reținem

✓ Estimare înseamnă aprecierea unei mărimi, valori, pe baza unor date incomplete.

Problemă rezolvată



● Carina vrea să facă o prăjitură și merge la cumpărături cu următoarea listă de produse: 1 pachet de unt, 1 kg de făină, o jumătate de kilogram de zahăr pudră, 1 l de lapte și 6 ouă. Câți bani trebuie să aibă Carina pentru toate cumpărăturile? Cum poate estima suma necesară?

Rezolvare. Carina caută pe internet și aproximează prețurile: 1 pachet de unt – 8 lei, 1 kg de făină – 4 lei, o jumătate de kilogram de zahăr pudră – 2 lei, 1 kg de lapte – 5 lei, 6 ouă – 6 lei. Ea estimează că 25 lei i-ar ajunge.

Probleme propuse

●

1. Aproximați prin lipsă la zeci, sute și mii numerele: 453, 8751, 67912, 102035.

2. Aproximați prin adaos la zeci, sute și mii numerele: 725, 9751, 10537, 901753.

3. Rotunjiți la zeci, sute și mii numerele: 34, 158, 7394, 40852, 903426.

4. Cătălin dorește să-și cumpere o minge care costă 216 lei. Care este numărul maxim de bancnote de 10 lei cu care poate plăti Cătălin mingea?

5. Maria dorește să-și cumpere o tabletă care costă 929 lei. Știind că dispune doar de bancnote de 100 lei, determinați numărul minim de bancnote necesare cumpărării tabletei.

●●

6. Căutați pe internet distanțele dintre București și Iași, București și Satu Mare, Cluj Napoca și Piatra-Neamț și rotunjiți la zeci, sute și mii valorile găsite.

7. Diana vrea să cumpere cadouri pentru familia ei. Prețurile sunt următoarele: un ceas – 225 lei, o geantă – 359 lei, un stilou – 145 lei, un serviciu de cafea – 105 lei, un pachet de cafea – 29 lei, o carte – 37lei, o bluză – 103 lei, o jucărie – 75 lei. Estimați câte obiecte poate să cumpere dacă are 1000 lei. Verificați apoi prin calcul estimările făcute.

8. La un concurs de matematică se acordă 5 puncte pentru o problemă rezolvată corect și se scad 2 puncte pentru o problemă greșită. Ionuț a trimis 20 de probleme rezolvate și a primit 72 de puncte. Câte probleme a rezolvat bine și câte a greșit?

Probleme recapitulative

●

1. Stabiliți poziția cifrelor 0, 4 și 9 pentru numerele:
a) 8940; b) 90412; c) 40159732.

2. Scrieți două numere de ordinul miilor, trei numere de ordinul zecilor și patru numere de ordinul sutelor.

3. Alegeți dintre numerele 41526, 123, 512378, 24356, 987654 pe cele de ordinul zecilor de mii.

4. Rotunjiți la zeci, sute și mii numerele: 7394, 40852, 903426.

5. Ordonați întâi crescător, apoi descrescător numerele: 405, 378, 102, 970, 444, 601, 377 și 1000.

●●

6. Scrieți toate numerele de patru cifre cu cifra miilor egală cu 1 și care sunt egale cu răsturnatele lor. Apoi descompuneți în sistemul de numerație zecimal pe cel mai mic și pe cel mai mare dintre ele.

7. Scrieți cel puțin patru numere cu cifre diferite, de forma:
a) $\overline{a203}$; b) $\overline{1ab3}$; c) $\overline{ab47}$.

8. Scrieți toate numerele impare de forma:
a) $\overline{a3}$; b) $\overline{2a}$; c) $\overline{a2b}$; d) $\overline{a2}$.
Număraţi în fiecare caz câte numere aţi obţinut.

9. Scrieți toate numerele de trei cifre identice și toate numerele de patru cifre consecutive.

10. Scrieți șapte numere consecutive, știind că cel din mijloc este egal cu 121.

11. Scrieți numerele $2a + 9$, $2a + 7$, $2a + 5$ și $2a + 3$, unde $a = 21$. Numerele obținute sunt consecutive impare? Sunt ordonate numerele obținute?

12. Scrieți numerele $a + 8$, $a + 6$, $a + 4$ și $a + 2$, unde $a = 46$. Numerele obținute sunt consecutive pare? Sunt ordonate numerele obținute?

13. Scrieți numerele $a + 8$, $a + 6$, $a + 4$ și $a + 2$, unde $a = 25$. Numerele obținute sunt consecutive impare? Sunt ordonate numerele obținute?

●●●

14. Câte numere naturale de două cifre conțin cifra 3?

15. Scrieți toate numerele de trei cifre care sunt egale cu răsturnatele lor și au cifra zecilor egală cu 5.

16. Scrieți toate numerele de cinci cifre care au cifra sutelor egală cu 1, cifra zecilor egală cu 2 și suma celorlalte cifre egală cu 4.

17. Scrieți toate numerele de patru cifre care au cifra sutelor egală cu 2, cifra zecilor egală cu 0 și suma tuturor cifrelor egală cu 5.

18. Câte cifre se folosesc la numerotarea unei cărți cu 56 de pagini?

Indicație. Paginile de la 1 la 9 sunt numerotate cu 9 cifre. Paginile de după 10 folosesc câte două cifre la fiecare număr.

19. Câte cifre se folosesc pentru numerotarea unei cărți care are 78 de pagini?

20. Câte pagini are o carte, dacă pentru numerotarea ei s-au folosit 216 cifre?

Indicație. Pentru paginile de la 1 la 9 se folosesc 9 cifre, rămân de folosit 216 – 9 = 207 cifre. Pentru paginile cu numere de la 10 la 99 sunt 90 de numere de câte două cifre.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Mi-a plăcut în această unitate	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitit înainte și după test pentru a îmbunătăți

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 30 de minute.

1. Scrieți cu cifre numerele:
a) trei sute patruzeci și opt;
b) patru mii șapte;
c) două sute optzeci și șase de mii o sută douăzeci și cinci. *12 puncte*

2. Comparați numerele:
a) 45 cu 69; b) 120 cu 36; c) 4325 cu 4352; d) 11025 cu 11125; e) 678902 cu 67890. *25 puncte*

3. Ordonați crescător numerele: 752, 49, 134, 89, 100 și 403. *14 puncte*

4. Aproximați prin lipsă și adaos la zeci, sute și mii numărul 1235. Rotunjiți numărul în fiecare caz. *14 puncte*

5. Scrieți numerele naturale impare cuprinse între 46 și 74. *10 puncte*

6. Scrieți patru numere de forma $\overline{91a3}$. Descompuneți în sistemul de numerație zecimal unul dintre numerele scrise. *15 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Comparați numerele:
a) 1278 cu 3210; b) 4510 cu 4610; c) 7823 cu 7832; d) 5103 cu 5104.

2. Ordonați crescător numerele naturale: 1278, 1099, 1187, 1239, 1378, 10105.

3. Aproximați prin lipsă și adaos la zeci, sute și mii numărul:
a) 7998; b) 12301; c)379045.
Rotunjiți fiecare număr în fiecare caz.

4. Scrieți numerele naturale pare cuprinse între 101 și 123.

5. Scrieți predecesorul și succesorul numărului:
a) 129; b) 300; c) 427; d) 1013.

6. Scrieți toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{a13}$; b) $\overline{2a6}$; c) $\overline{a5a}$; d) $\overline{1aa}$.
Specificați pentru fiecare număr dacă este par sau impar.

7. Scrieți toate numerele de trei cifre care au două cifre egale cu 0. Câte numere sunt?

8. Câte numere de trei cifre de forma $\overline{a1b}$ se pot scrie?

9. Găsiți numerele $\overline{xy9}$, $\overline{x70}$, $\overline{8zt}$, știind că ele sunt numere consecutive.

10. Câte numere de trei cifre diferite au cifra 6 poziționată la ordinul unităților?

Adunarea și scăderea numerelor naturale

Andrei: Ana, dacă ar trebui să-ți planifici o excursie, unde ai vrea să mergi?

Ana: Aș vrea să vizitez mănăstirile din nordul Moldovei. M-am gândit la un traseu: București, Suceava, Putna, Gura Humorului, Târgu Neamț, Piatra-Neamț și să mă întorc în București. Dar tu? Unde ai vrea să mergi?

Andrei: Eu aș pleca din București și aș vizita Pitești, Craiova, Drobeta-Turnu Severin, Timișoara, Alba Iulia, Râmnicu Vâlcea, București. Vrei să vedem cine ar parcurge mai mulți kilometri în excursia lui?

Ana: Desigur. Hai să vedem întâi câți kilometri am parcurge fiecare.

Ana
București – Suceava – 444 km
Suceava – Putna – 68 km
Putna – Gura Humorului – 69 km
Gura Humorului – Târgu Neamț – 64 km
Târgu Neamț – Piatra-Neamț – 46 km
Piatra-Neamț – București – 359 km

Andrei
București – Pitești – 119 km
Pitești – Craiova – 123 km
Craiova – Drobeta-Turnu Severin – 111 km
Drobeta-Turnu Severin – Timișoara – 229 km
Timișoara – Alba Iulia – 220 km
Alba Iulia – Râmnicu Vâlcea – 177 km
Râmnicu Vâlcea – București – 178 km

Ana: 444 km + 68 km + 69 km + 64 km + 46 km + 359 = 1050 km

Andrei: 119 km + 123 km + 111 km + 229 km + 220 km + 177 km + 178 km = 1157 km

Ana: Eu aș parcurge cu 107 km mai puțin decât tine: 1157 km – 1050 km = 107 km.

Reținem

Adunarea numerelor naturale

$$\underbrace{a + b}_{\text{termeni}} = \underbrace{c}_{\text{sumă sau total}}$$

Suma a două sau mai multor numere nu se schimbă dacă:

- ✓ schimbăm ordinea termenilor:
  $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele a și b.
  Spunem că adunarea este *comutativă*.
- ✓ grupăm termenii în moduri diferite:
  $a + (b + c) = (a + b) + c$, oricare ar fi numerele a, b și c.
  Spunem că adunarea este *asociativă*.

Numărul 0 este *element neutru* la adunare:
$a + 0 = a$, oricare ar fi numărul a.

Scăderea numerelor naturale

$$\underbrace{a}_{\text{descăzut}} - \underbrace{b}_{\text{scăzător}} = \underbrace{c}_{\text{rest sau diferență}}$$

- ✓ Scăderea numerelor naturale are sens dacă descăzutul este mai mare sau egal cu scăzătorul.
- ✓ Proba adunării se face prin scădere. Proba scăderii se face sau prin adunare sau prin scădere.

Adunarea: termen (a) + termen (b) = suma (s).
Proba: $a = s - b$; $b = s - a$.

Scăderea: descăzut (d) – scăzător (s) = diferență (r).
Proba: $d = s + r$; $s = d - r$.

Calcul oral:

25 + 13 =	49 + 75 =
102 + 417 =	125 + 625 =
1025 + 450 =	64 – 16 =
81 – 25 =	100 – 36 =
225 – 125 =	750 – 449 =

Activitate în perechi

Formați perechi și rezolvați exercițiile alăturate. Fiecare din pereche va rezolva exercițiile de pe una dintre coloane, iar la final verificați rezultatele și trageți concluzii.

Coloana 1	Coloana 2
126 + 423 =	423 + 126 =
429 + (174 + 26) =	(429 + 174) + 26 =
369 – 275 =	369 – 275 =
854 – 86 – 14 =	854 – (86 + 14) =

Probleme rezolvate

● Calculați și arătați că: a) 145 + 678 = 678 + 145; b) (102 + 98) + 618 = 102 + (98 + 618).

Rezolvare. a) Conform comutativității adunării obținem același rezultat. b) Conform asociativității adunării obținem același rezultat. Dacă avem cel puțin trei termeni, îi grupăm convenabil pentru calcule mai ușoare.

● Calculați: a) 447 – 321; b) 129 + 316 – 405; c) 987 – 425 – 122; d) 987 – (425 – 122).

Rezolvare. a) 447 – 321= 126. *Atenție, scăderea nu este comutativă!* b) 129 + 316 – 405 = 40; c) 987 – 425 – 122 = 440; d) 987 – (425 – 122) = 684. *Atenție, scăderea nu este asociativă!*

● Determinați numărul cu 36 mai mare decât 427 și numărul cu 36 mai mic decât 427.

Rezolvare. „Cu 36 mai mare decât 427” înseamnă 36 + 427 = 463, iar cu 36 mai mic: 427 – 36 = 391.

● David merge la cumpărături cu 100 lei în buzunar. El cumpără o ciocolată de 5 lei, o carte care costă cu 14 lei mai mult decât ciocolata și un tricou care costă cu 9 lei mai mult decât cartea. Câți bani i-au rămas?

Rezolvare. Ciocolata costă 5 lei, cartea costă 5 lei + 14 lei = 19 lei și tricoul costă 19 lei + 9 lei = 28 lei. În total, 5 lei + 19 lei + 28 lei = 52 lei. Restul este de 100 lei – 52 lei = 48 lei.

Probleme propuse

●

1. Calculați:

24 + 76 =	123 + 654 =	1508 + 752 =
58 + 87 =	581 + 739 =	3456 + 2544 =
76 – 24 =	654 – 123 =	1508 – 752 =
87 – 58 =	739 – 581 =	3456 – 2544 =

2. Determinați numărul cu 26 mai mare decât 149.

3. Determinați numărul cu 57 mai mic decât 149.

4. Adunați 79 cu succesorul și predecesorul său.

5. Adunați cinci numere naturale consecutive, știind că primul număr este 29.

●●

6. Calculați, grupând convenabil numerele:

426 + 538 + 424 +112 =	349 + 157 – 249 – 57 =
349 + 183 + 217 + 151 =	3106 + 459 – 106 =
681 + 562 + 219 + 38 =	8123 – 123 +1506 – 6 =

9000 – 1587 – 2413 – 3987 =

30201 + 45810 + 19799 =

5723 + 3458 – 723 – 458 =

7. Comparați numerele: 12 + 54 +78 cu 36 + 25 + 84; 129 + 31 – 65 cu 842 – 759; 802 + 438 cu 248 – 72 +24; 81 + 26 + 24 + 19 cu 85 – 19; 612 – 162 cu 259 + 175 +41; 39 + 78 + 31 cu 141 – 51 + 68.

8. Ana cumpără o bluză de 69 lei, un trening de 129 lei și un penar de 59 lei. Andreea cumpără o carte de 65 lei, o rochie de 89 lei și o pereche de teniși de 79 lei. Care fată a cheltuit mai mulți bani?

9. La o activitate organizată la școală au participat 122 de elevi din clasa V-a, cu 19 elevi mai mulți din clasa a VI-a decât cei de clasa a V-a și cu 35 de elevi mai puțini din clasa a VII-a decât cei din clasa a VI-a. Câți elevi au participat la activitate?

10. Calculați suma și diferența dintre:

a) cel mai mare număr natural de două cifre distincte și cel mai mic număr natural de două cifre;

b) cel mai mare număr natural de trei cifre și cel mai mic număr natural de trei cifre distincte;

c) cel mai mic număr natural de patru cifre distincte care are cifra miilor 6 și cel mai mare număr natural de trei cifre distincte care are cifra unităților 5.

●●●

11. Reconstituiți operațiile:

$\begin{array}{r} 45*3+ \\ 1*69 \\ \hline 6062 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3754+ \\ **** \\ \hline 5120 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 45*3- \\ 1*69 \\ \hline *12* \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3754- \\ **** \\ \hline 1999 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1*11+ \\ 34** \\ \hline 5022 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 33**- \\ 1*69 \\ \hline *303 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1*3*+ \\ *5*8 \\ \hline 6062 \end{array}$

Indicație. La primul exercițiu adunăm unitățile: 3 + 9 = 12; scriem 2 și ținem minte zecea. Adunăm zecile, 6 + * + 1 = ...6, așadar cifra lipsă trebuie să fie 9; reținem 1 pentru adunarea sutelor. La sute avem 5 + * + 1 = ...0, adică lipsește 4. La al doilea exercițiu putem folosi proba adunării.

Înmulțirea numerelor naturale

Andrei: Dacă avem de calculat un număr *cu ... mai mare decât ...* adunăm cele două numere, iar dacă avem de calculat un număr cu ... *mai mic decât ...* scădem din al doilea număr primul număr.

Ana: Desigur. Dar dacă avem de calculat un număr *de ... ori mai mare decât ...* înmulțim cele două numere. Să ne amintim câte ceva despre înmulțire.

Reținem

✓ Dacă înmulțim un număr natural cu 10 sau cu 100 sau cu 1000 adăugăm la finalul numărului dat un zero sau două zerouri sau trei zerouri. Spunem că am înzecit (de zece ori mai mare) sau am însutit (de 100 de ori mai mare) sau am înmiit (de 1000 de ori mai mare) numărul dat.

$$\underbrace{a \times b}_{\text{factori}} = \underbrace{c}_{\text{produs}}$$

✓ De acum vom folosi pentru înmulțire semnul · în locul semnului ×, adică $\underbrace{a \cdot b}_{\text{factori}} = \underbrace{c}_{\text{produs}}$.

Probleme rezolvate

- Calculați produsul numerelor 46 și 23.

$$\begin{array}{r} 46\times \\ \underline{23} \\ 138 \\ \underline{92} \\ 1058 \end{array}$$

Putem rezolva și așa:
$46 \cdot 23 = 46 \cdot (20 + 3) =$
$= 46 \cdot 20 + 46 \cdot 3 =$
$= 920 + 138 = 1058.$

Calcul oral:

45 · 10 =	123 · 100 =	5 · 1000 =
28 · 10000 =	75 · 2 =	40 · 5 =
102 · 4 =	103 · 7 =	5 · 1012 =
4 · 1221 =	5 · 205 =	90 · 5 =

- Să rezolvăm după model:

$$\begin{array}{r} 134\times \\ \underline{8} \\ 1072 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 469\times \\ \underline{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1538\times \\ \underline{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2931\times \\ \underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 694\times \\ \underline{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 136\times \\ \underline{24} \\ 544 \\ \underline{272} \\ 3264 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 241\times \\ \underline{36} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 517\times \\ \underline{52} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1852\times \\ \underline{41} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3405\times \\ \underline{56} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 215\times \\ \underline{123} \\ 645 \\ 430 \\ \underline{215} \\ 26445 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 304\times \\ \underline{215} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 524\times \\ \underline{106} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 712\times \\ \underline{203} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1234\times \\ \underline{125} \end{array}$$

Activitate în perechi

Formați perechi și rezolvați astfel: unul dintre voi va rezolva exercițiile din coloana 1 și celălalt pe cele din coloana 2. La final verificați rezultatele și trageți concluzii.

Coloana 1	Coloana 2
45 · 19 =	19 · 45 =
5 · 147 · 2 =	5 · 2 · 147 =
1256 · 3241 · 0 =	1256 · 0 · 3241 =
57 · 62 + 57 · 38 =	57 · (62 + 38) =

Reținem

✓ Produsul a două sau mai multor numere nu se schimbă dacă:

- schimbăm ordinea factorilor: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele a și b; spunem că înmulțirea este *comutativă*;
- grupăm factorii în moduri diferite: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, oricare ar fi numerele a, b și c; spunem că înmulțirea este *asociativă*.

✓ Numărul 1 este element neutru la înmulțire: $a \cdot 1 = a$, oricare ar fi număr natural a.

✓ Înmulțind orice număr natural cu zero, produsul este egal cu 0: $a \cdot 0 = 0$, oricare ar fi numărul natural a.

✓ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele a, b și c. Spunem că înmulțirea este *distributivă față de adunare și față de scădere*.

Probleme rezolvate

Numărul de 11 ori mai mare decât 44 este $11 \cdot 44 = 484$. Numărul de 12 ori mai mare decât diferența numerelor 75 și 25 este $12 \cdot (75 - 25) = 12 \cdot 50 = 600$. Numărul de 13 ori mai mare decât suma numerelor 75 și 25 este $13 \cdot (75 + 25) = 13 \cdot 100 = 1300$.

Calculați: a) $75 \cdot 101$; b) $75 \cdot 99$; c) $12 \cdot 105$.

Rezolvare. Putem să înmulțim direct sau să folosim distributivitatea înmulțirii față de adunare:

a) $75 \cdot 101 = 75 \cdot (100 + 1) = 75 \cdot 100 + 75 \cdot 1 = 7500 + 75 = 7575$;

b) $75 \cdot 99 = 75 \cdot (100 - 1) = 7500 - 75 = 7425$;

c) $12 \cdot 105 = 12 \cdot (100 + 5) = 12 \cdot 100 + 12 \cdot 5 = 1200 + 60 = 1260$.

Probleme propuse

●

1. Calculați:

$451 \cdot 3 =$ $\quad$ $11 \cdot 38 =$ $\quad$ $451 \cdot 103 =$

$32 \cdot 45 =$ $\quad$ $451 \cdot 34 =$ $\quad$ $45 \cdot 2 \cdot 140 =$

$679 \cdot 34 \cdot 10 =$ $\quad$ $9871 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10 =$

$25 \cdot 391 \cdot 4 =$ $\quad$ $102 \cdot 301 \cdot 45 =$

$14591 \cdot 379 \cdot 0 =$ $\quad$ $84 \cdot 63 - 84 \cdot 13 =$

2. Calculați: a) dublul lui 45; b) triplul lui 102; c) înzecitul lui 9871.

3. Calculați numerele de 12 ori mai mari decât numerele: 4; 48; 125; 6104.

4. Comparați:

a) $12 \cdot 15$ cu $14 \cdot 13$; b) $81 \cdot 30$ cu $71 \cdot 40$;
c) $123 \cdot 321$ cu $321 \cdot 123$; d) $99 \cdot 35$ cu $1964 \cdot 0$.

5. O croitoreasă realizează 16 bluze pe zi. Câte bluze realizează în 25 de zile?

●●

6. Un stilou costă 25 lei și un caiet costă 3 lei. Cât costă 5 stilouri și 12 caiete la un loc?

7. Determinați numerele naturale de trei cifre pentru care produsul cifrelor este egal cu 6.
Indicație. $\overline{abc}$, cu $a \cdot b \cdot c = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

8. Un dreptunghi are lățimea de 15 cm și lungimea de patru ori mai mare decât lățimea. Determinați perimetrul dreptunghiului.

9. Iulian parcurge distanța de acasă până la bunica lui astfel: merge două ore cu 10 km/h, o oră cu 25 km/h și trei ore cu 15 km/h. Câți kilometri parcurge Iulian în cele 6 ore?

10. Știind că produsul cifrelor este egal cu 0, determinați numerele naturale de forma: a) $\overline{2x3}$; b) $\overline{2x3y}$.

●●●

11. Compuneți o problemă asemănătoare cu cea anterioară și propuneți-o colegului de bancă. Verificați dacă a rezolvat corect!

12. Produsul a două numere naturale este egal cu 95. Determinați numerele știind că, dacă mărim unul dintre numere cu 5, produsul devine 120.
Indicație. Notăm numerele cu x și y. Știm că $x \cdot y = 95$ și $x \cdot (y + 5) = 120$. Rezolvăm folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare.

13. Găsiți regula șirului și scrieți încă trei termeni:
a) 7, 14, 21, ...; b) 2, 6, 18, 54, ...; c) 8, 24, 40, 56, ...

Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

Ana: Andrei, mai avem și probleme care ne cer să aflăm un număr *de ... ori mai mic decât ....* Asta înseamnă împărțirea celui de al doilea număr la primul număr.

Andrei: Da. Dar să nu uităm că nu putem împărți la 0. Și mai știm că o împărțire poate fi exactă, adică cu restul 0, sau poate fi cu restul diferit de 0.

Reținem

✓ Dacă la împărțirea a două numere restul este zero, putem scrie:

$$\underset{\text{deîmpărțit}}{d} : \underset{\text{împărțitor}}{î} = \underset{\text{cât}}{c}, \quad î \neq 0.$$

✓ Proba înmulțirii se face prin împărțire, iar proba împărțirii se face prin înmulțire sau împărțire.

✓ Dacă avem $a \cdot b = c$, $a \neq 0, b \neq 0$, proba înmulțirii se poate face astfel: $a = c:b$ sau $b = c:a$.

✓ Dacă avem $d:î = c$, $î \neq 0$, proba împărțirii se poate face astfel: $d = î \cdot c$ sau $î = d:c$, $c \neq 0$.

Calcul oral:

44 : 2 =	68 : 4 =	81 : 3 =	125 : 5 =	40 : 10 =	1200 : 100 =	99 : 3 =	70000 : 1000 =
80 : 4 =	4500 : 10 =	64 : 4 =	750 : 5 =	750 : 50 =	66 : 6 =	50 : 2 =	100 : 4 =

Probleme rezolvate

● Să facem câteva împărțiri și apoi rezolvați voi după model:

468 | 6
42 | 78
= 48
48
= =

159 | 3

828 | 9

714 | 7

656 | 8

576 | 24
48 | 24
= 96
96
= =

216 | 12

924 | 21

845 | 13

4692 | 46

3296 | 103
309 | 32
= 206
206
= = =

10302 | 102

11088 | 231

25575 | 341

● Determinați numărul de 25 de ori mai mic decât 625. Faceți proba.
Rezolvare. 625 : 25 = 25. Proba se face prin înmulțire.

Activitate în perechi

Formați perechi și rezolvați fiecare exercițiu individual, apoi verificați rezultatele colegului de echipă.

1. *Determinați numărul de 8 ori mai mic decât numărul 1232. Faceți proba.*
2. *Determinați numărul de 11 ori mai mare decât numărul 432. Faceți proba. Ați folosit operația de împărțire la acest exercițiu?*
3. *Bogdan rezolvă într-o zi 48 de probleme, a doua zi de 4 ori mai puține, iar a treia zi jumătate din numărul de probleme rezolvate în primele două zile la un loc. Câte probleme a rezolvat Bogdan în cele trei zile?*
4. *Comparați rezultatele operațiilor: 369:9 + 531:9 și (369 + 531):9. Ce observați?*

● Mădălina are 30 de portocale și 45 de bomboane și vrea să facă cât mai multe pachete identice care să conțină și portocale și bomboane. Câte pachete poate face? Ce conține un pachet?

Rezolvare. Numerele 30 și 45 se împart exact la 3, la 5 și la 15. Cel mai mare număr de pachete care se pot face este 15. Un pachet va conține 30 : 15 = 2 portocale și 45 : 15 = 3 bomboane.

● Reconstituți împărțirile:

```
2 6 * | 1 2         1 * 3 * | * *
* *   | * *         1 5     | * * *
  2 *                 * 3
                        0
  = =                 * 3 *
                      * * *
                      = = =
```

Rezolvare.

```
2 6 4 | 1 2         1 6 3 5 | 1 5
2 4   | 2 2         1 5     | 1 0 9
  2 4                 1 3
  2 4                   0
  = =                 1 3 5
                      1 3 5
                      = = =
```

Reținem

✓ Dacă a, b, c sunt numere naturale, $c \neq 0$, avem $(a + b) : c = a : c + b : c$ și $(a - b) : c = a : c - b : c$.

✓ Împărțirea cu rest 0 nu este comutativă. Putem împărți 45 : 5 = 9, dar nu putem împărți exact 5 la 45.

✓ Împărțirea nu este asociativă. Într-un exercițiu, înmulțirile și împărțirile se fac în ordinea în care se găsesc, de la stânga la dreapta. De exemplu, 846 : 6 : 3 = 47 și 846 : (6 : 3) = 423.

Probleme propuse

●

1. Completați tabelul după model:

a	b	$a \cdot b$	$a:b$
24	8	192	3
75	15		
81		2187	
	28		16
5177			31

2. Comparați: a) 144 : 12 cu 169 : 13; b) 1634 : 38 cu 2924 : 68; c) 6018 : 102 cu 6832 : 112; d) 160768 : : 512 cu 163699 : 523; e) 20402 :101 cu 60802 : 301.

3. Determinați numărul de...
a) 10 ori mai mic decât 4210;
b) 15 ori mai mic decât 375;
c) 10 ori mai mic decât cel mai mic număr de 3 cifre;
d) 325 de ori mai mic decât 3900.

4. Elevii școlii noastre au plantat 225 de copaci pe 15 rânduri. Câți copaci sunt pe fiecare rând?

5. Sorin a așezat cele 744 de timbre din colecție, câte 24 pe fiecare pagină din clasor. Câte pagini a ocupat?

●●

6. Marius a plătit 78 lei pentru 12 caiete și 15 pixuri. Dacă un caiet costă 4 lei, care este prețul unui pix?

7. Calculați câtul dintre suma și diferența numerelor 48 și 24.

8. Determinați numărul de: a) 3 ori mai mic decât cel mai mare număr natural de trei cifre diferite; b) 17 ori mai mic decât cel mai mic număr de trei cifre diferite; c) 76 de ori mai mic decât cel mai mic număr de forma $\overline{a4364}$; d) 37 de ori mai mic decât cel mai mare număr natural de trei cifre.

9. a) Scrie numărul 28 ca produs de cât mai multe numere naturale diferite.

b) Câtul dintre un număr de două cifre și unul de o cifră este 28. Care sunt cele două numere? Există mai multe cazuri?

10. Calculați: a) $8(a + a:a - a)$;
b) $(2a + a:a - a - a - 1) : 5$; c) $(\overline{ab}:\overline{ab} + 2) : 3$.

11. Determinați numerele naturale de forma $\overline{a4b}$ știind că $a:b = 3$.

12. Determinați numerele naturale n pentru care 28 se împarte exact la $n - 5$.

Indicație. Numărul 28 se împarte la 1, atunci $n - 5 = 1$, de unde $n = 6$.

●●●

13. Dacă $\overline{xy} = 94$, calculați: $x + y + x \cdot y - 2350 : \overline{xy}$.

Indicație. Dacă $\overline{xy} = 94$, atunci $x = 9$, $y = 4$.

14. Dacă $a = 16$ și $b = 24$, calculați $137400:(a + b):15$ și $27480:(b - a):15$.

Factor comun

Andrei: Ana, avem de rezolvat următorul exercițiu: $485 \cdot 164 - 485 \cdot 64$. Observ că 485 apare de două ori, oare nu găsim o metodă mai rapidă de rezolvare?

Ana: Seamănă cu ceea ce obținem când facem distributivitatea înmulțirii față de scădere. Ca atunci când calculăm $485 \cdot (164 - 64)$ și desfacem paranteza.

Reținem

✓ Dacă termenii unei adunări sau scăderi se pot scrie ca produse de doi sau mai mulți factori, dintre care unul se repetă, atunci factorul respectiv se numește *factor comun*. Pentru simplificarea calculelor, putem să *scoatem factor comun*: $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$ și $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, pentru orice numere naturale $a, b, c, b \geq c$.

Probleme rezolvate

- Scoateți factorul comun și rezolvați exercițiile:

a) $125 \cdot 428 - 125 \cdot 378 = 125 \cdot (428 - 378) = 125 \cdot 50 = 6250$, am scos 125 factor comun.

b) $75 \cdot 47 + 53 \cdot 75 = 75 \cdot (47 + 53) = 75 \cdot 100 = 7500$, am scos 75 factor comun.

c) $625 + 125 \cdot 36 = 125 \cdot 5 + 125 \cdot 36 = 125 \cdot (5 + 36) = 125 \cdot 41 = 5125$ (am descompus mai întâi numărul $625 = 125 \cdot 5$). Putem face și astfel: $625 + 125 \cdot 36 = 125 \cdot (625:125 + 36) = 125 \cdot (5 + 36) = 125 \cdot 41 = 5125$.

- Identificați factorul comun și realizați scoaterea acestuia: a) $8 \cdot a + 8 \cdot b$; b) $16x + 24y - 8z$.

Rezolvare. a) $8 \cdot a + 8 \cdot b = 8(a + b)$. Între 8 și paranteză este înmulțire, chiar dacă nu mai este scris semnul „ · ”

b) $16x + 24y - 8z = 8(16x:8 + 24y:8 - 8z:8) = 8(2x + 3y - z)$; observăm că 16, 24 și 8 se împart exact la 8.

- Calculați $15a + 45b - 30c$, știind că $a = 12$ și $3b - 2c = 18$.

Rezolvare. $15a + 45b - 30c = 15(a + 3b - 2c) = 15(12 + 18) = 15 \cdot 30 = 450$.

- Arătați că numărul $\overline{ab} + \overline{ba}$ se împarte exact la 11.

Rezolvare. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$, deci se împarte exact la 11.

- Dacă $x = 4a + 3b$ și $y = a + 2b$, unde a și b sunt numere naturale, determinați câtul împărțirii lui $x + y$ la 5.

Rezolvare. $x + y = 4a + 3b + a + 2b = 5a + 5b = 5(a + b)$. Câtul împărțirii lui $x + y$ la 5 este $a + b$.

- $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + \ldots + 300 = 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 100) = 3 \cdot 100 \cdot 101:2 = 15150$.

Probleme propuse

●

1. Calculați, folosind metoda factorului comun:
a) $12 \cdot 102 + 12$; b) $144 \cdot 39 - 75 \cdot 39 + 39 \cdot 31$;
c) $495 + 99 \cdot 3 - 99 \cdot 8$;
d) $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + \ldots + 100$;
e) $3798 \cdot 26 + 3798 \cdot 75 - 3798$;
f) $8124 \cdot 18 - 8124 \cdot 17 - 8124$;
g) $1994 + 1994 \cdot 1995 - 1996 \cdot 1993$;
h) $(2022 \cdot 35 - 35 \cdot 2021) \cdot 84 - 35 \cdot (1964 \cdot 84 - 84 \cdot 1963)$;
i) $(19 \cdot 21 + 21) : (35 + 35 \cdot 11)$.

●●

2. Scoateți factor comun: a) $11a + 44b - 66c$;
b) $250 - 25a$; c) $256a + 144b + 320c$;
d) $136a - 34b + 51c$; e) $a \cdot b + b \cdot c - d \cdot b + 5b$.

3. Dacă $a \cdot b = 40$ și $a \cdot c = 25$, calculați $a(b + c):13$ și $a(b - c):5$.

Indicație. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

4. Dacă $a + b = 31$ și $c = 11$, calculați: a) $a \cdot c + b \cdot c$;
b) $5a + 5b - 3c$; c) $(3a + 3b + 6c + 10):13$.

5. Determinați numărul natural a știind că:
a) $a + 2b + 2c = 59$ și $b + c = 13$;
b) $a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c = 75$ și $b + 2c = 15$.

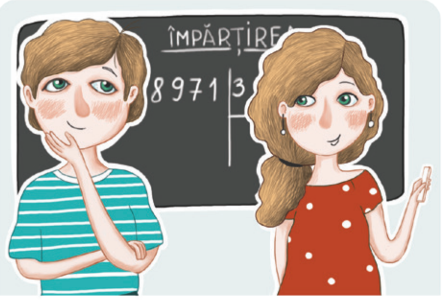
●●●

6. Determinați numerele naturale x, y, z pentru care $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = 2997$.

Indicație. Folosiți descompunerea în sistemul zecimal.

Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Ana: Dar nu toate împărțirile sunt exacte. Să discutăm și despre împărțirea cu rest diferit de 0.



Reținem

✓ Pentru orice două numere naturale a și b, $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale c și r astfel încât:

$$\underset{\text{deîmpărțit}}{a} = \underset{\text{împărțitor}}{b} \cdot \underset{\text{cât}}{c} + \underset{\text{rest}}{r}, \quad r < b.$$

Proprietatea de mai sus este cunoscută sub numele de *teorema împărțirii cu rest*.

Atenție! Cuvântul „rest” utilizat la scădere este diferit de cuvântul „rest” utilizat la împărțire!!!

Probleme rezolvate

● Catinca vrea să-și servească cele trei prietene cu bomboane. Are de ales între cutii cu câte 20, 21, 22 sau 23 de bomboane. Ce cutie alege, astfel încât cele patru fete să mănânce același număr de bomboane și cutia să rămână goală?

Rezolvare. 20:4 = 5, 21:4 = 5 *rest* 1, 22:4 = 5 *rest* 2, 23:4 = 5 *rest* 3. Va alege cutia cu 20 de bomboane.

Observație. 24:4 = 6 și restul este din nou 0. Resturile la împărțirea prin 4 sunt: 0; 1; 2; și 3.

● Determinați câtul și restul împărțirilor: a) 358 la 5; b) 576 la 23; c) 4196 la 103. Faceți proba în fiecare caz.

Rezolvare.

```
358 | 5          576 | 23          4196 | 103
35  | 71         46  | 25          412  | 40
== 8             116               == 76
    5            115                   0
    3            == 1                 76
```

a) Câtul este 71 și restul este 3.
Proba: 5 · 71 + 3 = 355 + 3 = 358.

b) Câtul este 25 și restul este 1.
Proba: 23 · 25 + 1 = 575 + 1 = 576.

c) Câtul este 40 și restul este 76.
Proba: 103 · 40 + 76 =
= 4120 + 76 = 4196.

● Determinați numărul care împărțit la 41 dă câtul 11 și restul 12.

Rezolvare. 41 · 11 + 12 = 451 + 12 = 463.

● Determinați toate numerele care împărțite la 8 dau câtul 10.

Rezolvare. Dacă împărțim la 8, resturile pot fi numere naturale mai mici ca 8, adică r poate avea valorile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 și 7. Obținem numerele cerute din: 8 · 10 + r, adică 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87.

Probleme propuse

●

1. Efectuați următoarele împărțiri și faceți proba:
a) 4058 : 39; b) 6482 : 103; c) 11234 : 97;
d) 24600 : 78; e) 412901 : 216.

2. Determinați numărul natural care împărțit la 41 dă câtul 16 și restul 37.

3. Determinați numerele mai mici ca 50 care împărțite la 14 dau restul 8.

4. Completați tabelul după model, folosind teorema împărțirii cu rest.

Deîmpărțit (d)	Împărțitor (î)	Cât (c)	Rest (r)
159	24	6	15
832	45		
	36	8	35
2473		56	9
4976	69		8

5. Determinați câtul și restul împărțirii:

a) celui mai mic număr natural de trei cifre la 12;

b) celui mai mare număr natural de două cifre diferite la 11;

c) celui mai mic număr natural de trei cifre identice la 25.

●●

6. Determinați numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul egal cu restul.

7. Determinați suma numerelor naturale care împărțite la 14 dau restul egal cu dublul câtului.

8. Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțite la un număr natural de două cifre dau restul 98.

9. Câte numere de trei cifre dau câtul 15 la împărțirea la 12? Determinați suma numerelor găsite.

10. Determinați cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la un număr natural format din două cifre dă restul 75.

●●●

11. Calculați numărul natural x, știind că $[2(2x + 92:23) + 6] : 18 = 5$.

12. Suma a două numere naturale este egală cu 214. Determinați numerele, știind că dacă împățim numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 5 și restul 4.

Indicație. Rezolvăm cu metoda figurativă.

13. Diferența a două numere naturale este egală cu 214. Dacă împărțim numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 7 și restul 4. Determinați numerele.

14. Suma a trei numere naturale este egală cu 232. Dacă împățim al doilea număr la primul obținem câtul 3 și restul 3, iar dacă împățim al treilea număr la primul obținem câtul 5 și restul 4. Determinați numerele.

15. Determinați numerele naturale de trei cifre care împărțite la suma cifrelor sale dau câtul 10 și restul 9.

Să ne jucăm

Propuneți colegilor un pătrat magic de ordinul 3 și un pătrat magic de ordinul 4, pe care aceștia să le rezolve.

Legenda pătratelor magice

Într-o bună zi s-a revărsat un râu, iar oamenii, înfricoșați, au început să aducă ofrande Zeului râului, pentru a-i calma furia. Dar, de fiecare dată când făceau aceasta, apărea o broască țestoasă care încercuia ofrandele, fără să le accepte. În cele din urmă, un băiat a observat marcajele speciale de pe carapacea ei (un pătrat magic de ordinul 3) și le-a interpretat. El le-a spus oamenilor că trebuie adusă o anumită cantitate (15) și astfel Zeul va fi mulțumit. Acest lucru s-a și întâmplat, iar râul a fost readus în matcă.

• ***Pătratul magic de ordinul 3*** se obține completând pătrățelele careului alăturat, de regulă, cu cifre naturale distincte, astfel încât, suma numerelor de pe orice rând, coloană sau diagonală să fie aceeași. Acest număr se numește constanta magică. *Pătratul magic normal de ordinul 3* se obține completând pătrățelele careului alăturat cu toate numerele de la 1 la 9.

• În mod analog, ***pătratul magic de ordinul 4*** se obține completând pătrățelele careului alăturat, de regulă, cu numere naturale distincte, astfel încât suma numerelor de pe orice rând, coloană sau diagonală să fie aceeași. *Pătratul magic normal de ordinul 4* se obține completând pătrățelele careului alăturat cu toate numerele de la 1 la 16.

Probleme recapitulative

La exercițiile 1-4 alegeți răspunsul corect.

1. Numărul cu 42 mai mare decât 2352 este:

a) $2352:42 = 56$; b) $2352 \cdot 42 = 98784$;

c) $2352 - 42 = 2310$; d) $2352 + 42 = 2394$.

2. Numărul cu 6 mai mic decât 216 este:

a) $216 + 6 = 222$; b) $216 - 6 = 210$;

c) $216 \cdot 6 = 1296$; d) $216:6 = 36$.

3. Numărul de 8 ori mai mare decât 512 este:

a) $512 + 8 = 520$; b) $512 - 8 = 504$;

c) $512 \cdot 8 = 4096$; d) $512:8 = 64$.

4. Numărul de 8 ori mai mic decât 512 este:

a) $512 + 8 = 520$; b) $512 - 8 = 504$;

c) $512 \cdot 8 = 4096$; d) $512:8 = 64$.

5. Completați tabelul, după model:

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a:b$
72	12	84	60	864	6
	15				5
	6			360	
144					6
1536			1408		

6. Calculați:

a) $482 : 15$; b) $7139 : 56$;

c) $91025 : 125$; d) $41263 : 512$.

Faceți proba fiecărei operații.

7. Care sunt resturile împărțirii unui număr la 7? Determinați suma resturilor împărțirii numerelor cuprinse între 72 și 90 la 7.

8. Determinați toate numerele naturale de două cifre care împărțite la un număr natural format dintr-o singură cifră dau restul 8.

9. Rezolvați: a) $(435 + 120 - 75):15 + 3$;

b) $(37 \cdot 12 - 27 \cdot 12) : (45:9 + 54:18)$;

c) $58 \cdot 432 + 58 \cdot 68 - 500 \cdot 48$;

d) $72 \cdot 27 + 27 \cdot 28 - (39 \cdot 93 - 39 \cdot 39) : 54$;

e) $(333 + 111 + 666):111 \cdot 2022$.

10. Dacă $a = 15$, $b + c = 21$ și $b - c = 5$, calculați $2a + b + c$, $4a + 2b - 2c$, $ab + ac$ și $2ab - 2ac$.

11. Dacă cifrele unui număr natural de trei cifre sunt consecutive, numărul se împarte exact la 3?

12. Suma tuturor numerelor naturale formate cu trei cifre diferite între ele se împarte exact la suma celor trei cifre?

Să ne jucăm

Problemele lui Ahmes

1. Pe când mergeam la St. Ives,
M-am întâlnit cu un bărbat cu 7 soții.
Fiecare soție avea 7 saci,
Fiecare sac avea 7 pisici,
Fiecare pisică avea 7 pui,
Pui, pisici, saci și neveste,
Câți merg la St. Ives?

2. În 7 case sunt câte 7 pisici. Fiecare pisică mănâncă 7 șoareci. Dacă ar fi trăit, fiecare șoarece ar fi mâncat 7 saci de grâu. Din fiecare sac de grâu s-ar fi măcinat 7 kg de făină. Câte kilograme de făină au fost salvate de pisici?

Curiozități

Suma lui Gauss

Să calculăm următoarea sumă: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Scriem suma în două forme:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$
$$\underline{S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1}$$
$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 = 101 \cdot 100 \Rightarrow S = 5050$$

Test de autoevaluare

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

1. Calculați: a) $425 + 306$; b) $609 - 587$; c) $501 \cdot 29$; d) $3913:43$. *20 puncte*

2. Calculați câtul și restul împărțirii numărului 7133 la 73 și faceți proba operației. *20 puncte*

3. Calculați:
a) $36 \cdot 12 + 510 : 17 - 216:36 \cdot 5$; b) $(12 \cdot 15 + 18 \cdot 20 - 24 \cdot 13) : 6$ *20 puncte*

4. Suma a trei numere este 145. Determinați numerele, știind că primul este de trei ori mai mic decât al doilea și că, dacă împărțim al treilea număr la al doilea, obținem câtul 2 și restul 5. *10 puncte*

5. Maria merge la cumpărături și are la dispoziție 150 lei. Ea cumpără 7 caiete, 2 stilouri, 3 cărți și o ciocolată. Prețul unui caiet este de 3 lei, al unui stilou este de 5 ori mai mare decât al unui caiet, al unei cărți este cu 8 lei mai mare decât al unui stilou, iar o ciocolată costă de 3 ori mai puțin decât un stilou. Ce sumă de bani îi rămâne Mariei? *10 puncte*

6. Determinați numărul natural x, știind că $45 : [129:3 - 3(11 + 3 \cdot x) + 4] = 9$. *10 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Calculați suma, diferența, câtul și produsul numerelor:
125 și 5; b) 672 și 12; c) 335 și 67; d) 2004 și 12; e) 444150 și 225; f) 138125 și 625.

2. Determinați deîmpărțitul, știind că împărțitorul este 22, câtul este 23, iar restul este 21.

3. Determinați toate numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 5.

4. Determinați toate numerele naturale care împărțite la...

a) 11 dau restul egal cu câtul;
b) 7 dau restul egal cu dublul câtului;
c) 9 dau restul de două ori mai mic decât câtul;
d) 13 dau restul mai mare cu 2 decât câtul;
e) 8 dau restul mai mic cu 2 decât câtul.

5. La împărțirea a două numere naturale se obține câtul 21 și restul 3. Care sunt numerele, dacă suma lor este 465 ?

6. Diferența a două numere naturale este 222. Prin împărțirea primului număr la al doilea se obține câtul 3 și restul 2. Determinați cele două numere.

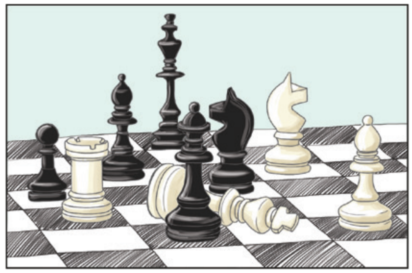
7. Calculați suma resturilor obținute prin împărțirea la 7 a numerelor naturale cuprinse între 14 și 22.

8. Calculați numărul $a = 6432:6:4 - 3496:4:23 + 408 \cdot 2:3$. Determinați restul împărțirii numărului a la cel mai mic număr de forma $\overline{x3y}$ cu suma cifrelor 5, cifrele fiind distincte.

9. Dacă $a + b = 21$ și $b + c = 31$, calculați:
a) $2a + 3b + c$; b) numărul x pentru care $ax + bx = 6300$.

10. Calculați:
a) $[42 - 8:(240:6 - 216:6)] : 4$; b) a pentru care $9[9(a:9 - 222) + 1] + 1 = 10$.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural



Ana: Andrei, ai auzit de *Legenda Tablei de șah*?

Demult, în Persia, trăia un șah foarte bogat. Însă toate bogățiile lui nu reușeau să-i alunge plictiseala. Într-o zi, un brahman pe nume Sissa a adus la palat un joc cu piese de lemn. Șahul nu se mai dezlipea de el. De aceea i s-a spus jocul de șah. „Spune-mi, ce bogății voiești pentru acest dar minunat?” l-a întrebat șahul pe Sissa, dorind să-l răsplătească. „Nu-ți cer decât atât: pentru primul pătrat al tablei de șah – un bob de grâu, pentru al doilea pătrat – două boabe, pentru al treilea pătrat – patru boabe; și așa mai departe, pentru fiecare pătrat dublul numărului de boabe corespunzător pătratului anterior”, a răspuns brahmanul.

Câte boabe de grâu vor fi în ultimul pătrat?

Andrei: Pare destul de complicat de aflat. În primul pătrat va fi 1 bob de grâu, în al doilea vor fi 2 boabe, în al treilea $2 \cdot 2$ boabe, în al patrulea $2 \cdot 2 \cdot 2$ boabe... Va fi din ce în ce mai complicat de scris numărul de boabe din fiecare pătrat și, la un moment dat, va fi și greu de calculat.

Reținem

✓ Produsul $2 \cdot 2$ se scrie 2^2 și se citește „doi la puterea a doua” sau, pe scurt, „doi la a doua”.
Produsul $2 \cdot 2 \cdot 2$ se scrie 2^3 și se citește „doi la puterea a treia” sau, pe scurt, „doi la a treia”.
Produsul $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ se scrie 2^4 și se citește „doi la puterea a patra” sau, pe scurt, „doi la a patra”.

✓ Dacă a și n sunt numere naturale, iar $n \neq 0$, $n \neq 1$, atunci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$. În această scriere, a se numește *bază*, iar n se numește *exponent*.

✓ A ridica un număr natural a la o putere n exprimată printr-un număr natural înseamnă a înmulți numărul a cu el însuși de n ori, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

✓ Prin convenție, $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

✓ 0^0 nu se poate calcula, de aceea spunem că *nu are sens*.

Andrei: Acum e mult mai simplu de scris. Vom avea: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{63}$ boabe în fiecare dintre cele 64 de pătrate. Dar tot e greu de calculat.

Probleme rezolvate

- $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$; $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;
- $2^5 = 16 \cdot 2 = 32$; $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$; $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$;
- $2022^0 = 1$; $1^{25} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{25 \text{ de factori}} = 1$.
- Urmăriți calculele:

$4^2 + 7^0 = 16 + 1 = 17$; $6^3 - 12^2 + 23^0 = 216 - 144 + 1 = 73$;
$202^0 + 9^2 = 1 + 81 = 82$.

Atenție! Mai întâi se face ridicarea la putere și apoi adunările/scăderile!

- Scrierea unui produs ca o putere cu exponent natural:

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$; $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 = 14^6$;
$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^{10}$; $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^5$;
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9$.

Atenție! Numărul de factori este exponentul puterii, baza fiind factorul!

Calcul oral: $3^1, 3^2, 5^0, 8^2, 9^2, 11^2, 6^2, 7^2, 10^4, 5^2, 4^3, 2^6, 3^3, 1^{105}, 0^{510}$.

Activitate în perechi

Formați perechi și calculați primele 5 puteri ale lui 10, apoi comparați rezultatele cu cele ale colegului de echipă. Trageți concluzii despre ridicarea la putere a numărului 10.

Formați perechi și completați fiecare câte un tabel dintre cele de mai jos. Verificați apoi rezultatele colegului de echipă.

n	0	2	4	6	8
n^2					

n	1	3	5	7	9
n^2					

Reținem

✓ Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și *pătratul* acelui număr.

De exemplu: 5^2 este pătratul lui 5 și se citește „5 la puterea a doua” sau „5 la pătrat”; 19^2 este pătratul lui 19 și se citește „19 la puterea a doua” sau „19 la pătrat”.

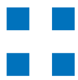
✓ Se numește *pătrat perfect* un număr natural care este pătratul altui număr natural.

✓ Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9. Un număr natural care are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 nu poate fi pătrat perfect. Dar, dacă un număr natural are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, acesta nu este neapărat pătrat perfect!

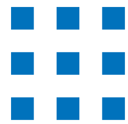
De exemplu: 4 și 64 sunt pătrate perfecte, dar 14, 24, 34, 44, 54 nu sunt pătrate perfecte.

✓ Un număr nu este pătrat perfect dacă se poate încadra între pătratele a două numere naturale consecutive.

$2^2 = 4$ este pătrat perfect, adică este pătratul lui 2:



$3^2 = 9$ este pătrat perfect, adică este pătratul lui 3:



Probleme rezolvate

● Calculați pătratele numerelor: 15, 25, 35 și 45. Numerele 102, 110, 307, 626 sunt pătrate perfecte?

Rezolvare. $15^2 = 225$; $25^2 = 625$; $35^2 = 1225$; $45^2 = 2025$. Numerele 102 și 307 au ultima cifră 2 respectiv 7, deci nu sunt pătrate perfecte.

Numărul 110 are ultima cifră 0, așadar nu ne putem pronunța dacă este sau nu pătrat perfect. Dar $110 > 100$, 100 este pătratul lui 10, calculăm $11^2 = 121$ și obținem că $100 < 110 < 121$, adică $10^2 < 110 < 11^2$. Așadar 110 nu este pătrat perfect pentru că a fost încadrat între pătratele numerelor consecutive 10 și 11.

Am văzut că $25^2 = 625 < 626$ și calculăm $26^2 = 676$. Finalizați voi rezolvarea!

● Arătați că numerele $10n + 2$, $10n + 7$ și $10n + 8$, unde n este număr natural nenul, nu sunt pătrate perfecte.

Rezolvare. Produsul $10n$ are ultima cifră 0, deci numerele $10n + 2$, $10n + 7$ și $10n + 8$ au ultima cifră egală cu 2 sau 7 sau 8 și nu pot fi pătrate perfecte.

Probleme propuse

●

1. Completați tabelul următor după model:

Puterea	8^{22}	0^{252}				5^{122}
Baza	8		56	0	1	
Exponentul	22		13	145	43	

2. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

În scrierea 6^{12} baza este 6.	A	F
$2^3 = 6$.	A	F
$1^{2022} = 2022$.	A	F
$0^{44} = 0$.	A	F
$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$.	A	F
100 este pătrat perfect.	A	F

3. Asociați cifra din coloana **A** cu litera corespunzătoare din coloana **B**, astfel încât să obținem propoziții adevărate:

A	B
1. În scrierea 123^9 exponentul este ...	a) 27
2. Rezultatul calculului $4^0 + 6^2 - 2^5$ este ...	b) 9
3. Calculând 3^3 obținem ...	c) 8
4. Scris ca o putere, numărul 25 este ...	d) 5^2
	e) 5

4. Scrieți următoarele numere ca puteri:

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;

c) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$;

d) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$;

e) $301 \cdot 301 \cdot 301 \cdot 301 \cdot 301 \cdot 301 \cdot 301 \cdot 301 \cdot 301$.

5. Scrieți ca înmulțire repetată:
a) 4^5; b) 3^7; c) 0^{13}; d) 21^6; e) 13^4.

6. Calculați: a) 19^2; b) 7^3; c) 3^5; d) 4^4; e) 21^2; f) 1^{249}; g) 0^{1029}; h) 1562^0; i) 6^3.

7. Calculați pătratele numerelor de la 10 la 25.

Portofoliu

Completați **Portofoliul personal** cu pătratele perfecte calculate de voi.

●●

8. Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 40 și 200.

9. Calculați: a) $7^2 + 2^2$; b) $4^2 - 3^2 + 1^{105}$;
c) $5 + 5^2 + 5^3$; d) $6^2 + 4^3 - 5^2 - 8^2 + 19^0 - 0^{652}$;
e) $(5^2 - 2^5 : 2) : 3 - 1^{2005}$; f) $(677^{766} + 233^{322})^0$;
g) $[(14^2 - 13^2) : 27 - 2^0] \cdot 2 + 2004^0$;
h) $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2$; i) $2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 6$;
j) $1 + 2^2 \cdot (3^2 : 9 - 1) : 8 + 2008^0$;
k) $[2^2 \cdot (0^3 + 3^0 + 5^1 + 1^5) - 3] : 5^2$;
l) $10^2 \cdot [4 + 5 \cdot 3^2 - 2^5 + 4^3 \cdot (49 - 3^2) : 2^3]$.

10. Determinați numărul natural x care verifică egalitatea: $2 \cdot [15^2 - 3^2 \cdot (x-6)] + 2^4 \cdot 3^2 = 324$.

●●●

11. Scrieți ca sumă de puteri cu baze diferite numerele: a) 13; b) 14; c) 25; d) 100; e) 169.

12. Scrieți următoarele numere ca pătrate perfecte:
a) 16; 81; 144; 256; 324; 400; 2500;
b) $a = 3^2 + 4^2$; $b = 6^2 + 8^2$; $c = 9^2 + 12^2$; $d = 12^2 + 16^2$.
Indicație. b) Faceți întâi calculele și apoi găsiți pătratul perfect $d = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$.
Atenție! $3^2 + 4^2 \neq (3 + 4)^2$.

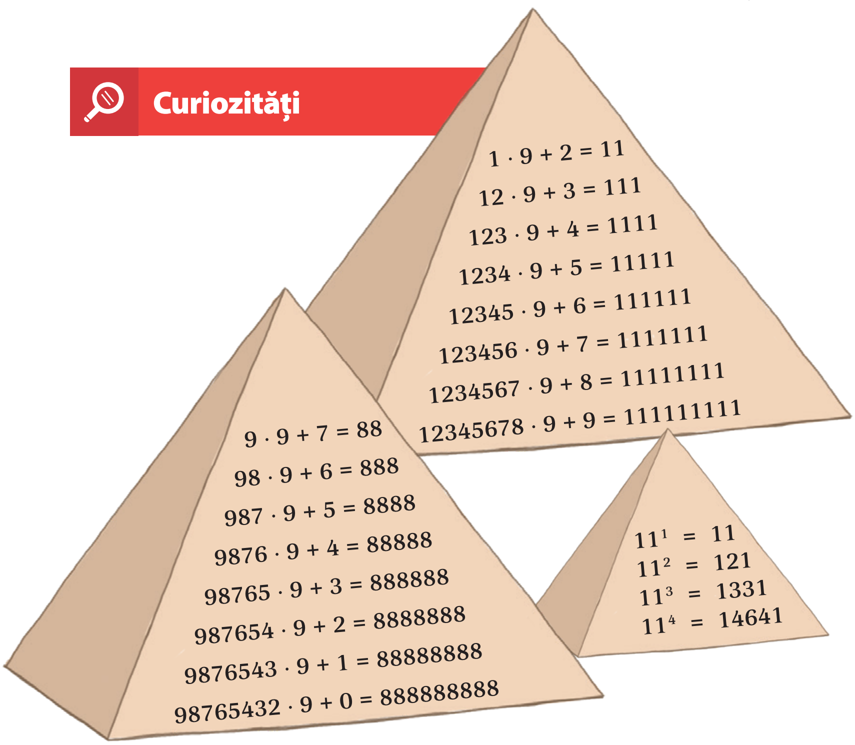
13. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:
a) $5^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 9 + 5^2 \cdot 10$; b) $7^3 + 7^3 \cdot 2 + 7^3 \cdot 2^2$;
c) $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$; d) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$;
e) $8 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$.
Indicație. La a) și b) scoateți factor comun.

14. Câte numere naturale pătrate perfecte sunt cuprinse între:
a) 3^2 și 15^2; b) 10^2 și 100^2; c) 6^2 și 19^2;
d) 8^2 și 30^2; e) 12^2 și 13^2?
Indicație. a) Între 3^2 și 15^2 sunt următoarele pătrate perfecte: $4^2, 5^2, 6^2, ..., 14^2$.

15. Determinați numărul natural n pentru care:
a) $n^2 = 36$; b) $n^2 = 361$; c) $n^3 = 64$;
d) $n^3 = 125$; e) $n^2 + 6^2 = 10^2$;
f) $n^2 + 12^2 = 13^2$; g) $n^2 + 12^2 = 20^2$.

16. Arătați că nu există numere naturale n pentru care numerele $a = 5n + 3$, $b = 5n + 7$, $c = 5n + 8$ și $d = 5n + 12$ să fie pătrate perfecte.

Curiozități



Investigație

În *Legenda Tablei de șah*, în cele 64 de pătrate vor fi: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{63} boabe de grâu.
Notăm $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{63}$. Înmulțim suma cu 2 (baza puterilor) și obținem
$2 \cdot S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + ... + 2^{63} + 2^{64}$.
Scădem cele două relații:
$$\begin{array}{l} 2 \cdot S = 2^{64} + 2^{63} + ... + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 \\ \underline{\quad S = \quad\quad\;\; 2^{63} + ... + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1} \\ \quad S = 2^{64} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - 1 \end{array}$$
Așadar, în total sunt $2^{64} - 1$ boabe de grâu.

Reguli de calcul cu puteri

A. Reguli de calcul cu puteri cu aceeași bază

Andrei: Am înțeles că pentru a calcula o sumă în care unii termeni sunt puteri ale unor numere naturale trebuie să facem calculele, adică trebuie să ridicăm la putere și apoi să adunăm. Dar dacă vrem să înmulțim două puteri cu aceeași bază?

Ana: De exemplu: $7^3 \cdot 7^4 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^7$. Cred că putem rezolva așa. Ar fi prea mult de înmulțit și e mai ușor să scriem ca putere rezultatul.

Andrei: Și dacă vrem să împărțim: $6^7 : 6^5 = (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) : (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 = 6^2$.

Ana: Iar dacă vrem să calculăm $(5^7)^2$ considerăm puterea a doua a numărului 5^7, adică $(5^7)^2 = 5^7 \cdot 5^7 = 5^{14} = 5^{7 \cdot 2}$.

Reținem

Pentru a înmulți puteri care au aceeași bază, la rezultat copiem baza și adunăm exponenții.

✓ **Înmulțirea puterilor care au aceeași bază**

Oricare ar fi numerele naturale nenule a, m și n are loc relația: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Exemple:

$5^7 \cdot 5^9 = 5^{7+9} = 5^{16}$;	$3^{11} \cdot 3^{12} \cdot 3^8 = 3^{11+12+8} = 3^{31}$; *nu contează dacă sunt mai mulți factori, important este să avem aceeași bază;*	$10^5 \cdot 10^9 \cdot 10 = 10^{5+9+1} = 10^{15}$; *dacă un factor nu are exponent, considerăm exponentul egal cu 1;*
$3^6 \cdot 9 = 3^6 \cdot 3^2 = 3^8$; *l-am scris pe 9 ca o putere a lui 3;*	$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{10} = 2^{1+2+3+\ldots+10} = 2^{10 \cdot 11 : 2} = 2^{55}$.	

✓ **Împărțirea puterilor care au aceeași bază**

Pentru a împărți două puteri care au aceeași bază, la rezultat copiem baza și scădem exponenții.

Oricare ar fi numerele naturale nenule a, m și n, $m > n$, are loc relația:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Exemple:

$5^{17} : 5^9 = 5^{17-9} = 5^8$; $3^{21} : 3^{12} : 3^8 = 3^{21-12} : 3^8 = 3^{9-8} = 3$; $10^5 \cdot 10^9 : 10^8 = 10^{5+9-8} = 10^6$; *dacă sunt mai multe operații, ele se fac în ordinea din exercițiu.*

✓ **Puterea unei puteri**

Pentru a ridica o putere la o putere, la rezultat copiem baza și înmulțim exponenții.

Oricare ar fi numerele naturale nenule a, m și n are loc relația: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Exemple:

$(9^9)^6 = 9^{9 \cdot 6} = 9^{54}$; $(6^{11})^{10} = 6^{11 \cdot 10} = 6^{110}$; $(3^0)^{15} = 3^0 = 1$.

Probleme rezolvate

● Scrieți ca putere cu baza 3 numerele 9 și 81^{15}.

Rezolvare. $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$; $81^{15} = (3^4)^{15} = 3^{60}$.

● Numerele 5^{14}, 9^7, 8^7, $2^{2n+3} - 2^{2n+2}$, unde n este număr natural, sunt pătrate perfecte?

Rezolvare. $5^{14} = (5^7)^2$ este pătrat perfect; $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14} = (3^7)^2$ este pătrat perfect; $8^7 = (2^3)^7 = 2^{21} = 2^{20} \cdot 2 = (2^{10})^2 \cdot 2$ este dublul unui pătrat perfect și nu este pătrat perfect; $2^{2n+3} - 2^{2n+2} = 2^{2n+2} \cdot (2 - 1) = 2^{2n+2} = (2^{n+1})^2$ este pătrat perfect.

O putere în care exponentul este un număr par este pătrat perfect!

O putere în care baza este un pătrat perfect este pătrat perfect!

Portofoliu

Realizați o fișă cu puterile numerelor 2, 3, 5, 10 cu exponenți până la 10 și adaugați-o portofoliului vostru. Fișa vă poate fi utilă atunci când este necesar să scrieți unele numere ca puteri ale altor numere. De exemplu, dacă trebuie să calculați $9^3 \cdot 27^2$, folosind fișa observați că cele două baze sunt puteri ale numărului 3 și puteți realiza transformările $9^3 \cdot 27^2 = (3^2)^3 \cdot (3^3)^2 = 3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$.

B. Reguli de calcul cu puteri cu același exponent

Andrei: Am învățat reguli de calcul cu puteri cu aceeași bază. Dar dacă avem baze diferite și același exponent?

Ana: Să încercăm:

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$.

Andrei: Iar dacă vrem să împărțim două puteri cu baze diferite și același exponent:

$12^3 : 3^3 = (12 \cdot 12 \cdot 12):(3 \cdot 3 \cdot 3) = (12:3) \cdot (12:3) \cdot (12:3) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$.

Reținem

✓ **Produsul de puteri cu același exponent**

Oricare ar fi numerele naturale nenule *a*, *b* și *m* are loc relația: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

Exemple: ● $6^8 \cdot 5^8 = (6 \cdot 5)^8 = 30^8$; ● $2^{18} \cdot 5^{18} = (2 \cdot 5)^{18} = 10^{18}$;
● $6^9 \cdot 12^9 = 72^9$; ● $9^{100} \cdot 11^{100} = 99^{100}$; ● $3 \cdot 2^8 \cdot 5^8 = 3 \cdot 10^8 = 300000000$.

Pentru a înmulți două puteri cu același exponent, la rezultat înmulțim bazele și copiem exponentul.

Probleme rezolvate

● Cu câte cifre de 0 se termină numărul $3 \cdot 4^8 \cdot 25^6$?

Rezolvare. Am observat la ultimul exemplu de mai sus că atunci când printre factori sunt puteri ale lui 2 și 5 produsul acestora este o putere a lui 10, iar rezultatul va fi un număr cu atâtea zerouri la sfârșit cât este exponentul lui 10. Așadar $3 \cdot 4^8 \cdot 25^6 = 3 \cdot (2^2)^8 \cdot (5^2)^6 = 3 \cdot 2^{16} \cdot 5^{12} = 3 \cdot 2^4 \cdot (2^{12} \cdot 5^{12}) = 3 \cdot 2^4 \cdot 10^{12}$ și, cum în produs avem 10^{12}, atunci numărul se termină cu 12 zerouri.

✓ **Câtul de puteri cu același exponent**

Oricare ar fi numerele naturale nenule *a*, *b* și *m* , are loc relația: $a^m : b^m = (a:b)^m$.

Exemple: ● $45^8 : 5^8 = (45:5)^8 = 9^8$; ● $12^{18} : 4^{18} = 3^{18}$;
● $63^9 : 21^9 = 3^9$; ● $99^{100} : 11^{100} = 9^{100}$; ● $25^{18} : 5^{18} = (25:5)^{18} = 5^{18}$;
● $3^8 \cdot 65^8 : 15^8 = (3 \cdot 65 : 15)^8 = 13^8$;
● $3 \cdot 65^8 : 5^7 = 3 \cdot 65 \cdot 65^7 : 5^7 = 195 \cdot (65:5)^7 = 195 \cdot 13^7$.

Pentru a împărți două puteri cu același exponent, la rezultat împărțim bazele și copiem exponentul.

Probleme propuse

●

1. Scrieți rezultatul sub forma unei puteri:
a) $5^{18} \cdot 5^{22}$; b) $6^6 \cdot 6^9$; c) $7^9 \cdot 49$;
d) $17^{72} : 17^{25}$; e) $10^{16} : 10^{16}$; f) $125 : 5^2$;
g) $2^{25} \cdot 2 : 2^{13}$; h) $(21^7)^3$; i) $[(2^2)^3]^4$;
j) $(3^{17} \cdot 3^3)^2 : (3^5 \cdot 3^3)$; k) $21^{56} \cdot 2^{56} : 42^{16}$;
l) $18^{123} : 2^{123} \cdot (3^2 - 1)^{123}$; m) $(14^4)^4 : 2^{2^4} \cdot (3+1)^{16}$;
n) $(2^4)^4 : 2^{2^4} \cdot (3^2 - 1) - 2005^0 \cdot 2^2$.

2. Calculați:
a) $(5^0 + 5^1 + 5^2)^4 : 31^4 + 31^0$; b) $(16 + 2^{13} : 2^9) : 2^5$;
c) $(7^0 + 7^1 + 7^2)^5 : 57^4 + 57^0$; d) $(4 + 2^{200} : 2^{198}) : 2^3$.

●●

3. Calculați și scrieți rezultatul sub forma unei puteri:
a) $2^7 \cdot 2^9 \cdot 2^{18} \cdot 2^{22} : 2^{16} : 2^{21} : 2^6$; b) $3 \cdot 3^{14} \cdot 3^2 : 3^{17}$;
c) $(2^2)^7 \cdot 2^{10} : (2^4)^6$; d) $[(2^3)^4]^5 : 2^{50}$;
e) $(3^4)^{20} : (3^2)^{10} : 3^{50}$; f) $4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{50}$.

4. Calculați:
a) $(3^7)^6 \cdot 3^2 : 3^{41} - 5^2$; b) $(2^7)^8 \cdot 2^2 : 2^{50} - 4^2$;
c) $(5^7)^5 \cdot 5^3 : 5^{35} - 5^3$; d) $(9 + 3^{100} : 3^{98} + 3^{45} : 3^{43}) : 3^3$;
e) $144^3 : 12^5 - 12^5 : (2^2 \cdot 3)^4 + 3 \cdot 3^2 : 3^3$.

●●●

5. Calculați: a) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{50}) : (2^{17})^{75}$;
b) $(9^2 \cdot 9^4 \cdot 9^6 \cdot \ldots \cdot 9^{80}) : (3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{50})$;
c) $(5^1 \cdot 5^3 \cdot 5^5 \cdot \ldots \cdot 5^{99}) : (5^5 \cdot 5^{10} \cdot 5^{15} \cdot \ldots \cdot 5^{150})$.

6. Calculați: a) $3^6 \cdot 27^{20} : 9^{33}$; b) $10^{40} : 100^{20}$;
c) $2^5 \cdot 4^{13} \cdot 8^{50}$; d) $27^{86} : 9^{40}$; e) $125^{14} \cdot 5^7 : 5^5$.

7. Calculați, folosind metoda factorului comun:
a) $5^{2n+3} - 4 \cdot 25^n + 5^{2n}$; b) $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$;
c) $2^{40} - 2^{39} - 2^{38}$; d) $(3^{75} - 3^{74} - 3^{73}) : 5$;
e) $(36^{14} + 6^{27} + 5 \cdot 6^{26}) : 6^{25}$.

Indicație. Scoatem factor comun puterea cu baza comună la exponentul cel mai mic.

Compararea puterilor

Ana: Andrei, hai să încercăm să comparăm puteri. Eu zic că $5^8 > 5^7$ pentru că $5^8 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ are mai mulți factori de 5 decât $5^7 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Andrei: Dacă mă gândesc la două puteri cu același exponent, de exemplu 11^5 și 9^5, eu zic că $11^5 > 9^5$ pentru că, dacă înmulțesc 11 de cinci ori, obțin mai mult decât dacă înmulțesc 9 de cinci ori. Dar ce fac dacă trebuie să compar 2^{24} cu 3^{16}? La primul număr baza este mai mică și exponentul mai mare și la al doilea este invers.

Reținem

✓ Dintre două puteri cu aceeași bază, diferită de 0 și de 1, este mai mare cea cu exponentul mai mare.

✓ Dintre două puteri cu același exponent, nenul, este mai mare cea cu baza mai mare.

✓ Pentru a compara două puteri cu baze și exponenți diferiți, vom aduce puterile sau la aceeași bază sau la același exponent.

Exemple: • $6^{24} < 6^{42}$ (puterile au aceeași bază și $24 < 42$); • $5^{12} < 5^{13}$; • $9^{15} > 7^{15}$ (puterile au același exponent și $9 > 7$); • $101^{57} < 108^{57}$; • $27^{15} > 9^{21}$ (pentru că $27^{15} = (3^3)^{15} = 3^{45}$ și $9^{21} = (3^2)^{21} = 3^{42}$); • $16^{31} > 8^{41}$ (aduceți puterile la baza 2 și verificați); • $5^{33} < 2^{77}$ (pentru că $5^{33} = 5^{3 \cdot 11} = (5^3)^{11} = 125^{11}$ și $2^{77} = 2^{7 \cdot 11} = (2^7)^{11} = 128^{11}$); • $4^{25} > 3^{20}$ (prima putere are și baza mai mare și exponentul mai mare); • $2^{24} > 43^0$ (pentru că $43^0 = 1$); • $1^{124} < 124^1$ (pentru că $1^{124} = 1$ și $124^1 = 124$).

Atenție! Dacă o putere are și baza și exponentul mai mare este mai mare.

Probleme rezolvate

• Ordonați crescător: a) $2^5, 2^7, 2^0, 2^9, 2^4$; b) $3^5, 9^6, 27^3, 9^4, 81^2$.

Rezolvare: a) Ordonăm după exponenți: $2^0, 2^4, 2^5, 2^7, 2^9$; b) Transformăm toate puterile în puteri cu baza 3: $9^6 = (3^2)^6 = 3^{12}$; $27^3 = (3^3)^3 = 3^9$; $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$; $81^2 = (3^4)^2 = 3^8$. Ordinea crescătoare este: 3^5, $9^4 = 81^2, 27^3, 9^6$.

Probleme propuse

●

1. Comparați:
2^{45} cu 2^{48}; 8^{57} cu 9^{57}; 6^{31} cu 5^{31}; 4^3 cu 3^4; 5^2 cu 2^5; 4^1 cu 1^{42}; 101^1 cu 9^2; 0^{31} cu 31^0; 4^3 cu 2^6; 203^4 cu 211^5; 8^{13} cu 16^9; 2^{31} cu 16^7; 9^{10} cu 3^{19}; 3^{129} cu 81^{31}; 36^{11}cu 6^{21}; 5^{24} cu 25^{12}; 2^{35} cu 5^{14}; 4^{15} cu 7^{10}; 20^{30} cu 30^{20}; 9^{74} cu 2^{111}; 8^{123} cu 10^{41}.

2. Ordonați crescător puterile:
a) $5^{18}, 5^6, 5^0, 5^{11}, 5^{25}$; b) $7^2, 3^2, 15^2, 8^2, 5^2, 12^2$;
c) $2010^0, 2010^1, 3^3, 2^3, 4^4, 11^1$.

●●

3. Comparați puterile: a) $16 \cdot 4^7$ cu 2^{19};
b) $2^3 \cdot 5^6$ cu $2^4 \cdot 5^5$; c) $(2 \cdot 3^2)^2$ cu $2^3 \cdot 3^5$;
d) $8 \cdot 9 \cdot 3^2$ cu $2^3 \cdot 3^5$; e) $27 \cdot 4^3$ cu $3^4 \cdot 2^5$;
f) 4^{29} cu $7^{18} \cdot 16$; g) $5^{34} \cdot 9$ cu 3^{53}.

4. Comparați numerele:
a) $x = 2^{39} + 2^{41}$ și $y = 2^{40} + 2^{40}$;
b) $a = 3^{41} \cdot 11^{42}$ și $b = 27^{13} \cdot 121^{21}$.
Indicație. $2^{39} + 2^{41} = 2^{39} + 2^{39} \cdot 2^2 = 2^{39} \cdot (1 + 2^2) = 2^{39} \cdot 5$.

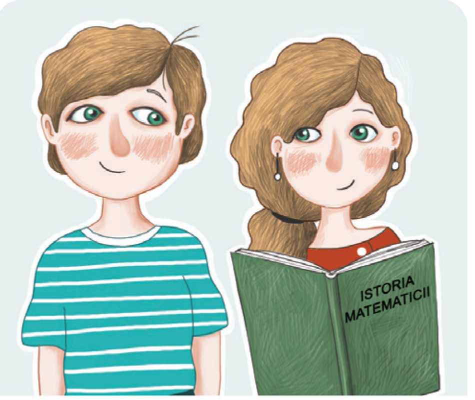
5. Determinați jumătatea celui mai mic și sfertul celui mai mare dintre numerele $8^{38}, 4^{48}, 16^{28}$.

●●●

6. Ordonați descrescător numerele:
a) $2^{41}, 4^{21}, 16^{11}$; b) $9^{12}, 3^{19}, 27^8$;
c) $5^{11}, 25^6, 4^{10}$; d) $7^{20}, 4^{30}, 3^{40}$;
e) $5^{22}, 2^{55}, 3^{33}$; f) $71^{31}, 4^{93}, 7^{62}$;
g) $20^{40}, 40^{20}, 30^{30}$; h) $3^{404}, 2^{707}, 5^{303}$.

7. Calculați și apoi comparați:
a) $2^{512} - 2^{510}$ cu 3^{341}; b) $3^{35} - 9^{17}$ cu 2^{52};
c) $4^{19} - 2^{36}$ cu 3^{28}; d) $3^{33} - 3^{32} - 3^{30}$ cu $2^{54} + 2^{50}$;
e) $2^{487} - 2^{486} - 2^{485}$ cu 6^{194};
f) 4^{103} cu $(5^{200} - 4 \cdot 5^{199} + 9^{54} : 3^{107} - 5^{199})^{206}$;
g) $9^3 + 36^4 + 25^5 + 15^3 \cdot 2^3$ cu $5^{10} + 30^3 + (6^4)^2 + (3^2)^3$;
h) $3^{2n+1} - 9^n$ cu $2^{3n+1} - 8^n$;
i) $2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 9 \cdot 2^n$ cu $2^{n+1} \cdot 5^n - 10^n$;
j) $8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$ cu $7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$.
Indicație. Folosiți metoda scoaterii factorului comun exemplificată în indicația de la exercițiul **4**.

Scrierea numerelor naturale în baza 10. Scrierea numerelor naturale în baza 2



Andrei: Ana, noi știm să scriem descompunerea numerelor în sistemul zecimal. De exemplu, $458 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8$.

Ana: Desigur, dar acum, după ce am mai învățat și puterile, putem scrie: $458 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8$, iar $12486 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 6$. Aceasta este scrierea în baza 10. Dar ce știi despre scrierea în baza 2?

Andrei: Sistemul de numerație binar a început să fie folosit încă din cele mai vechi timpuri, odată cu apariția logicii: odată definite noțiunile de „propoziție adevărată” și „propoziție falsă”. Prima descriere cunoscută a unui sistem de numerație binar a fost scrisă cândva între secolele VIII și IV î.H. de către matematicianul indian Pingala. În secolul al XVII-lea, matematicianul german Gottfried Leibniz a descris în articolul său, *Explication de l'Arithmétique Binaire*, sistemul binar în întregime, folosindu-se chiar de simbolurile moderne 0 și 1.

Folosirea sistemului binar s-a răspândit însă cel mai mult abia recent, odată cu apariția sistemelor informatice, începând de la cele mai rudimentare și până la cele curente. În sistemul (de numerație) binar există doar două cifre posibile, 0 și 1. Conform definiției lui Claude Shannon, o cifră binară conține cantitatea de informație de 1 bit. Dacă ești interesat, caută pe internet și citește mai mult despre acest subiect.

Reținem

Sistemul de numerație zecimal (în baza 10)

✓ Folosește 10 cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

✓ Un număr de două cifre în baza 10 se scrie astfel:
$$\overline{ab}_{(10)} = a \cdot 10 + b.$$
Un număr de trei cifre în baza 10 se scrie
$$\overline{abc}_{(10)} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c.$$
Un număr de patru cifre în baza 10 se scrie
$$\overline{abcd}_{(10)} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d.$$

✓ Numărul $100_{(10)}$ se citește „o sută”.

Sistemul de numerație binar (în baza 2)

✓ Folosește 2 cifre: 0, 1.

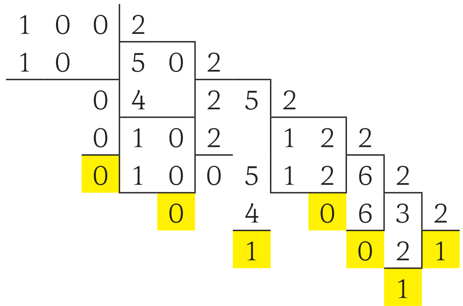
✓ Un număr de două cifre în baza 2 se scrie astfel:
$$\overline{ab}_{(2)} = a \cdot 2 + b.$$
Un număr de trei cifre în baza 2 se scrie
$$\overline{abc}_{(2)} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c.$$
Un număr de patru cifre în baza 2 se scrie
$$\overline{abcd}_{(2)} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d.$$

✓ Numărul $100_{(2)}$ se citește „unu-zero-zero” sau „unu-zero-zero în baza 2”.

Numărarea în sistemul binar este asemănătoare cu cea din sistemul zecimal. Diferența constă în faptul că în sistemul binar folosim doar cifrele 0 și 1. În tabel este prezentată corespondența numerelor de la 0 la 10 din sistemul zecimal cu cele din sistemul binar.

Sistemul zecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sistemul binar	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

✓ Transformarea unui număr din baza 10 în baza 2 se face prin împărțiri succesive. La fiecare împărțire se pune în evidență restul. Numărul în baza 2 se citește începând cu ultimul cât și apoi resturile obținute de la dreapta spre stânga.



Numărul este $100_{(10)} = 1100100_{(2)}$.

✓ Transformarea unui număr din baza 2 în baza 10 se face folosind descompunerea numărului în baza 2:

$$1100100_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 = 100_{(10)}$$

Activitate în perechi

Formați perechi și rezolvați fiecare dintre voi exercițiile de mai jos. Verificați la final rezultatele:

Transformați următoarele numere din baza 10 în baza 2:

$0_{(10)}, 1_{(10)}, 2_{(10)}, 3_{(10)}, 4_{(10)}, 5_{(10)}, 6_{(10)}, 7_{(10)}, 8_{(10)}, 9_{(10)}, 10_{(10)}$

Transformați următoarele numere din baza 2 în baza 10:

$0_{(2)}, 1_{(2)}, 10_{(2)}, 11_{(2)}, 100_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, 111_{(2)}, 1000_{(2)}, 1001_{(2)}, 1010_{(2)}$

Probleme rezolvate

- Transformați numerele 15 și 20 din baza 10 în baza 2.

Rezolvare. $15_{(10)} = 1111_{(2)}$; $20_{(10)} = 10100_{(2)}$.

- Transformați numerele 1011, 1111 și 11111 din baza 2 în baza 10.

Rezolvare. $1011_{(2)} = 11_{(10)}$; $1111_{(2)} = 15_{(10)}$; $11111_{(2)} = 31_{(10)}$.

- Scrieți numărul 56 ca sumă de puteri ale lui 2.

Rezolvare. Scriem numărul 56 în baza 2 astfel: $56_{(10)} = 111000_{(2)} = 2^5 + 2^4 + 2^3$.

- **Curiozitate.** Determinați baza x pentru care $24_{(x)} = 14_{(10)}$.

Rezolvare. Există și alte baze de numerație în afară de 10 și 2. În baza de numerație x se lucrează cu cifrele: 0, 1, 2; ..., $x-1$. Așadar, $24_{(x)} = 14_{(10)} \Leftrightarrow 2 \cdot x + 4 = 14 \Leftrightarrow x = 5$. Este mai mare decât 2 și 4.

Probleme propuse

1. Transformați numerele 25, 44, 70, 125 și 250 din baza 10 în baza 2.

2. Transformați numerele 1101, 1110, 11110 și 11101 din baza 2 în baza 10.

3. Determinați numărul de forma $\overline{7a3}_{(10)}$ care are produsul cifrelor egal cu 84.

4. Determinați numerele de forma $\overline{3ab0}_{(10)}$ care au suma cifrelor egală cu 10.

5. Scrieți numărul 109 ca sumă de puteri ale lui 2.

Să ne jucăm

Atunci când lucrăm cu numere în baza 2, spunem că lucrăm în sistemul (de numeraţie) binar. Acesta este şi cel mai natural mod de stocare a informaţiei în domeniul calculatoarelor. Pentru a putea fi memorat, prelucrat şi transmis tot ceea ce vedem pe ecranul monitorului unui computer sau tot ceea ce auzim – text, imagini, sunete, ... – acestea sunt mai întâi traduse în sistem binar, adică într-un şir foarte lung format din cifrele 0 şi 1. Căutați pe Internet tabelul cu literele alfabetului codate în sistem binar. Folosiți-l pentru a traduce textul: 01001100 01110101 01101101 01100101 01100001 00100000 01100101 01110011 01110100 01100101 00100000 01100011 01101111 01101110 01100100 01110101 01110011 11000100 10000011 00100000 01100100 01100101 00100000 01101110 01110101 01101101 01100101 01110010 01100101 00101110 00100000 00101000 01010000 01101001 01110100 01100001 01100111 01101111 01110010 01100001 00101001

„Lumea este condusă de numere.” (Pitagora)

Ordinea efectuării operațiilor

Reținem

✓ Dacă într-un exercițiu apar adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri și puteri, efectuăm mai întâi calculele cu puteri aplicând regulile învățate, apoi înmulțirile și împărțirile, iar apoi adunările și scăderile, iar în final operațiile se efectuează în ordinea în care se găsesc.

✓ Dacă într-un exercițiu sunt folosite paranteze rotunde, paranteze pătrate și acolade, atunci efectuăm întâi operațiile din parantezele rotunde, după care pe cele din parantezele pătrate, apoi operațiile din acolade, iar la final efectuăm restul operațiilor de la stânga la dreapta.

Probleme rezolvate

- $11 + 8 \cdot 3 = 11 + 24 = 35;$
- $8 + 3 \cdot (17 - 2 \cdot 7) - 2^3 = 8 + 3 \cdot (17 - 14) - 8 = 8 + 3 \cdot 3 - 8 = 8 + 9 - 8 = 9.$
- $\{12 + 2 \cdot [13 - 3^2 \cdot (9 - 2 \cdot 4)]\} : 5 = \{12 + 2 \cdot [13 - 9 \cdot (9 - 8)]\} : 5 = [12 + 2 \cdot (13 - 9 \cdot 1)] : 5 = (12 + 2 \cdot 4) : 5 = (12 + 8) : 5 = 20 : 5 = 4.$

Probleme propuse

●

1. Calculați:

a) $421 + 36 - 99;$ b) $810 - 342 - 111;$
c) $1065 - 276 + 135;$ d) $28 \cdot 30 : 35;$
e) $55:11 \cdot 5 : 25;$ f) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 : 60.$

2. Efectuați:

a) $(5 + 16) \cdot 3;$ b) $32 \cdot 3:8:6;$
c) $3 \cdot 24 - 3 \cdot 12 : 18;$ d) $(3^2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2) : 15;$
e) $10^3 + 10^2 - 4 \cdot 52;$ f) $7^3 - 7^9 : 7^7.$

3. Calculați:

a) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \cdot 5;$
b) $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 - 6^3;$
c) $5 \cdot 6^2 + 7^2 \cdot 8 - 999:9.$

●●

4. Efectuați:

a) $15 + 5 \cdot (23 - 4^2 \cdot 81^0) - 7^2;$
b) $3 \cdot 3^2 \cdot [3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 \cdot (3^5 - 2 \cdot 11^2)];$
c) $2^4 \cdot 5 - 5 \cdot (2^5 - 5^2) + 4^3.$

5. Calculați:

a) $[(2^3)^5 : 2^{12} - 2^0 - 2^2] \cdot 4:12 + 2^5;$
b) $(100^5)^2 : (6^2 + 8^2)^9 - (0^{2015} + 1^{2016} + 2017^0);$
c) $[5^3 \cdot 5 + 5^{32} : 5^{30} + (5^5)^4 : 5^{19} + 555^0] : 164;$
d) $2^{82} : [(6 \cdot 5 - 7 \cdot 2^2)^{79} + 2^{86} : (8 \cdot 2^4) + 2^{3^4 - 1}] \cdot 23.$

●●●

6. Calculați:

a) $\{13 + 3 \cdot [6 + 7 \cdot (730 - 81 \cdot 9)]\} \cdot 2 + 53;$
b) $(4^2 - 13) \cdot \{67 + 5 \cdot [(45 - 21 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 9 + 37) - 183]\} + 7 \cdot 12.$
c) $1 + 11 \cdot \{1 + 11 \cdot [1 + 11 \cdot (11 \cdot 11 - 120)]\} + 11 \cdot 11;$
d) $[103 - 3 \cdot (21 \cdot 11 - 23 \cdot 9)] \cdot \{3 + 5 \cdot [2 + 3 \cdot (5 + 5 \cdot 6)]\};$
e) $3822 - 22 \cdot [15 + 5 \cdot (217 - 199)] + 33 \cdot [258 - 5 \cdot (455 - 438)];$
f) $\{[18 \cdot 8 - 108 + 12 \cdot 8] \cdot 2 - 182\} + [17282 - 28 \cdot (888 - 282)].$

7. Știind că $a = 2^{3^4} : 2^{4^3}$ și $b + c = 2 \cdot [2^3 + 2^2 \cdot (1 + 3 \cdot 1987^0)]$, calculați $(ab + ac) : 2^{21}$.

8. Calculați:

a) $[323 + 3^{12} \cdot 3^5 + 2^{125} : 2^{26}] : [323 + 3^{44} : 3^{27} + (2^9)^{11}];$
b) $(1^{1256} + 2^{10} + 9^6 + 49^4) : (1256^0 + 4^5 + 27^2 + 7^8).$

9. Calculați:

a) $(7 \cdot 7^2 \cdot 7^3 \cdot \ldots \cdot 7^{10} + 6 \cdot 7^{55}) : 7^{56};$
b) $(2 + 4 + 6 + \ldots + 100 - 4 \cdot 5^4) \cdot 100.$

Probleme recapitulative

1. Efectuați:

a) $5 \cdot 7 + 2^3$; b) $8 + 5 \cdot 13$;

c) $75 - 96 : 2$; d) $2^4 + 3^3 - 5^2$;

e) $13 \cdot 5 + 6^2 - 45 : 9$; f) $36 \cdot 5 : (4 \cdot 3^2)$.

2. Calculați:

a) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^7 : 5^9 - 4^2$;

b) $3^2 + 3 \cdot 3^{15} \cdot 9^4 : 27^8$;

c) $3 \cdot 5^2 - 16 \cdot 2^4 \cdot 4 : 8^3$;

d) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 3 - 6^3 \cdot 6$;

e) $13^0 \cdot 5^1 + 6 \cdot 36^4 \cdot 6^5 : 6^{12} - 4^3 \cdot 3^3 : 12^2$;

f) $36^4 \cdot 5 : (2 \cdot 3^2)^4$.

3. Comparați:

a) 8^6 cu 7^5; b) 2^{16} cu 4^5;

c) 10^3 cu 11^2; d) 0^{1016} cu 1^{100};

e) 3^{15} cu 2^{20}; f) 3^{39} cu 4^{26};

g) 26^4 cu 9^6.

4. Calculați:

a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 + (4 \cdot 8 - 5^2) \cdot 3$;

b) $(7 + 3)^3 : 5^2 + 3 \cdot (2 \cdot 6 - 7) : 15$;

c) $1 + (9^3 : 9 + 9) : (2^3 + 7) - 12^2 : 72$;

d) $2 \cdot [3 + 4 \cdot (5 + 6 \cdot 7) + 8^0] - 3$;

e) $(3^2)^5 : 3^8 + 10^2 : (2 \cdot 5^2)$;

f) $3^0 \cdot [3^2 + (15^0 + 1^{15} + 15^1 - 7^2 : 49) : 2^4]$.

5. Calculați:

a) $23 + \{44 + 4 \cdot [3 + 8 \cdot (11 \cdot 12 - 8 \cdot 10) - 59]\} : 7 + 1002$;

b) $(29 \cdot 14 - 29 \cdot 4) + 12 \cdot 11 + 8 \cdot \{125 - 5 \cdot$
$\cdot [340 - 2 \cdot (22 \cdot 19 - 23 \cdot 11)]\}$;

c) $[(2^5)^7 + 2^{35} : 2^{34}] : [2^0 + 2^{35} : 2^{35} + 4^{25} : (16^4 : 2)]$;

d) $[2 \cdot 2^3 \cdot 2^{10} + (3^4)^5 + (5^2)^{10} : 5^5] : (2^{14} + 5^{15} + 3^{20})$;

e) $10^3 : 5^2 + 10 \cdot \{2^{10} : 64 + 2^3 \cdot [1035 : (5 \cdot 3^2) -$
$- (2^{37} \cdot 7^{37})^2 : (4^{36} \cdot 49^{37}) : 2]\}$.

6. Ordonați crescător numerele

$a = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{20}$,

$b = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{15}$ și

$c = 5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^5 \cdot 5^6 \cdot 5^7 \cdot 5^8 : 5^3$.

7. Dacă $a = (25^n : 5^n + 3^4 - 4^3 - 17 - 5^n) \cdot$
$\cdot [(2^5 - 5^2 - 7) : 2008] + 1993$,

$b = 32 \cdot 1992^5 - 3984^5 + 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ și

$c = 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4$,

calculați $(2a - b - c)^{2008}$.

8. Comparați: a) 3^{2^3} și 2^{3^2}; b) $[(3^2)^3]^4$ și $3^{2^{3^4}}$.

Să ne jucăm

● La un concurs pe echipe s-a propus următorul exercițiu spre rezolvare, dar, din cauza imprimantei, nu s-au tipărit și parantezele. Cele patru echipe participante au obținut rezultate diferite, numerele 11, 8, 5 și 23, dar totuși au primit punctaje maxime. Pune și tu parantezele pentru a obține cele patru rezultate. Verifică dacă se mai pot obține și alte rezultate.

$$3 \cdot 5 + 3 - 2 \cdot 7 + 1$$

● Înmulțiți numărul 273 cu vârsta voastră și apoi înmulțiți rezultatul obținut cu 37. Observați legătura dintre numărul obținut și vârsta voastră.

● Alegeți un număr format din patru cifre diferite. Aranjați cifrele în așa fel încât să obțineți cel mai mare și cel mai mic număr format din acele cifre și scădeți-le. Repetați acest proces pentru fiecare număr nou obținut. După cel mult 7 astfel de calcule, veți ajunge la numărul 6174.

Test de autoevaluare

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

1. Calculați:

a) 2^5; b) 24^0; c) $5^{24} \cdot 5^{10}$; d) $17^{81} : 17^{69}$; e) $(7^8)^6$; f) $27^{81} : 9^{81}$. *30 puncte*

2. Comparați:

a) 11^9 cu 15^9; b) 7^{42} cu 7^{52}; c) 9^5 cu 3^{10}; d) 7^{38} cu 4^{57}. *10 puncte*

3. Calculați:

a) $(2^0 + 2^1 + 2^2)^4 : 7^2 + 7^2$;

b) $6^{18} \cdot 36^5 : (6^{13})^2 + 4^{10} \cdot 7^{10} : 28^9 - 25^0 - 0^{18}$;

c) $3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{10} \cdot 3^{15})^5 : 3^{27} + (4^{57} : 4^{56} - 1^4)^{90} \cdot 3^8]$. *30 puncte*

4. Calculați sfertul celui mai mic și jumătatea celui mai mare dintre numerele:

$8^{301}, 32^{119}, 64^{83}$. *20 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Alegeți răspunsul corect:

1) Pătratul lui 6 este:

a) 24; b) 12; c) 36; d) 30.

2) Dacă efectuăm $[(8^{10})^2]^0$ obținem:

a) 8^{12}; b) 1; c) 0; d) 8^{20}.

3) Rezultatul calculului $6^2 + 2^6$ este egal cu:

a) 8^4; b) 8^2; c) 16; d) 100.

2. Scrieți ca o singură putere:

a) $5^{18} \cdot 5^2$; b) $6^6 \cdot 6^9$; c) $17^7 : 17^2$; d) $10^{16} : 10^6$; e) $2^{25} \cdot 2 : 2^{13}$;

f) $(21^7)^3$; g) $[(2^2)^3]^4$; h) $(3^{17} \cdot 3^3)^2 : (3^5 \cdot 3^3)$.

3. Calculați:

a) $18^2 - 14^2$; b) $20^1 + 20^2 + 20^3$; c) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2$;

d) $3^3 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3^3$; e) $[(3^5)^{10}]^2 : (3^4)^{20}$; f) $(3^0 + 3^1 + 3^2)^5 : 13^3 + 13^2$;

g) $(1 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3) : (3^6 + 1)$; h) $(25 + 5^{12} : 5^{10}) : 5^2$; i) $(11^3)^8 \cdot 11^4 : 11^{26} - 11^2$;

j) $[2^3 - (5^2 - 3^2) : 2^2] : 2^2$; k) $[3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 : 9^4 + (2^4)^{10} : (4^2)^9] : 5$.

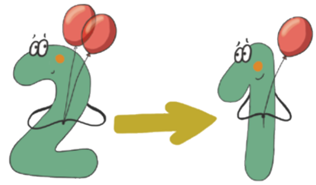
Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Ana: Andrei, știi că mie îmi plac problemele de aritmetică. Abia așteptam să ajung la această lecție. Tu ce îți amintești despre rezolvarea unei probleme?

Andrei: La o problemă avem **ipoteza problemei** (adică datele care se dau) și **concluzia problemei** (adică cerința/cerințele problemei). Doamna învățătoare ne spunea așa:

În rezolvarea unei probleme trebuie să parcurgem următoarele etape: • citirea și înțelegerea problemei (identificarea datelor); • analiza problemei (stabilirea legăturii dintre datele problemei); • redactarea rezolvării; • verificarea și interpretarea rezultatului.

I. Metoda reducerii la unitate



Andrei: Ce poți să-mi spui despre metoda reducerii la unitate?

Ana: **Metoda reducerii la unitate** constă în *compararea mărimilor date într-o problemă cu aceeași mărime, luată ca unitate*. Dar trebuie să fim atenți și să stabilim dependența între mărimi: atunci când una crește de un număr de ori, cealaltă crește sau scade de același număr de ori.

Andrei: Hai să exemplificăm prin câteva probleme.

Probleme rezolvate

• În 8 cutii de același fel sunt, în total, 48 de bomboane. Câte bomboane sunt în 5 dintre cele 8 cutii?

Rezolvare. Dacă știm câte bomboane sunt în 8 cutii, aflăm câte bomboane sunt într-o cutie: de 8 ori mai puține bomboane decât sunt împreună în cele 8 cutii.

8 cutii .... 48 de bomboane
1 cutie .... $48 : 8 = 6$ bomboane
5 cutii .... $6 \cdot 5 = 30$ de bomboane
(*de 5 ori mai multe bomboane, pentru că sunt de 5 ori mai multe cutii*)

Așadar în 5 cutii sunt 30 de bomboane.

• 6 tractoare pot ara un teren în 2 zile. În câte zile pot ara terenul respectiv doar 4 dintre cele 6 tractoare?

Rezolvare. Un singur tractor ar ara terenul în mai multe zile, în cazul nostru de 6 ori mai multe.

6 tractoare .... 2 zile
1 tractor .... $6 \cdot 2 = 12$ zile
4 tractoare .... $12 : 4 = 3$ zile
(*de 4 ori mai puține zile, deoarece ară de 4 ori mai multe tractoare*)

Așadar cele 4 tractoare ară terenul în 3 zile.

Ana: Dar putem să avem într-o problemă mai multe date. Pentru reducerea la unitate a fiecărei date din problemă trebuie să descoperim ce fel de dependență este între mărimi.

• Pentru a ara 18 ha de teren arabil, 4 tractoare au lucrat 9 zile. Dacă ar trebui să arăm 21 ha și dispunem de 6 tractoare, cât timp le va fi necesar? (Presupunem că tractoarele îndeplinesc aceeași normă).

Rezolvare. Vom reduce la unitate, pe rând, numărul de tractoare și suprafața, apoi vom reveni, invers, la datele cerute.

18 ha .... 4 tractoare .... 9 zile
18 ha .... 1 tractor .... $9 \cdot 4 = 36$ (zile)
(*de 4 ori mai multe zile pentru că sunt de patru ori mai puține tractoare*)
1 ha .... 1 tractor .... $36:18 = 2$ (zile)
(*de 18 ori mai puține zile pentru că sunt de 18 ori mai puține hectare de arat*)
21 ha .... 1 tractor .... $2 \cdot 21 = 42$ (zile)
(*de 21 de ori mai multe zile pentru că s-a mărit suprafața de arat de 21 de ori*)
21 ha .... 6 tractoare .... $42 : 6 = 7$ (zile)
(*de 6 ori mai puține zile pentru că au venit la arat de 6 ori mai multe tractoare*).

Portofoliu

Adăugați în portofoliul vostru modelele de rezolvări de probleme pe care le găsiți în această lecție. Vă pot fi utile atunci când vreți să rezolvați alte probleme.

Activitate în perechi

Formați perechi și compuneți fiecare câte o problemă după schemă, apoi rezolvați problema compusă de colegul de echipă.

8.............. 24	12 4
1 .... $24:8$	1 .... $12 \cdot 4$
5 .... ?	6 ....?

Probleme propuse

•

1. Dacă în 6 ore un muncitor realizează 72 de piese de același fel, câte piese realizează muncitorul într-o oră? Dar în 8 ore?

2. Câți lei costă 5 prăjituri, dacă pentru 3 prăjituri s-au plătit 27 lei?

3. Un bazin se umple prin 5 robinete în 12 ore. În cât timp vor umple același bazin 6 robinete care au același debit?

4. Patru muncitori termină o lucrare în 9 zile. Câți muncitori sunt necesari pentru a termina lucrarea în 6 zile?

5. Sofia cumpără 12 bilete la film și plătește 180 lei. Ea pierde 3 bilete. Cât costă biletele pierdute?

6. O echipă de 15 muncitori termină o lucrare în 30 de zile. În cât timp va termina aceeași lucrare o echipă de 25 de muncitori? (Toți muncitorii îndeplinesc aceeași normă).

7. Un automobil parcurge într-o oră 60 de kilometri. Câți kilometri parcurge automobilul în două ore, dacă circulă cu aceeași viteză? Dar în trei ore? Dar într-o jumătate de oră?

••

8. Mircea a cumpărat 8 prăjituri. El a plătit cu o bancnotă de 100 lei și a primit rest 52 lei. După ce a mâncat o prăjitură s-a hotărât să cumpere din toți banii prăjituri. Câte prăjituri duce acasă Mircea?

9. Marin și Victor culeg merele din livadă. Marin a cules 15 kg de mere în 3 ore, iar Victor 10 kg de mere în 2 ore. Câte kilograme de mere va culege fiecare copil în 5 ore, dacă fiecare dintre ei își va păstra ritmul de muncă? Cine culege mai multe mere într-o oră?

10. Un fermier are 6 vaci, care timp de 30 de zile consumă 180 kg de furaj. Cât furaj consumă 12 vaci în 18 zile, daca rația (porția) unei vaci pe zi rămâne aceeași?

11. În 6 zile, 100 de animale consumă 6000 kg de furaj. În câte zile vor consuma 9600 kg de furaj 120 de animale?

12. O echipă de 3 muncitori trebuie să termine o lucrare în 15 zile. După 3 zile mai vine un muncitor. În câte zile va fi realizată lucrarea?

Indicație. Porniți rezolvarea problemei din momentul în care mai vine un muncitor.

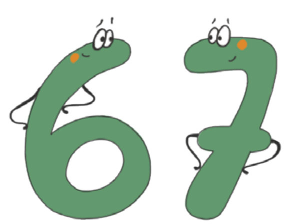
13. 20 de robinete cu același debit sunt deschise pentru a evacua în 30 de minute apa dintr-un bazin. După 10 minute, 4 robinete se defectează și sunt închise. Care este durata totală de golire a bazinului în aceste condiții?

14. Pentru executarea a 360 de piese pot fi folosite trei mașini cu productivități diferite. Prima mașină poate executa piesele în 36 de ore, a doua în 18 ore, iar a treia în 12 ore. În câte ore ar putea fi executate piesele, dacă mașinile lucrează toate odată?

Indicație. Determinați câte piese execută fiecare mașină într-o oră și apoi câte piese execută toate mașinile într-o oră.

15. O echipă formată din 12 muncitori agricoli, lucrând câte 8 ore pe zi, recoltează porumbul de pe un teren în 5 zile. În câte zile ar recolta porumbul o echipă de 15 muncitori agricoli care lucrează câte 4 ore pe zi?

II. Metoda comparației



Ana: Dacă într-o problemă apar trei sau mai multe mărimi, fiecare dintre ele cu câte două valori numerice date sau cu diverse relații între ele, atunci pentru rezolvare vom folosi **metoda comparației,** prin care *se compară primul șir de valori numerice ale mărimilor cu cel de al doilea șir.*

Andrei: Și dacă în cele două șiruri de date observăm că o valoare este aceeași, aplicăm metoda de reducere la unitate pentru cealaltă valoare. Dacă, comparând cele două șiruri de date, observăm că nu avem o valoare comună pentru una dintre mărimi, vom încerca să obținem acest lucru înmulțind/împărțind relațiile astfel încât să obținem o valoare comună.

Probleme rezolvate

Dacă pentru 5 reviste și 4 caiete plătim 58 lei, iar cu 54 lei putem cumpăra exact 2 caiete și 5 reviste, cât costă un caiet? Dar o revistă?

Rezolvare. Enunțul face referire la 3 mărimi: număr de reviste, număr de caiete, suma plătită.

5 reviste .... 4 caiete .... 58 lei
5 reviste .... 2 caiete .... 54 lei.

Comparând cele două șiruri de date observăm că numărul revistelor este același, diferă doar numărul de caiete și suma plătită. Eliminăm una dintre mărimi, prin scădere.

0 reviste .... 2 caiete .... 4 lei, deci
0 reviste .... 1 caiet .... 4:2 = 2 (lei).

Revenim la prima relație și scădem prețul celor 4 caiete, obținând că prețul unei reviste este de 10 lei:

5 reviste .... 58 lei – 8 lei = 50 lei , deci o revistă costă 10 lei.

Verificare:
5 reviste .... 4 pixuri .... $5 \cdot 10 + 4 \cdot 2 = 58$ (lei)
5 reviste .... 2 pixuri .... $5 \cdot 10 + 2 \cdot 2 = 54$ (lei).

Dacă pentru 5 reviste și 4 caiete plătim 58 lei, iar cu 46 lei putem cumpăra 3 caiete și 4 reviste, cât costă un caiet? Dar o revistă?

Rezolvare.
5 reviste .... 4 caiete .... 58 lei
4 reviste .... 3 caiete .... 46 lei.

Reducem problema la cea alăturată, încercând să egalizăm numărul revistelor:

· *mărind de patru ori toate datele din prima relație*
20 reviste .... 16 caiete .... 232 lei
· *și de cinci ori toate datele din a doua relație*
20 reviste .... 15 caiete .... 230 lei.

Prin scăderea celor două relații obținem:
0 reviste .... 1 caiet .... 2 lei
0 reviste .... 4 caiete .... $2 \cdot 4 = 8$ (lei)
5 reviste .... 0 caiete .... $58 - 8 = 50$ (lei).
1 revistă .... 0 caiete .... $50 : 5 = 10$ (lei).

Verificare:
5 reviste .... 4 caiete .... $5 \cdot 10 + 4 \cdot 2 = 58$ (lei)
4 reviste .... 3 caiete .... $4 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 46$ (lei).

Activitate în perechi

Formați perechi și compuneți fiecare câte o problemă după schemă, apoi rezolvați problema compusă de colegul de echipă.

8 ...... 3 ...... 30 8 ...... 3 30
8 ...... 5 ...... 34 5 ...... 6 27

Probleme propuse

●

1. Maria a plătit pentru o carte și un caiet 18 lei. Ioana a plătit pentru o carte și două caiete (de același fel ca ale Mariei) 21 lei. Cât costă o carte și cât costă un caiet?

2. Dacă pentru 5 reviste și 4 caiete plătim 58 lei, iar cu 44 lei putem cumpăra exact 2 caiete și 4 reviste, de același fel, cât costă un caiet? Dar o revistă?

3. Dacă 17 saci cu făină și 12 saci cu cartofi cântăresc 1 210 kg, iar 21 de saci cu făină și 12 saci cu cartofi, de același fel, cântăresc 1 410 kg, atunci câte kilograme are un sac cu făină? Dar unul cu cartofi?

4. Dacă 5 fete și 3 băieți adună 30 kg de zmeură, iar 5 fete și 7 băieți adună 50 kg de zmeură, câte kilograme de zmeură adună o fată și câte kilograme de zmeură adună un băiat?

5. O croitoreasă cumpără 4 metri de dantelă și 3 metri de stofă și plătește 356 lei. Altă dată cumpără 2 metri de dantelă și 6 metri de stofă, de același fel, și plătește 322 lei. Cât costă metrul de dantelă și cât costă metrul de stofă?

●●

6. Un țăran a primit pentru 2 gâște și 3 rațe suma de 825 lei. Altă dată, vânzând la același preț, a primit pentru 3 gâște și 5 rațe suma de 1300 lei. Care este prețul unei gâște? Care este prețul unei rațe?

7. Dacă 7 bile mari și 3 bile mici cântăresc 44 grame, iar 5 bile mari și 8 bile mici cântăresc 49 grame, cât cântărește o bilă mare? Dar o bilă mică?

8. Suma dintre dublul unui număr și triplul unui alt număr este 370. Dacă suma dintre primul număr multiplicat de 5 ori și al doilea număr multiplicat de 7 ori este 875, determinați numerele.

9. S-au cumpărat 3 jucării de pluș și 2 jocuri Lego și s-au plătit în total 89 lei. Pentru 2 jucării de pluș și 3 jocuri Lego, de același fel, o altă persoană a plătit 96 lei. Cât costă o jucărie de pluș și un joc Lego, la un loc? Cât costă o jucărie de pluș și cât costă un joc Lego?

Indicație. Adunați cele două relații.

10. Un caiet, 3 creioane și 5 reviste costă 64 lei, iar 5 caiete, 4 creioane și 3 reviste, de același fel, costă 56 lei.

a) Cât costă, la un loc, 1 creion și 2 reviste?

b) Cât costă, la un loc, un caiet, un creion și o revistă?

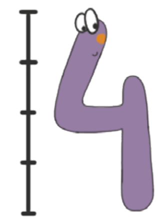
c) Cât costă fiecare obiect, dacă prețul unei reviste depășește cu 1 leu prețul unui creion multiplicat de 5 ori?

11. Trei gospodine au cumpărat fructe de la același vânzător. Prima a cumpărat 3 kg de mere, 3 kg de pere și 5 kg de gutui și a plătit 20 lei. A doua a cumpărat 6 kg de mere, 4 kg de pere, 2 kg de gutui, de același fel, și a plătit 28 lei. A treia a cumpărat 6 kg de mere, 7 kg de pere și 7 kg de gutui și a plătit 39 lei. Cât costă un kilogram din fiecare tip de fructe?

12. La o grădiniță s-au cumpărat într-o lună 24 de păpuși și 50 de mașinuțe și s-a plătit 2920 lei. În altă lună s-au cumpărat 68 de păpuși și 100 de mașinuțe, de același fel, și s-a plătit 7440 lei. Cât costă 30 de păpuși și 55 de mașinuțe pe care le vor cumpăra în a treia lună?

Indicație. Aduceți relațiile la o formă mai simplă prin împărțire.

III. Metoda figurativă



Andrei: **Metoda figurativă** îmi place pentru că *reprezentăm prin desen mărimile dintr-o problemă respectând relațiile dintre acestea*, iar apoi calculele devin foarte simple.

Ana: Dar sunt și probleme în care intervin date sau mărimi care pot fi numărate și între care se pot stabili corespondențe după anumite criterii, așa cum sunt cele cu elevi și bănci. Și la acestea facem o reprezentare și, dacă analizăm bine problema, rezolvarea devine simplă.

Probleme rezolvate

Determinarea a două numere când cunoaștem suma și diferența lor

● Ana și Mara au împreună 256 lei. Dacă Mara are cu 98 lei mai mult decât Ana, câți lei are fiecare?

Rezolvare. Ana are o sumă de bani pe care o reprezentăm printr-un segment, iar Mara are cu 98 lei mai mult, în total fetele având 256 lei.

Suma Anei: |———|
Suma Marei: |———|-----+98-----| } 256

256 lei – 98 lei = 158 lei (de două ori suma Anei)

158 lei : 2 = 79 lei (suma Anei)

79 lei + 98 lei = 177 lei (suma Marei).

Verificare: 79 lei + 177 lei = 256 lei

Determinarea a două numere când cunoaștem suma și câtul lor

● În livadă sunt 90 de pomi. Numărul prunilor este de două ori mai mare decât al caișilor, iar numărul merilor este de trei ori mai mare decât al prunilor. Câți meri, caiși și pruni sunt în livadă?

Rezolvare. Se observă că numărul caișilor este cel mai mic și îl vom reprezenta cu un segment.

Nr. caișilor: |—|
Nr. prunilor: |—|—|
Nr. merilor: |—|—|—|—|—|—| } 90

90 : 9 = 10 (pomi reprezintă un segment), așadar în livadă sunt 10 caiși, 20 de pruni și 60 de meri.

Verificare: 10 + 20 + 60 = 90 (pomi).

Determinarea a două numere când cunoaștem diferența și câtul lor

● Vlad și Marius au de rezolvat același număr de probleme. Când lui Vlad i-au mai rămas de rezolvat 3 probleme, numărul celor rezolvate de el era de 3 ori mai mai mare decât numărul celor rezolvate de Marius, care mai avea de rezolvat 15 probleme. Câte probleme au avut de rezolvat cei doi copii?

Rezolvare. Reprezentăm numărul de probleme rezolvate de Marius cu un segment.

|———| +15 Numărul de probleme rezolvate de Marius (15 mai are de rezolvat)
|———|———|———| +3 Numărul de probleme rezolvate de Vlad (3 mai are de rezolvat)

Cele 15 probleme pe care le mai are de rezolvat Marius sunt egale cu două segmente și încă 3 probleme de la Vlad. Calculăm astfel cât reprezintă un segment: (15 – 3) : 2 = 6 (probleme a rezolvat Marius).

Numărul total de probleme ce trebuie rezolvate de către fiecare băiat este 15 + 6 = 21 probleme.

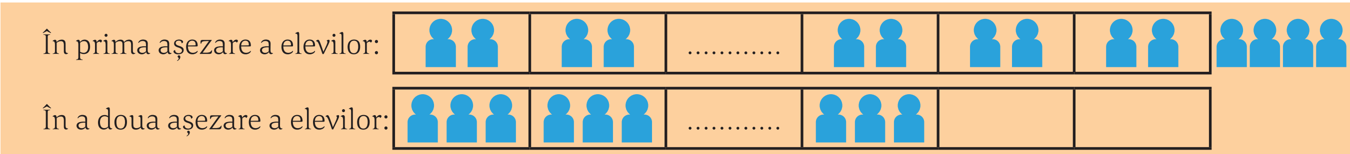
Verificare: 21 – 6 = 15 (probleme mai are de rezolvat Marius);

6 · 3 = 18 (probleme a rezolvat Vlad și mai are de rezolvat 3 probleme).

Problemă rezolvată

Dacă elevii unei clase stau câte 2 în bancă, rămân 4 elevi fără bancă, iar dacă stau câte trei, rămân două bănci fără elevi. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?

Rezolvare. Realizăm schema folosind pentru bancă un dreptunghi, iar pentru elev un .



Distribuim cei patru elevi care nu stăteau în bănci ca „al treilea elev” din băncile ocupate cu câte doi elevi și obținem astfel 4 bănci cu câte trei elevi. Apoi eliberăm 2 bănci care trebuie sa rămână goale și așezăm cei 4 elevi care stăteau în acestea, câte unul, în alte 4 bănci. Am obținut astfel 8 bănci cu câte 3 elevi: $8 \cdot 3 = 24$ (elevi) și $8 + 2 = 10$ (bănci).

Verificare: Dacă așezăm câte 2 elevi în cele 10 bănci rămân 4 elevi fără bancă. Dacă așezăm câte 3 elevi, ocupăm doar 8 bănci și rămân 2 bănci libere.

Probleme propuse

●

1. Mama și Irina au împreună 30 de ani. Știind că mama are de 5 ori vârsta Irinei, câți ani are fiecare?

2. Andrei și Ion au împreună 80 de timbre. Andrei are cu 20 mai multe decât Ion. Câte timbre are fiecare?

3. Dacă 3 numere consecutive au suma 402, care sunt acestea?

4. Într-o curte sunt găini și rațe. Numărul găinilor este de trei ori mai mare decât cel al rațelor. Dacă scazi din numărul găinilor numărul rațelor obții 20. Câte găini și câte rațe sunt în curte?

5. Suma a doua numere este 35, iar câtul lor este 6. Determinați numerele.

6. O ciocolată costă cât 6 pâini, iar o ciocolată și 4 pâini costă 10 lei. Cât costă o pâine? Dar o ciocolată?

●●

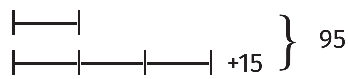
7. La o grădiniță s-au adus 138 de cutii cu diverse alimente. Câteva cutii cu unt, cutii cu lapte de trei ori mai multe, iar cutii cu iaurt cu 2 mai puține decât cele cu lapte. Câte cutii de fiecare fel s-au primit?

8. Dinu și Ionel și-au pus împreună banii pe care îi aveau, în total 180 lei. Ce sumă are fiecare dintre ei, știind că, dacă Dinu i-ar da lui Ionel 25 lei, ar avea sume egale?

9. Într-un coș sunt mere și de trei ori mai multe pere. Știind că în coș sunt cu 10 mai multe pere decât mere, câte fructe de fiecare fel sunt în coș?

Activitate în perechi

Formați perechi și compuneți fiecare câte o problemă după schema următoare, apoi rezolvați problema compusă de colegul de echipă.



10. Dacă dintr-un cont bancar se scot 50 lei și se pun în alt cont, atunci în primul cont vor fi de două ori mai mulți bani decât în al doilea. Câți bani se află în ficare cont, dacă în ele sunt, în total, 300 lei?

11. Dacă în fiecare bancă stau câte 5 persoane, atunci 10 persoane nu au locuri, iar dacă stau câte 6 persoane, atunci rămân 5 bănci libere. Câte bănci și câte persoane sunt?

12. Într-o magazie se află o cantitate de grâu și un număr de saci. Dacă în fiecare sac s-ar pune câte 75 kg de grâu, atunci ar rămâne 450 kg de grâu, iar dacă s-ar pune câte 80 kg de grâu, atunci ar mai rămâne 10 saci. Ce cantitate de grâu și câți saci sunt?

●●●

13. Tatăl Ioanei are cu 4 ani mai puțin decât mama și Ioana la un loc. Peste 7 ani, Ioana va avea a treia parte din vârsta mamei și toți trei vor avea împreună 85 de ani. Ce vârstă are fiecare în prezent?

Indicație. În prezent, suma vârstelor celor trei este: $85 - 3 \cdot 7 = 64$ (ani), de unde se află vârsta tatălui.

14. Fiica, mama și bunica au împreună 118 ani. Peste 3 ani mama va avea de 6 ori vârsta fiicei, iar bunica de 2 ori vârsta actuală a mamei. Determinați vârsta fiecăreia în prezent.

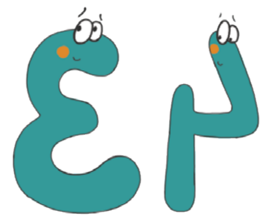
15. Cinci băieți aveau, fiecare, același număr de mere. După ce fiecare a mâncat câte 8 mere, le-au rămas, laolaltă, atâtea mere câte a avut fiecare dintre ei la început. Câte mere a avut fiecare?

16. Determinați 4 numere naturale știind că suma lor este 48, iar dacă se adună numărul 3 la primul, se scade 3 din al doilea, se împarte al treilea la 3 și se înmulțește al patrulea cu 3, se obțin numere egale.

17. Elevii unei clase au de plantat pomi. Dacă fiecare elev ar planta câte un pom, atunci s-ar planta cu 25 de pomi mai puțin decât era planificat, iar dacă fiecare elev ar planta câte 2 pomi, atunci 4 elevi nu ar avea pomi de plantat. Câți elevi sunt în clasă și câți pomi au de plantat?

18. Într-o livadă sunt de 4 ori mai mulți meri decât peri. Dacă se taie 4 meri și se mai plantează 2 peri, numărul merilor va fi de trei ori mai mare decât numărul perilor. Câți meri și câți peri sunt în livadă?

IV. Metoda mersului invers



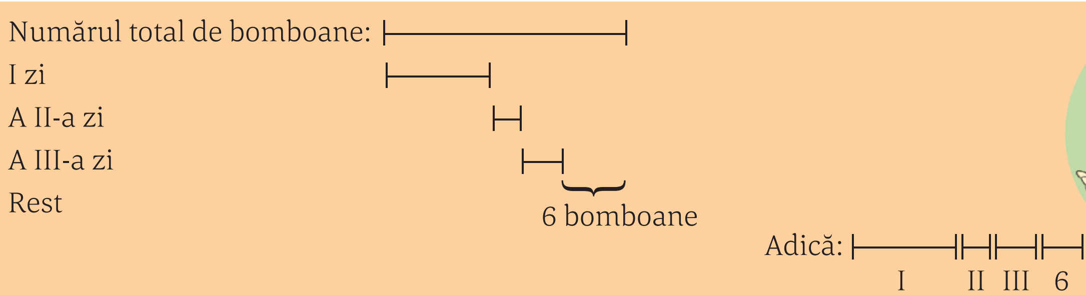
Andrei: **Metoda mersului invers** se aplică problemelor în care datele depind succesiv unele de altele. *Enunțul problemei trebuie urmărit de la sfârșit către început.* De cele mai multe ori vom folosi reprezentarea problemei prin segmente urmărind textul problemei, dar rezolvarea o vom face pornind de la sfârșit.

Ana: Da, și în timpul rezolvării efectuăm operația inversă celei care apare în enunț, ceea ce înseamnă că nu numai mersul este invers, ci facem proba operațiilor din enunțul problemei. Verificarea se face aplicând rezultatului operațiile din enunț. Voi exemplifica prin rezolvarea următoarelor probleme:

Probleme rezolvate

- Ioana a primit o cutie cu bomboane. În prima zi a mâncat împreună cu prietenele ei jumătate din bomboane, a doua zi a mâncat un sfert din bomboanele rămase, iar a treia zi, jumătate din bomboanele rămase în cutie. Știind că în cutie au rămas 6 bomboane, câte bomboane erau în cutie inițial?

Rezolvare. Reprezentăm schematic datele problemei. Considerăm un segment numărul de bomboane:



În a III-a zi, fetele au mâncat jumătate din bomboanele rămase și le-au rămas 6 bomboane, ceea ce reprezintă cealaltă jumătate. Așadar, la începutul celei de a III-a zile aveau 12 bomboane. În a II-a zi au mâncat un sfert din bomboanele rămase după prima zi și le-au rămas 12 bomboane, ceea ce reprezintă trei sferturi din numărul de bomboane. Atunci un sfert din numărul de bomboane pe care le aveau la începutul celei de a II-a zile este egal cu 4 bomboane, așadar la începutul acelei zile aveau 16 bomboane. În prima zi au mâncat jumătate din bomboanele din cutie și au rămas 16 bomboane, ceea ce reprezintă cealaltă jumătate. În concluzie, cutia avea 32 de bomboane.

Verificare. Cutia are 32 de bomboane, din care fetele mănâncă în prima zi jumătate, deci 16 bomboane. A doua zi mănâncă un sfert din bomboanele rămase, deci 4 bomboane, și rămân 12 bomboane. A treia zi mănâncă jumătate din bomboanele rămase, deci 6 bomboane, și rămân 6 bomboane.

M-am gândit la un număr, l-am adunat cu 28, suma am înmulțit-o cu 10, din rezultat am scăzut 24 și apoi am împărțit la 12. Rezultatul obținut este 23. Determinați numărul.

Rezolvare. Ultima operație este împărțirea la 12. Numărul pe care îl împart la 12 și obțin 23 este $12 \cdot 23 = 276$. Numărul din care am scăzut 24 pentru a obține 276 este $276 + 24 = 300$. Numărul pe care l-am înmulțit cu 10 pentru a obține 300 este $300:10 = 30$. Numărul pe care l-am adunat cu 28 pentru a obține 30 este $30 - 28 = 2$. Numărul căutat este 2.

Verificare. Numărul este 2. Dacă parcurgem problema obținem 23.

Probleme propuse

●

1. Mă gândesc la un număr pe care îl adun cu 27; rezultatul îl împart la 4 și-l adun apoi cu 6. Suma astfel obținută o împart la 7 și din rezultat scad 7. Dacă obțin 1, la ce număr m-am gândit?

2. O persoană are o sumă. După ce dublează această sumă cheltuiește 155 lei. Dublează apoi suma rămasă și mai cheltuiește 200 lei. După ce dublează noul rest și cheltuiește încă 250 lei constată că i-au mai rămas 50 lei. Care este suma inițială pe care a avut-o?

3. Într-o cutie sunt baloane: albe – a cincea parte din numărul total și încă 10; galbene – a treia parte din rest și încă 10; roșii – restul de 50. Câte baloane sunt în cutie?

4. La ce număr s-a gândit Alexandru, dacă a scăzut din el 25, apoi a înmulțit diferența cu 19, produsul l-a adunat cu 315 și a obținut 600?

5. Ce sumă de bani a avut tata dacă, după ce a cheltuit o treime din ea, apoi un sfert din rest și încă 15 lei, constată că i-au mai rămas necheltuiți 45 lei?

Activitate în perechi

Formați perechi și compuneți fiecare câte o problemă după schemă, apoi rezolvați problema compusă de colegul de echipă.

$$[2(x + 15) + 4] \cdot 3 - 100 = 152$$

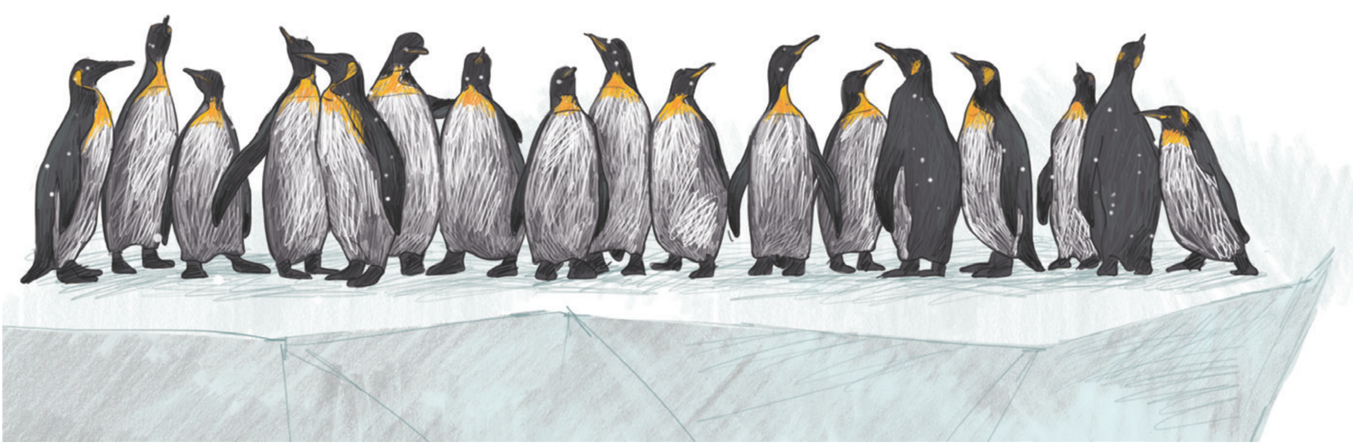
6. Copiii au mâncat mandarine dintr-o fructieră până a rămas un sfert din numărul lor. Mama a mai pus 4 mandarine, iar acum în fructieră sunt 10 mandarine. Câte mandarine au fost la început?

●●

7. Rezolvați, folosind metoda mersului invers:
$[(3 \cdot x + 4) \cdot 2 + 5] \cdot 3 + 5 = 170$.

8. Pe o banchiză plutesc mai mulți pinguini. Părăsesc banchiza mai întâi pinguinii imperiali, care erau o treime din toți pinguinii. Îi urmează alți 8 pinguini. Apoi pleacă jumătate din cei rămași, apoi încă 5, apoi două treimi din cei rămași și apoi încă 2 și rămân pe banchiză 7 pinguini. Câți pinguini imperiali au fost?

9. Dintr-un magazin se vinde marfă astfel: în prima zi o treime din cantitate și încă 80 kg, a doua zi



două treimi din rest mai puțin 60 kg și a treia zi două treimi din rest și încă 60 kg. Ce cantitate a fost inițial și cât s-a vândut zilnic, dacă în magazin nu a mai rămas marfă?

10. Un biciclist parcurge un drum în trei etape: în prima etapă parcurge un sfert din drum plus 5 km; în a doua etapă parcurge a șaptea parte din rest și încă 10 km, iar în etapa a treia parcurge patru cincimi din noul rest și încă 10 km. Determinați lungimea drumului.

11. Anastasia a primit o cutie cu bomboane de la părinții ei. În prima zi a mâncat împreună cu prietenele sale jumătate din bomboane, a doua zi au mâncat un sfert din bomboanele rămase, iar a treia zi jumătate din noul rest. Știind că în a patra zi fetele au mâncat ultimele 3 bomboane, câte erau inițial în cutie?

12. Dintr-o cutie cu bomboane Alexandra ia un sfert, Bogdan ia o treime din ce a rămas, iar Carina ia jumătate din noul rest. În cutie au rămas 4 bomboane. Câte bomboane au fost la început?

13. Catinca scrie un număr pe tablă. Madi șterge numărul și scrie unul cu patru mai mare. Carina șterge acest număr și scrie unul de trei ori mai mare decât numărul scris de Madi. Daria șterge numărul și scrie 100, care este cu 19 mai mare decât ultimul număr scris pe tablă. Ce număr a scris Catinca?

14. Andrei a început să rezolve tema de vacanță luni și în fiecare zi a rezolvat cu două probleme mai mult ca în ziua precedentă. Știind că sâmbătă a rezolvat ultimele 15 probleme, câte probleme a avut de rezolvat?

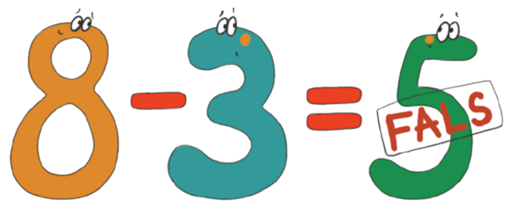
15. Ana, Daniel și Aurel au luat caise dintr-o pungă astfel: Ana cu 3 caise mai puțin decât o treime din numărul total, Daniel cu 2 caise mai puțin decât o treime din rest, iar Aurel cu o caisă mai puțin decât o treime din ultimul rest. Știind că în pungă au mai rămas 9 caise, determinați:

a) Este posibil să fi fost 27 de caise în pungă?
b) Câte caise au fost la început în pungă?
c) Câte caise a luat fiecare copil?

V. Metoda falsei ipoteze

Ana: **Metoda falsei ipoteze** constă în a *presupune că ipoteza problemei nu este cea corectă*. Pornind de la această idee, ne vom folosi de abordarea care decurge pentru a ajunge rapid la o rezolvare a problemei.

Andrei: Cred că este mai simplu de înțeles dacă pornim de la niște exemple.



Probleme rezolvate

● Dacă 18 caiete de 50 și de 80 de file au împreună 1050 de file, câte caiete sunt de fiecare fel?

Rezolvare. Există două tipuri de caiete, de 50 și de 80 de file. Dacă presupunem că ar fi doar caiete de 50 de file, ar însemna $18 \cdot 50 = 900$ (file). Dar sunt 1050 de file, așadar diferența $1050 - 900 = 150$ (file) provine din faptul că sunt și caiete de 80 de file. Dacă 150 de file apar din diferența de 30 de file în plus la unele caiete, putem spune că avem $150 : 30 = 5$ caiete cu mai multe file, adică cu 80 de file. Așadar, sunt 5 caiete de 80 de file și $18 - 5 = 13$ caiete de 50 de file.

Verificare. $5 \cdot 80 + 13 \cdot 50 = 400 + 650 = 1050$ (file), $5 + 13 = 18$ (caiete).

Observație. Am presupus că toate caietele sunt de 50 de file și am obținut o diferență de 150 de file provenită din faptul că sunt și caiete care au cu 30 de file mai mult. Numerele fiind mici, putem face înlocuiri succesive: un caiet de 50 de file se înlocuiește cu un caiet de 80 de file (numărul caietelor rămânând constant) și diferența scade cu 30 de file. Repetăm înlocuirea până când diferența devine 0 și obținem 5 caiete de câte 80 de file. Problema se poate rezolva și prin încercări succesive până când nimerim soluția. Nu vom aborda însă astfel de metode de rezolvare empirice, „băbești”.

● În curtea unui țăran sunt struți și oi. Numărul capetelor este 30, iar numărul picioarelor este 80. Câte oi și câți struți sunt în curte?

Rezolvare. Folosind metoda falsei ipoteze, vom presupune că țăranul are doar oi, așa că noua ipoteză va fi „în curte sunt 30 de oi”, pentru că există 30 de capete, acestea având $30 \cdot 4 = 120$ de picioare. Dar numărul de picioare este 80, așadar diferența (40) dintre 120 și 80 provine de la existența struților. Deci ipoteza că ar fi doar oi în curte este falsă.

Observăm că dacă înlocuim o oaie cu un struț scade cu 2 numărul total de picioare, așa că vom scădea până vom ajunge la 80. O metodă mai rapidă decât înlocuirea „bucată cu bucată” a oilor cu struți este aceea de a împărți diferența dintre 120 și 80 la numărul de picioare care se scade cu fiecare înlocuire de animal. Astfel, $40 : 2 = 20$ (struți). Deoarece în curte sunt 30 de capete, dintre care 20 de struți, aflăm numărul de oi prin diferență: $30 - 20 = 10$ (oi). Așadar în ogradă sunt 20 de struți și 10 oi.

Verificare. $20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 40 + 40 = 80$ (picioare), $20 + 10 = 30$ (capete).

● Fie numerele: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și 10. Putem aranja aceste numere pe un cerc, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie impară? Justificați răspunsul.

Rezolvare. Suma numerelor este 55, deci impară. Fiecare număr este însumat de trei ori, deci suma tuturor tripletelor este $3 \cdot 55$, impară. Dar sunt 10 triplete, toate impare, ceea ce dă o sumă pară, absurd. Așadar nu putem aranja toate numerele de la 1 la 10 pe un cerc astfel încât suma a 3 numere alăturate să fie impară.

Probleme propuse

●

1. Într-o tabără de matematică, cei 100 de elevi ocupă 32 de camere, unele cu câte 2 paturi, altele cu câte 5 paturi. Câte camere de fiecare fel s-au ocupat?

2. Într-un bloc sunt, în total, 42 de apartamente, unele cu câte 2 camere și altele cu câte 4 camere. Știind că blocul are 130 de camere, determinați câte apartamente au câte 2 camere și câte au câte 4 camere.

3. În 9 bidoane, unele cu capacitatea de 3 litri, altele cu capacitatea de 5 litri, încap 31 litri de apă. Câte bidoane de fiecare fel sunt?

4. Într-o curte sunt găini și iepuri, în total 43 de capete și 124 de picioare. Câte găini și câți iepuri sunt în curte?

5. La un depozit au fost aduse într-o zi 230 kg de citrice. Au fost așezate în 40 de lădițe de câte 5 kg și 8 kg. De câte lădițe din fiecare fel a fost nevoie?

6. Pe 25 de rafturi s-au așezat 880 de cărți. Pe unele sunt câte 30 de cărți, iar pe altele câte 40 de cărți. Câte rafturi sunt de fiecare tip?

Activitate în perechi

Formați perechi și compuneți fiecare câte o problemă care să se rezolve cu această metodă, apoi rezolvați problema compusă de colegul de echipă.

7. Cu 4840 lei o agenție a cumpărat 80 de bilete la operă. Câte bilete de fiecare fel a cumpărat, dacă biletele sunt de 70 lei și respectiv 50 lei?

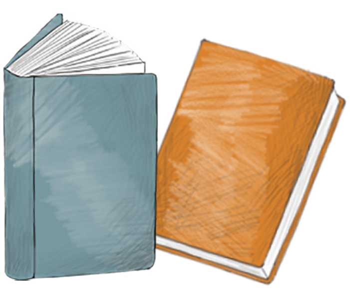
●●

8. O gospodărie are 200 de porci, găini și rațe, având în total 600 de picioare. Știind că numărul găinilor este egal cu numărul rațelor, determinați câte găini, câți porci și câte rațe sunt în gospodărie.

9. La un concurs se pun 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 4 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 130 de puncte?

10. Un elev a cumpărat 22 de cărți, plătind pe ele 690 lei. Unele au costat 20 lei, altele 30 lei, iar cele mai scumpe, 50 lei.

a) Știind că numărul cărților de 20 lei este egal cu al celor de 30 lei și de 50 lei la un loc, câte cărți de fiecare fel a cumpărat elevul?



b) Câte cărți ar putea cumpăra (din fiecare fel luând cel puțin una) pentru a avea cât mai multe?

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 30 de minute.

1. Dacă 4 kg de mere costă 12 lei, cât costă 11 kg de mere de același fel? *20 puncte*

2. Mă gândesc la un număr, îl triplez și apoi adaug 11. Împart la 4, adaug 6. Împart la 2 rezultatul de până acum și obțin 7. La ce număr m-am gândit? *25 puncte*

3. Perimetrul unui dreptunghi este de 500 m. Dacă lungimea dreptunghiului este de patru ori mai mare decât lățimea lui, care sunt dimensiunile dreptunghiului? *25 puncte*

4. Pe masă sunt 3 cărți și 4 caiete care cântăresc împreună 800 g. Pe raft sunt 6 cărți și 2 caiete, de același fel, care cântăresc împreună 1300 g. Cât cântărește o carte și cât cântărește un caiet? *20 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Inima unui om bate de aproximativ 210 ori în 3 minute. De câte ori bate într-o oră?

2. Cinci robinete care curg simultan, cu același debit, umplu un bazin de apă în 12 ore. În cât timp vor umple bazinul 4 robinete (cu același debit)?

3. S-au cumpărat 30 m de stofă neagră și 40 m de stofă verde și s-au plătit în total 9 750 lei. 1 m de stofă neagră e de 3 ori mai scump decât 1 m de stofă verde. Cât costă un metru din fiecare fel de stofă?

4. Pentru internatul unei școli s-au cumpărat 18 dulapuri și 25 de mese și s-au plătit 7625 lei. Pentru 9 dulapuri și 10 mese, de același fel, s-au plătit 3500 lei. Cât costă un dulap și cât costă o masă?

5. Un sfert din numărul elevilor unei clase joacă șah, o treime din cei rămași joacă tenis, iar o jumătate din noul rest joacă volei. Restul, adică 9 elevi, joacă fotbal. Câți elevi sunt în clasă?

6. La o florărie s-au vândut 81 de flori: trandafiri, crini și garoafe. Știind că numărul de trandafiri vânduți reprezintă o treime din numărul de crini, iar garoafele vândute sunt de 5 ori mai multe decât trandafirii, determinați numărul de flori vândute de fiecare fel.

7. Suma a trei numere este 42. Dacă din fiecare dintre ele scădem același număr obținem 3, 5, 7. Determinați cele trei numere.

8. În biblioteca școlii sunt 23 de mese de câte 2 și 3 locuri. Determinați câte mese de fiecare tip sunt în bibliotecă, știind că în total sunt 54 de locuri.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Divizor. Multiplu

Reținem

✓ Un număr natural a este divizibil cu un număr natural nenul b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Scriem $a \vdots b$ și citim „*a se divide cu b*” sau „*a este multiplu al lui b*”, sau scriem $b \mid a$ și citim „*b divide a*” sau „*b este divizor al lui a*”.

Cu alte cuvinte: spunem că un număr natural a este divizibil cu un număr natural, diferit de zero, b, dacă a se împarte exact la b.

✓ Dacă numărul natural a nu se împarte exact la numărul natural nenul b, atunci a nu este divizibil cu b. Scriem sau $a \not\vdots b$ și citim „*a* nu se divide cu *b*” sau $b \nmid a$ și citim „*b* nu divide *a*”.

Probleme rezolvate

- $3 \mid 6$, deoarece există numărul natural 2 astfel încât $6 = 3 \cdot 2$. Numerele 2 și 3 sunt divizori ai lui 6, așadar 6 este multiplu al numerelor 2 și 3. Și numerele 1 și 6 sunt divizori ai lui 6, așadar numărul 6 este multiplu și al numerelor 1 și 6. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3 și 6. Primii cinci multipli ai lui 6 sunt: 0, 6, 12, 18, 24.
- Divizorii numărului 14 sunt: 1, 2, 7 și 14. Primii cinci multipli ai lui 14 sunt: 0, 14, 28, 42, 56.
- Divizorii numărului 24 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 și 24. Primii cinci multipli ai lui 24 sunt: 0, 24, 48, 72, 96. *Observăm* că numărul multiplilor unui număr este prea mare pentru a-i putea scrie pe toți.
- Numărul 7 este divizor al lui 42 pentru că $42 = 7 \cdot 6$, numărul 12 este divizor al lui 48 pentru că $48 = 12 \cdot 4$, numărul 64 este multiplu al lui 4 pentru că $64 = 4 \cdot 16$.
- Copiați în caiete tabelul și completați-l după model:

$15 \mid 225$	$7 \mid 1001$	$13 \mid 1001$	$15 \mid 2015$	$204 \mid 41616$	$2016 \vdots 4$	$45324 \vdots 9$	$312 \vdots 7$	$44561 \vdots 11$
adevărat			fals		adevărat			

Reținem

✓ Cum suntem siguri că am găsit toți divizorii unui număr natural?

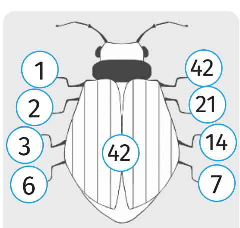
Să considerăm numărul 42. Îl scriem ca produs de două numere naturale: $42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$. Divizorii lui 42 sunt: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 și 42.

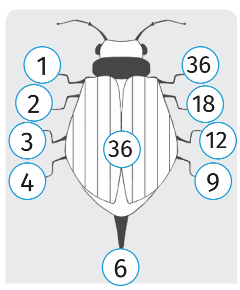
✓ Cum facem să descoperim multiplii unui număr natural?

Să considerăm numărul 42. Multiplicăm numărul 42, adică înmulțim pe rând 42 cu toate numerele naturale și aflăm multiplii acestuia: $42 \cdot 0$, $42 \cdot 1$, $42 \cdot 2$, $42 \cdot 3$, ...

În imaginea alăturată am asociat piciorușelor gândăcelului factorii din descompunerea numărului 42: 1 în stânga, 42 în dreapta, apoi 2 în stânga, 21 în dreapta, 3 în stânga și 14 în dreapta și, în final, 6 în stânga și 7 în dreapta. Nu mai există altă descompunere pentru că între ultimii doi factori (6 și 7) nu mai sunt alte numere naturale. Citirea divizorilor se face de la cel mai mic la cel mai mare.

Observați „gândăcelul" numărului 36: pentru că ultima descompunere a lui 36 este $36 = 6 \cdot 6$, gândăcelul are și coadă ☺.





Probleme rezolvate

- Scrieți toți divizorii numerelor 10, 15, 20, 25 și 63.

Rezolvare. $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$, deci divizorii lui 10 sunt: 1, 2, 5, 10; divizorii lui 15 sunt: 1, 3, 5, 15; divizorii lui 20 sunt: 1, 2, 4, 5, 10, 20; divizorii lui 25 sunt: 1, 5, 25; divizorii lui 63 sunt: 1, 3, 7, 9, 21, 63.

- Primii cinci multipli ai lui 10 sunt: 0, 10, 20, 30, 40. Colaborând cu un coleg, găsiți primii cinci multipli pentru numerele 15, 20, 25 și 63

- Scrieți doi multipli de trei cifre ai numărului 17.

Rezolvare. Cel mai mic număr de trei cifre este 100. Împărțim 100 la 17 și obținem câtul 5 și restul 15, așadar $100 = 17 \cdot 5 + 15$. Primul multiplu de trei cifre al lui 17 este $17 \cdot 6 = 102$. Alt multiplu de trei cifre poate fi $17 \cdot 7 = 119$.

Reținem

✓ Numărul natural a se poate scrie $a = a \cdot 1$. Putem spune că $a \vdots 1$ și $a \vdots a$, sau, cu alte cuvinte, orice număr natural este divizibil cu 1 și cu el însuși. Numărul 1 și numărul însuși sunt *divizori improprii* și ceilalți divizori ai numărului, dacă există, sunt *divizori proprii*.

✓ Divizorii unui număr natural sunt numere naturale mai mici sau egale cu numărul dat. Un număr natural are un număr finit de divizori.

✓ Numărul 0 este divizibil cu orice număr natural, deoarece $0 = a \cdot 0$. Scriem $a \mid 0$. Numărul 0 este multiplul tuturor numerelor. Pentru că $a \mid a$, putem spune și că orice număr este propriul său multiplu.

✓ Multiplii nenuli ai unui număr natural sunt numere naturale mai mari sau egale cu numărul dat. Un număr natural are un număr infinit de multipli.

Divizori comuni. Multipli comuni

Ana: Andrei, am observat scriind divizorii lui 12, adică **1**, **2**, **3**, 4, **6** și 12, și pe cei ai lui 18, adică **1**, **2**, **3**, **6**, 9 și 18, că o parte dintre ei sunt comuni: **1**, **2**, **3** și **6**.

Andrei: Am verificat și eu pentru 12 și 13, dar cum 13 are divizori pe 1 și 13, observ că cele două numere au divizor comun doar pe 1. Verificăm dacă găsim multipli comuni pentru numerele 12 și 18? Eu îi scriu pentru 12 și tu pentru 18 și vedem ce găsim:

0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ..., 12k, ...
Am scris 12k pentru că orice multiplu al lui k se obține prin înmulțirea lui 12 cu un număr natural k.

0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 136, ..., 18k, ...
Am scris și eu ca tine, 18k, și mă gândesc că, dacă vreau un multiplu al lui 18, de 4 cifre de exemplu, trebuie să înmulțesc cu un k destul de mare.

Multiplii comuni ai lui 12 și 18 sunt 0, 36, 72, 108... deci se pare că sunt multiplii lui 36, adică numerele de forma 36k.

Reținem

✓ 1 este divizorul comun al tuturor numerelor naturale. Două numere naturale pot avea și alți divizori comuni.

✓ 0 este multiplul comun al tuturor numerelor naturale. Două numere naturale au întotdeauna multipli comuni.

Problemă rezolvată

Calculați cel mai mic multiplu comun nenul al numerelor 150 și 200.

Rezolvare. Putem găsi primul multiplu nenul comun al celor două numere calculând multiplii numărului mai mare, adică numere de forma $200k$, unde k este număr natural: 200, 400, 600, 800, ... Dintre acestea vom alege primul număr care se împarte la 150, adică 600. Deci 600 este cel mai mic multiplu comun nenul al numerelor 150 și 200.

Probleme propuse

●

1. Înlocuiți spațiile punctate cu unul dintre cuvintele „divizor” sau „multiplu”, pentru a obține expresii adevărate:

4 este	...	al lui 8	0 este	...	al lui 15
25 este	...	al lui 5	1 este	...	al lui 5
49 este	...	al lui 7	111 este	...	al lui 37
72 este	...	al lui 9	72 este	...	al lui 18
121 este	...	al lui 11	100 este	...	al lui 100

2. Scrieți toți divizorii numerelor 14, 25, 28, 32, 81 și 120. Precizați care sunt divizorii proprii și care sunt divizorii improprii ai fiecărui număr.

3. Determinați suma divizorilor numărului 30.

4. Scrieți numerele divizibile cu 10, cel puțin egale cu 1985 și cel mult egale cu 2010.

5. Scrieți primii 5 multipli ai numerelor 8, 18, 21, 35, 64 și 111.

6. Scrieți 5 multipli de trei cifre ai numărului 21.

7. Scrieți divizorii numerelor 9 și 15. Care sunt divizorii comuni ai celor două numere?

8. Scrieți multiplii numerelor 9 și 15 mai mici decât 100. Care dintre aceștia sunt multiplii comuni?

9. Fără a scrie divizorii fiecărui număr, spuneți care este cel mai mic și cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 2 și 4; b) 5 și 10; c) 4 și 6;
d) 2, 3 și 6; e) 4, 6 și 8; f) 10, 20, 30 și 40;
g) 5, 10, 15, 20 și 25.

10. Fără a scrie multiplii fiecărui număr, determinați cel mai mic multiplu comun nenul al numerelor:

a) 2 și 4; b) 5 și 10;
c) 4 și 6; d) 2, 3 și 6;
e) 4, 6 și 8; f) 10, 20, 30 și 40;
g) 5, 10, 15, 20 și 25.

11. Pentru fiecare număr din perechile următoare scrieți divizorii, apoi scrieți divizorii comuni:

a) 36 și 48; b) 64 și 81;
c) 100 și 120; d) 144 și 44.

12. Scrieți primii patru multipli ai numerelor din perechile următoare, apoi scrieți primul multiplu comun nenul:

a) 36 și 24; b) 4 și 3; c) 100 și 150.

●●

13. Scrieți toți multiplii numărului 121 cuprinși între 1017 și 1500.

14. Calculați suma tuturor multiplilor de trei cifre ai numărului 25.

Indicație. Cel mai mic multiplu de 3 cifre al lui 25 este $100 = 25 \cdot 4$, iar cel mai mare este $975 = 25 \cdot 39$; $S = 25(4 + 5 + 6 + \ldots + 39)$.

15. Arătați că numerele de forma $\overline{abab}$, scrise în baza 10, se divid cu $\overline{ab}$.

Indicație. Scrieți descompunerea numărului $\overline{abab}$ ca un produs dintre un număr și $\overline{ab}$.

16. Calculați restul împărțirii unui număr de forma $\overline{ababab}$, scris în baza 10, cu 7. Se divide numărul $\overline{ababab}$ la 7?

17. Stabiliți dacă numerele de forma $\overline{aaaa}$ sunt divizibile cu 11.

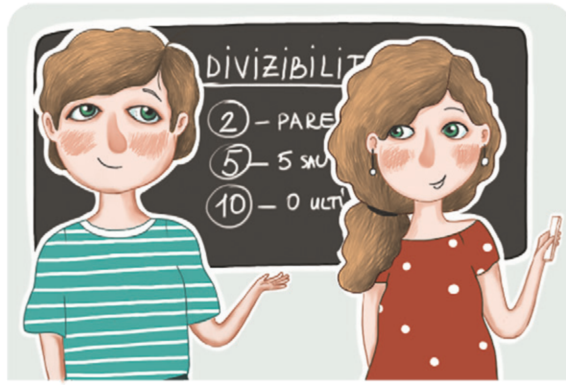
Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9

Andrei: Ana, cred că azi vom face o lecție foarte simplă. Când crezi tu că un număr se divide cu 2?

Ana: Un număr se divide cu 2 dacă se împarte exact la 2. Toate numerele pare se divid cu 2.

Andrei: Iar numerele care se divid cu 5 trebuie să se împartă exact la 5. Cred că sunt numerele care au ultima cifră 5 sau 0.

Ana: Numerele care se împart exact la 10 este clar că trebuie să aibă ultima cifră 0. Va fi o lecție frumoasă!



Reținem

✓ **Criteriul de divizibilitate cu 2:**
Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară (0, 2, 4, 6, 8), atunci acel număr natural se divide cu 2.
Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este o cifră pară (adică este o cifră impară), atunci acel număr natural nu se divide cu 2.

✓ **Criteriul de divizibilitate cu 5:**
Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.
Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este nici 5, nici 0, atunci acel număr nu este divizibil cu 5.

✓ **Criteriul de divizibilitate cu 10:**
Un număr natural este divizibil cu 10 dacă are ultima cifră egală cu zero. Un număr divizibil cu 10 este un număr care este divizibil și cu 2 și cu 5.
Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0, atunci acel număr nu este divizibil cu 10.

✓ **Criteriul de divizibilitate cu 10^n:**
Un număr natural este divizibil cu 10^n dacă are ultimele n cifre egale cu zero.
Dacă un număr natural nu se termină cu n zerouri, atunci acel număr nu este divizibil cu 10^n.

Exemple:
Din șirul de numere 52, 65, 120, 186, 195, 200, 214, 225, 308, 400, 1000, 1500, 70000, cele divizibile cu ...

... 2 sunt:	... 5 sunt:	... 10 sunt:	... 100 sunt:
52, 120, 186, 200, 214, 308, 400, 1000, 1500, 70000 – pentru că au ultima cifră pară	65, 120, 195, 200, 225, 400, 1000, 1500, 70000 pentru că au ultima cifră 0 sau 5	120, 200, 400, 1000, 1500, 70000 pentru că au ultima cifră 0	200, 400, 1000, 1500, 70000 pentru că au ultimele două cifre egale cu 0

Numerele 1000, 70000 au ultimele 3 cifre egale cu 0, deci se divid cu 1000, iar numărul 70000 se divide cu 10000.

Probleme rezolvate

- Numerele divizibile cu 5 situate între 42 și 56 sunt: 45, 50 și 55.
- Numerele divizibile cu 2 situate între 42 și 56 sunt: 44, 46, 48, 50, 52 și 54.
- Între 99 și 156 există 6 numere divizibile cu 10 și acestea sunt: 100, 110, 120, 130, 140 și 150
- Determinați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 2. Există numere de forma $\overline{x5}$ care se divid cu 2?

Rezolvare. a) Un număr natural de forma $\overline{12x}$ se divide cu 2 dacă (conform criteriului) x este cifră pară, adică 0, 2, 4, 6, 8. Numerele cerute sunt: 120, 122, 124, 126 și 128.

b) Numerele de forma $\overline{x5}$ au ultima cifră 5, deci nu există astfel de numere care să fie divizibile cu 2.

- Câte numere de forma $\overline{3ab}$, scrise în baza 10, divizibile cu 5 există?

Rezolvare. Dacă $\overline{3ab} \vdots 5$ atunci ultima cifră, b, poate lua două valori (0 sau 5), iar a poate fi oricare dintre cele 10 cifre, deci există $2 \cdot 10 = 20$ astfel de numere.

Reținem

✓ **Criteriul de divizibilitate cu 3:** *Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.* *Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 3, atunci acel număr nu este divizibil cu 3.*	✓ **Criteriul de divizibilitate cu 9:** *Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr este divizibil cu 9.* *Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 9, atunci acel număr nu este divizibil cu 9.*

Probleme rezolvate

- Fie numerele 15, 30, 72, 99, 120, 222, 126, 428, 567, 301, 828. Care numere se divid cu 3? Dar cu 9? Justificați răspunsul.

Rezolvare. Numerele 15 $(1 + 5 = 6)$, 30, 72, 99, 120, 222, 126, 567, 828 $(8 + 2 + 8 = 18)$ au suma cifrelor divizibilă cu 3, deci se divid cu 3. Numerele 72, 99, 126, 567, 828 au suma cifrelor divizibilă cu 9, deci se divid cu 9.

- Numerele divizibile cu 3 cuprinse între 44 și 62 sunt: 45, 48, 51, 54, 57 și 60. Observăm că ele cresc din 3 în 3.

- Numerele divizibile cu 9 cuprinse între 44 și 80 sunt: 45, 54, 63 și 72. Observăm că ele cresc din 9 în 9.

- Determinați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3.

Rezolvare. Un număr natural de forma $\overline{12x}$ se divide cu 3 dacă (conform criteriului) suma cifrelor sale se divide cu 3, adică $1 + 2 + x = 3 + x$ se divide cu 3. Așadar $3 + x$ poate fi 3, 6, 9, 12, 15... Dacă $3 + x = 3$, $x = 0$; dacă $3 + x = 6$, $x = 3$; dacă $3 + x = 9$, $x = 6$; dacă $3 + x = 12$, $x = 9$; dacă $3 + x = 15$, $x = 12$, însă nu este bun pentru că 12 nu este cifră. Numerele cerute sunt: 120, 123, 126 și 129.

- Determinați numerele naturale de forma $\overline{25x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 9.

Rezolvare. Un număr natural de forma $\overline{25x}$ se divide cu 9 dacă (conform criteriului) suma cifrelor sale se divide cu 9, adică $2 + 5 + x = 7 + x$ se divide cu 9. Așadar $7 + x$ poate fi 9, 18, 27... Dacă $7 + x = 9$, $x = 2$; dacă $7 + x = 18$, $x = 11$, însă nu este bun pentru că 11 nu este cifră. Numărul cerut este 252.

- Determinați numerele naturale de forma $\overline{1xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 2 și cu 9.

Rezolvare. Aplicăm criteriul de divizibilitate cu 2 pentru a afla ultima cifră; $2 \mid \overline{1xy}$ dacă y este cifră pară, adică 0, 2, 4, 6 și 8.

Folosim criteriul de divizibilitate cu 9 pentru fiecare valoare a lui y; $9 \mid \overline{1x0}$ dacă $1 + x + 0 = 1 + x$ se divide cu 9 și obținem $x = 8$, adică numărul 180; $9 \mid \overline{1x2}$ dacă $1 + x + 2 = 3 + x$ se divide cu 9 și obținem $x = 5$, adică numărul 152.

Procedăm la fel pentru celelalte valori ale lui y și obținem numerele: 144, 126, 108 și 198.

Activitate pe echipe

Formați echipe și lucrați împreună următoarea problemă:

Scrieți dacă este adevărat sau fals. Dacă este fals, menționați un contraexemplu.

a) Orice număr divizibil cu 3 este divizibil și cu 9.

b) Orice număr divizibil cu 3 și cu 5 este divizibil cu 15.

c) Orice număr divizibil cu 2 și cu 10 este divizibil cu 12.

Probleme propuse

●

1. Fie numerele: 6, 10, 12, 15, 21, 27, 30, 49, 56, 63, 75, 100, 110, 130, 135, 168, 225, 250, 360, 450, 465, 729, 1000. Copiați în caiete tabelul de mai jos și completați-l după model.

Numere divizibile cu 2	6,
Numere divizibile cu 5	10,
Numere divizibile cu 10	10,
Numere divizibile cu 3	6,
Numere divizibile cu 9	27,

2. Care dintre numerele date la exercițiul 1.:

a) nu este divizibil nici cu 2, nici cu 5, nici cu 10, nici cu 3, nici cu 9?

b) este divizibil și cu 2 și cu 3?

c) este divizibil și cu 5 și cu 3?

d) este divizibil și cu 5 și cu 9?

3. Scrieți numerele divizibile cu:

a) 2, cuprinse între 125 și 141.

b) 5, cuprinse între 201 și 246.

c) 10, cuprinse între 1003 și 1111.

d) 3, cuprinse între 125 și 141.

e) 9, cuprinse între 201 și 246.

4. Care este cel mai mic și care este cel mai mare mare număr natural:

a) de două cifre diferite, divizibil cu 3?

b) de trei cifre, divizibil cu 9?

c) de patru cifre, divizibil cu 100?

d) de trei cifre, divizibil cu 5?

e) de două cifre diferite, divizibil cu 2?

●●

5. Determinați numerele naturale de forma $\overline{50x}$, scrise în baza 10, care se divid cu:

a) 2; b) 3; c) 5; d) 9; e) 10.

6. O scară are 20 de trepte numerotate de la 1 la 20 (treapta 1 este la sol). Un șoricel sare din două în două trepte, iar un motan sare din 5 în 5 trepte. Scrieți numerele treptelor călcate de șoricel și pe cele călcate de motan. Care dintre acestea sunt comune?

7. Folosind cifrele 0, 1, 4, 5, 6 și 9 formați numere de trei cifre diferite care să îndeplinească condițiile:

a) să fie divizibile cu 2 și cu 3;

b) să fie divizibile cu 9 și să nu fie divizibile cu 5;

c) să fie divizibile cu 10 și cu 3;

d) să fie divizibile cu 2, cu 5 și cu 3.

8. a) Arătați că suma a două numere naturale consecutive nu se divide cu 2.

b) Arătați că produsul a două numere naturale consecutive se divide cu 2.

c) Arătați că suma a trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

d) Arătați că produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

e) Arătați că suma a cinci numere naturale consecutive se divide cu 5.

9. Determinați numerele naturale de forma $\overline{x5y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3.

10. Determinați numerele naturale de forma $\overline{1xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 9.

11. Determinați numerele naturale de forma $\overline{x50}$, scrise în baza 10, care se divid cu 2. Câte numere sunt?

●●●

12. Determinați numerele naturale de forma $\overline{x71y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3 și cu 5.

13. Determinați numerele naturale de forma $\overline{1x5y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3 și nu se divid cu 9.

14. Arătați că numărul $a = 3^6 + 621$ se divide cu 9.

15. a) Calculați $1 + 2 + 2^2 + 2^3$.

b) Arătați că numărul $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19}$ se divide cu 3 și cu 5.

Indicație. b) Grupați termenii câte 4 și fiecare grupă se divide cu 15, deci cu 3 și cu 5.

16. Arătați că numărul $a = 7^{n+2} \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 7^{n+1}$, unde n este număr natural, este divizibil cu 2, cu 3, cu 5 și cu 10.

Indicație. Scoateți factor comun 7 și 5 la exponenții mai mici.

Numere prime. Numere compuse

✓ Dacă un număr natural nenul, diferit de 1, are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși, atunci el este *număr prim*.
Altfel spus: un număr natural mai mare decât 1 este număr prim dacă admite numai divizori improprii.
✓ Numerele naturale mai mari decât 1 care nu sunt prime sunt *numere compuse*.
Altfel spus: un număr natural mai mare decât 1 este număr compus dacă admite și divizori proprii.

Exemplu:

numărul	2	3	4	5	6
divizorii numărului	1 și 2	1 și 3	1, 2 și 4	1 și 5	1, 2, 3 și 6
prim / compus	prim	prim	compus	prim	compus

Activitate în echipe

Formați echipe de câte trei elevi și verificați dacă numerele de la 7 la 15 (inclusiv 7 și 15) sunt numere prime sau compuse. După ce fiecare membru al echipei verifică câte 3 numere din listă, discutați rezultatele obținute. Găsiți o metodă de a verifica dacă numerele 251 și 313 sunt prime.

Portofoliu

- Căutați pe internet și realizați o listă cu numerele prime până la 100. Adăugați-o la portofoliile voastre și folosiți-o când aveți nevoie.
- Căutați pe internet informații despre *Ciurul lui Eratostene*.

Problemă rezolvată

- Verificați dacă numărul 113 este prim.

Rezolvare. Verificăm folosind criteriile de divizibilitate că 113 nu se divide cu 2, cu 3 și cu 5, deci nu se divide nici cu multiplii acestora. Împărțind 113 la 7 obținem câtul 16 și restul 1, deci 113 nu se divide cu 7. Împărțind 113 la 11 obținem că $113 = 11 \cdot 10 + 3$, deci 113 nu se divide cu 11. Deoarece câtul (10) este mai mic decât împărțitorul (11), nu mai continuăm împărțirile. Așadar 113 nu se divide cu niciun număr prim mai mic sau egal cu 11. În concluzie: 113 nu se divide cu niciun număr natural diferit de 1 mai mic sau egal cu 11, nici cu un număr natural mai mare decât 11, deci este număr prim.

Reținem

Cum recunoaștem dacă un număr natural este prim?

- Împărțim numărul, pe rând, la toate numerele prime în ordine crescătoare, începând cu 2, până când obținem un cât mai mic sau egal cu împărțitorul. Dacă numărul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident că el nu este prim. Dacă numărul considerat nu se divide cu niciunul dintre aceste numere prime, atunci el este număr prim.
- Singurul număr prim par este 2. Celelalte numere prime sunt numere impare.

Probleme rezolvate

- Suma dintre un număr prim și un număr natural este 29. Determinați numerele.

Rezolvare. Considerăm, pe rând, numerele prime mai mici decât 29: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 și 29. Dacă $2 + a = 29$, obținem $a = 27$. Repetăm procedeul pentru toate numerele prime mai mici ca 29 și obținem perechile de numere: (2, 27), (3, 26), (5, 24), (7, 22), (11, 18), (13, 16), (17, 12), (19, 10), (23, 6), (29, 0).

- Determinați numerele prime a și b care verifică relația $9a + 4b = 62$.

Rezolvare. Observăm că $4b$ și 62 sunt numere pare, de unde deducem că și $9a$ trebuie să fie număr par. Singurul număr prim par este 2, deci $9a$ este număr par numai dacă $a = 2$. Obținem $18 + 4b = 62$, adică $4b = 44$. Numerele cerute sunt 2 și 11.

Probleme propuse

●

1. Căutați în tabele matematice numerele prime dintre 320 și 500.

2. Suma dintre două numere prime este 33. Care sunt numerele?

3. Produsul a două numere prime este 91. Determinați cele două numere.

4. Suma dintre un număr prim de două cifre diferite și un număr natural impar este 512. Determinați numerele. (Puteți folosi lista cu numere prime mai mici decât 100 pe care ați făcut-o pentru portofoliu)

5. Produsul dintre un număr natural impar și un număr prim este 254. Determinați numerele.

6. Suma dintre un număr prim de două cifre identice și un număr natural este 1125. Determinați numerele.

7. Suma dintre un număr prim de două cifre consecutive și un număr natural este 90. Determinați numerele. Câte soluții are problema?

Indicație. Considerăm, pe rând, numerele prime de două cifre consecutive mai mici decât 90: 23, 43, 67, 89.

●●

8. Suma dintre un număr prim și un număr natural multiplu al lui 5 este 235. Determinați numerele.

Indicație. Fie a numărul prim și $5k$ numărul natural multiplu al lui 5. Atunci $a + 5k = 235$ și, cum numerele 235 și 5k se divid cu 5, înseamnă că și numărul a se divide cu 5. Cele două numere sunt 5 și 230.

9. Determinați numerele prime a și b care verifică relația $3a + 7b = 97$.

10. Determinați numerele prime a și b care verifică relația $4a + 3b = 63$.

Probleme recapitulative

●

1. Scrieți numerele divizibile cu 2 din șirul de numere naturale, apoi pe cele divizibile cu 5: 1; 2; 5; 10; 12; 15; 20; 37; 130; 239; 345; 450; 2010.

2. Scrieți toți divizorii numerelor: 21; 32; 49; 54; 99.

3. Scrieți primii patru multipli ai numerelor: 21; 37; 75.

4. Scrieți numerele divizibile cu 3 cuprinse între 101 și 115.

5. Scrieți numerele divizibile cu 9 cuprinse între 111 și 136.

6. Scrieți cel mai mic și cel mai mare multiplu de patru cifre ai numărului 65.

7. Scrieți doi multipli de trei cifre și doi multipli de patru cifre ai numărului 49.

8. Determinați numerele de forma $\overline{1x2x}$ divizibile cu: a) 2; b) 3; c) 5; d) 9; e) 10.

9. Folosind cifrele 1, 2 și 3 o singură dată, scrieți: a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 3; c) numerele divizibile cu 6.

10. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre divizibil cu 2? Dar cu 3? Dar cu 5? Dar cu 10? Dar cu 9? Dar cu 100?

●●

11. La un concurs participă 100 de fete și 35 de băieți. Ei sunt grupați în echipe care au același număr de copii, iar fiecare echipă are același număr de fete.

a) Arătați că se pot forma 5 echipe.

b) Arătați că nu se pot forma 10 echipe.

12. Bunica le împarte lui Mihai și verilor lui, în mod egal, 24 de nuci, 20 de mere și 16 pere. Câți veri are Mihai și câte fructe de fiecare fel a primit fiecare?

13. Determinați numărul de forma $\overline{aa}$ știind că este divizibil cu 2 și cu 3.

14. Determinați toate numerele de forma $\overline{1x}$ care sunt divizibile cu 3, iar suma cifrelor este divizibilă cu 3.

15. Arătați că numărul $4^2 \cdot 5^5 + 1$ nu este prim.

16. Determinați numerele prime a, b, c, știind că $3a + 3b + 4c = 30$.

●●●

17. Arătați că numărul $A = 3^{n+3} + 3^{n+2} + 5 \cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 153, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Indicație. Scoateți factor comun.

18. Arătați că $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{99}$ este divizibil cu 15.

Indicație. Grupați termenii în grupe care se divid cu 15.

19. Arătați că numerele de forma $a = 72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde n este număr natural nenul.

20. Arătați că numerele de forma $a = 2^{n+3}5^{n+1} - 1$ se divid cu 3 și nu se divid cu 9, oricare ar fi numărul natural n.

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 30 de minute.

1. Verificați care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:
$2 \mid 234$, $5 \mid 125$, $3 \mid 134$, $10 \mid 230$, $9 \mid 567$, $4 \mid 234$, $100 \mid 34000$, $6 \mid 1236$. *20 puncte*

2. Scrieți toți divizorii numărului 24. *15 puncte*

3. Scrieți cel mai mic și cel mai mare multiplu de două cifre ai numărului 12. *20 puncte*

4. Folosind cifrele 4, 5 și 0, o singură dată, scrieți:
a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 5; c) numerele divizibile cu 3. *20 puncte*

5. Suma dintre un număr prim și un număr par este 264. Determinați numerele. *15 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Verificați care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:
$2 \mid 134$, $5 \mid 601$, $245 \vdots 3$, $10200 \vdots 100$, $9 \mid 729$, $11 \mid 121$, $100 \mid 5000$, $6 \mid 62478$.

2. Scrieți divizorii numerelor: 8; 32; 64; 125.

3. Scrieți multiplii lui 9 mai mici decât 100.

4. Determinați suma multiplilor numărului 5 cuprinși între 10 și 100.

5. Care este cel mai mic număr de trei cifre divizibil cu 15?

6. Folosind cifrele 2, 0 și 5, o singură dată, scrieți:
a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 5; c) numerele divizibile cu 10.

7. Determinați numerele de forma $\overline{1x5}$ divizibile cu:

a) 2; b) 3; c) 5; d) 9; e) 10.

8. Determinați numerele prime a, b, c, știind că $a + 10b + 12c = 82$.

9. Determinați toate numerele de forma $\overline{abab}$ știind că sunt divizibile cu 5 și îndeplinesc condiția $a + b = 10$.

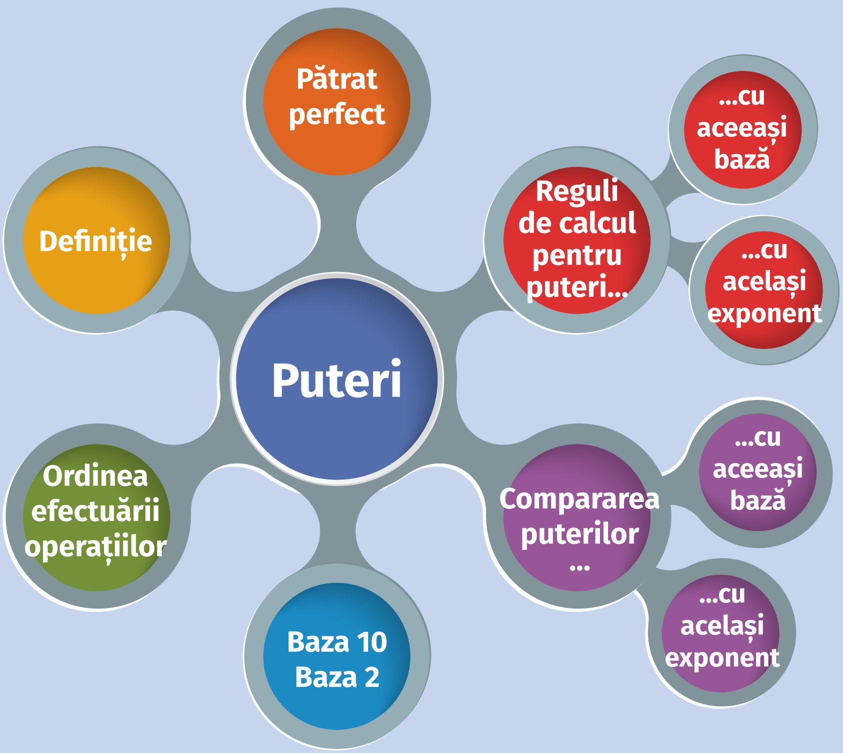
10. Determinați toate numerele de forma $\overline{abcabc}$ știind că sunt divizibile cu 5, iar $a + b + c = 10$, unde a este divizibil cu 2 și $a < b$.

Știați că?

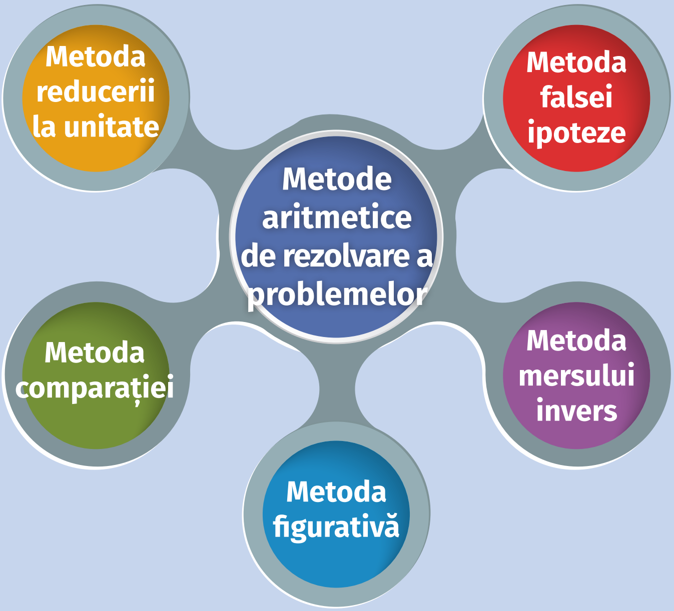
Puteți calcula restul împărțirii la 9 a oricărui număr natural fără a realiza împărțirea. Pentru aceasta, calculați suma cifrelor numărului. Pentru numărul obținut calculați din nou suma cifrelor și, tot așa, până când rezultatul va fi format dintr-o singură cifră. Dacă cifra respectivă este 9, atunci restul este 0, iar dacă este diferită de 9, atunci ea reprezintă restul căutat. Verificați acest lucru pentru numărul 857948755, realizând mai întâi împărțirea pentru a găsi restul și apoi aplicând ideea cu suma cifrelor.

Proprietatea este o consecință a criteriului de divizibilitate cu 9, care ne permite să spunem că orice număr și suma cifrelor sale dau același rest la împărțirea prin 9.

Recapitulare dintr-o privire



Recapitulare dintr-o privire



2

FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

FRACȚII ORDINARE

Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare

Ana și Andrei o ajută pe mama lor să facă celebra tartă de mere după rețeta secretă păstrată în familie de trei generații. Este atât de mare secretul încât, cu părere de rău, nici noi nu am putut afla de la ei rețeta!

Responsabilitatea celor doi frați este curățarea merelor și tăierea acestora în câte 8 bucăți egale. După ce termină de tăiat primul măr, Ana mănâncă o bucată – adică $\frac{1}{8}$ din măr, Andrei mănâncă 2 bucăți – adică $\frac{2}{8}$ din măr, iar pe masă mai rămân restul de 5 bucăți, adică $\frac{5}{8}$ din măr.

Ne amintim

✓ Dacă un întreg este împărțit într-un număr de părți egale, atunci una dintre aceste părți se numește *unitate fracționară*. Una sau mai multe *unități fracționare* luate împreună reprezintă o *fracție ordinară* sau, pe scurt, *fracție*.

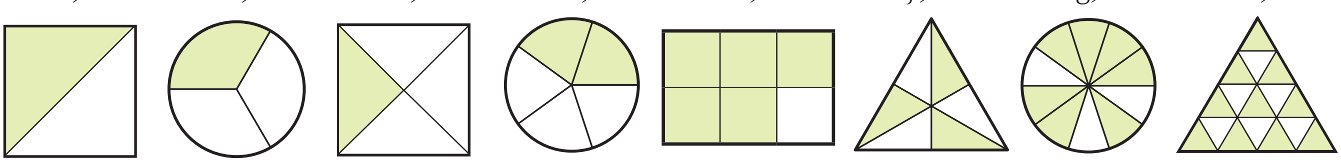
✓ O fracție se scrie sub forma $\frac{a}{b}$, numerele a și b fiind numere naturale, iar numărul b nenul.

a → **numărător** – *ne arată câte părți egale au fost luate din întreg*
— → **linia de fracție**
b → **numitor** – *ne arată în câte părți egale a fost împărțit întregul*

Problemă rezolvată

● Pentru fiecare dintre desenele următoare să scriem ce fracție reprezintă partea colorată și cum se citește ea:

a) *b)* *c)* *d)* *e)* *f)* *g)* *h)*



La punctul a) scriem $\frac{1}{2}$ – *o doime* sau *unu supra doi*. Scrieți voi, pe caiete, pentru următoarele.

Așteptând ca mama lor să pregătească celelalte componente ale tartei, fiecare dintre cei doi frați ia, la întâmplare, câte o parte din merele tăiate. După ce le numără constată că Ana a luat 7 bucăți, Andrei a luat 8, iar în castronul cu mere tăiate au mai rămas 22 de bucăți.

Andrei: Am luat exact numărul de bucăți cu care pot forma un măr întreg!

Ana: Eu am luat mai puține decât un întreg, iar în castron au rămas mai multe decât întregul!

Reținem

O fracție poate fi:

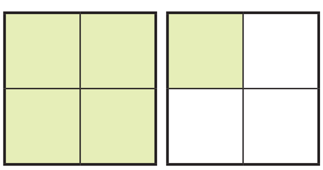
✓ **Echiunitară**	dacă este egală cu unitatea (întregul), adică dacă are numărătorul egal cu numitorul	de exemplu $\frac{8}{8}$
✓ **Subunitară**	dacă este mai mică decât unitatea (întregul), adică dacă are numărătorul mai mic decât numitorul	de exemplu $\frac{7}{8}$
✓ **Supraunitară**	dacă este mai mare decât unitatea (întregul), adică dacă are numărătorul mai mare decât numitorul	de exemplu $\frac{22}{8}$

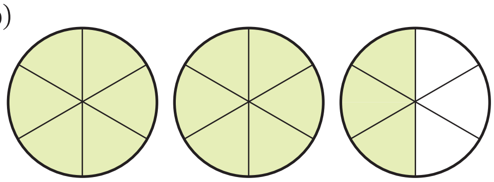
Probleme rezolvate

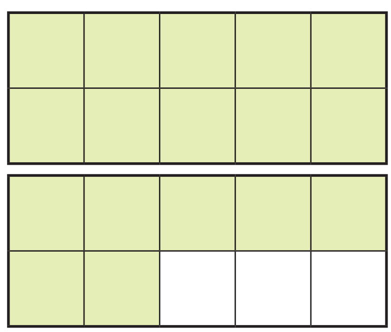
- Dintre toate fracțiile care au la numărător o cifră nenulă, iar la numitor au numărul 5:

fracțiile $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ sunt subunitare	fracția $\frac{5}{5}$ este echiunitară	fracțiile $\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$ sunt supraunitare

- Pentru fiecare dintre desenele următoare să scriem ce fracție reprezintă partea colorată:

a) 

b) 

c) 

La punctul a) scriem $\frac{5}{8}$. Scrieți voi, pe caiete, pentru următoarele desene.

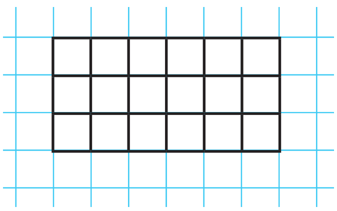
Probleme propuse

●

1. Citiți următoarele fracții: $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{8}{5}, \frac{5}{8}, \frac{17}{10}, \frac{11}{11}$.

2. Reprezentați prin desene fracțiile $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$.

3. Desenați pe caiet un dreptunghi asemănător cu cel din figură și reprezentați, prin colorare, fracțiile: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{13}{18}$ (câte un desen pentru fiecare dintre ele).



4. Scrieți fracția care reprezintă numărul de consoane din numărul de litere ale numelui localității în care locuiți.

5. Scrieți toate fracțiile care se formează folosind oricare dintre numerele 5, 7, 9. Subliniați cu o linie fracțiile echiunitare și cu două linii pe cele subunitare. Ce fel de fracții sunt cele rămase nesubliniate?

6. Determinați:
a) câte doimi conțin 3 întregi;
b) câte treimi conțin 2 întregi;
c) din câte cincimi sunt formați 4 întregi;
d) câți întregi sunt în 12 șesimi și câți sunt în 18 noimi.

7. Scrieți:
a) 3 fracții echiunitare, folosind numere pare;
b) 2 fracții subunitare cu numitorul 7;
c) 4 fracții subunitare cu numărătorul 7;
d) 2 fracții cu numărătorul și numitorul (în această ordine) numere consecutive și precizați dacă ele sunt subunitare sau supraunitare;
e) 3 fracții cu numitorul și numărătorul (în această ordine) numere pare consecutive și precizați ce fel de fracții sunt.

8. Ce fracție dintr-o săptămână reprezintă 3 zile? Ce fracție din luna decembrie reprezintă 3 zile?

●●

9. Scrieți un cuvânt în care litera *a* să reprezinte $\frac{2}{7}$ din numărul de litere ale cuvântului. Scrieți o propoziție în care cuvântul găsit să reprezinte o șesime din numărul de cuvinte.

10. Desenați pe caiet un tabel cu 3 coloane și completați-l cu fracții din următorul șir de fracții, astfel încât pe prima coloană să fie fracțiile echiunitare, pe a doua coloană fracțiile subunitare, iar pe a treia coloană fracțiile supraunitare:

$$\frac{5}{7}, \frac{3^2}{9}, \frac{2^3}{7}, \frac{2^3}{3^2}, \frac{12}{21}, \frac{1}{5^0}, \frac{7^1}{1^7}, \frac{3^4}{9^2}, \frac{125}{5^3}, \frac{4^3}{63}.$$

11. Printre fracțiile $\frac{11}{10}, \frac{8}{4}, \frac{25}{5^2}, \frac{2^5}{4^2}, \frac{121}{11}, \frac{56}{29}, \frac{63}{21}$ sunt unele care reprezintă unul sau mai mulți întregi. Care sunt acestea?

●●●

12. Câte fracții de forma $\frac{\overline{a3}}{41}$ se pot scrie și câte dintre acestea sunt subunitare?

13. Determinați valorile numărului natural n pentru care fracția $\frac{n+1}{7}$ este subunitară.

14. Valoarea numărului natural n pentru care fracția $\frac{11}{n+3}$ este echiunitară este egală cu:

a) 11; b) 10; c) 9; d) 8.

15. Numărul de valori naturale ale lui a pentru care fracția $\frac{9}{2a+1}$ este supraunitară este egal cu:

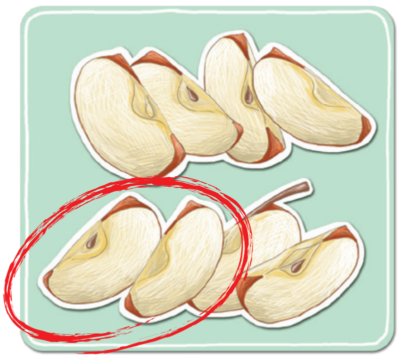
a) 2; b) 4; c) 6; d) 8.

Fracții echivalente. Procente

Așteptând coacerea tartei, Ana și Andrei se provoacă reciproc:

Andrei: Ana, de câte bucăți de măr ai nevoie pentru a forma $\frac{1}{4}$ (un sfert) de măr?

Ana: Îți răspund dacă îmi spui și tu de câte bucăți de măr ai nevoie pentru a forma jumătate de măr!
Mama lor interveni în discuție și le spuse că Ana a format 25% din măr, iar Andrei a format 50% din măr.



$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = 50\%$

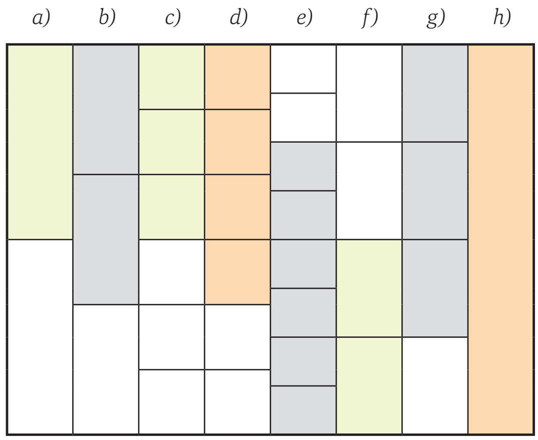
$75\% = \frac{3}{\dots} = \frac{\dots}{8}$

Reținem

- ✓ Fracțiile care reprezintă aceeași parte din întreg se numesc *fracții echivalente*.
- ✓ Dacă fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt echivalente, scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c, d numere naturale, b și d diferite de 0;
- ✓ Pentru a afla dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ verificăm dacă $a \cdot d = b \cdot c$, a, b, c, d numere naturale, b și d diferite de 0;
- ✓ O fracție de forma $\frac{p}{100}$, în care p este un număr natural, se numește *procent* și se scrie sub forma $p\%$.

Probleme rezolvate

Observând desenul alăturat, să completăm tabelul de mai jos cu fracția corespunzătoare părții colorate de pe fiecare coloană.



a)	b)	c)	d)
$\frac{1}{2}$			
e)	f)	g)	h)
$\frac{6}{8}$			

Am completat fracțiile de la a) și e). Completați pe caiete și celelalte fracții, apoi identificați și justificați fracțiile echivalente. Scrieți fracțiile de la a), c), e), f), g) și h) și ca procent.

- Fracții echivalente: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ pentru că reprezintă aceeași parte din întreg sau pentru că $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$;

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

- Scrierea ca procent: $\frac{1}{2} = 50\%$, $\frac{3}{4} = 75\%$, $\frac{1}{1} = 100\%$.

Probleme propuse

●

1. Știm că pentru *15 minute* mai folosim exprimarea *un sfert de oră*. Cum scrieți acest lucru ca o fracție? Ce procent din oră reprezintă cele 15 minte?

2. Propuneți colegului de bancă o problemă asemănătoare cu problema anterioară!

3. Desenați pe caiet un dreptunghi cu lungimea de 6 cm și lățimea de 2 cm și colorați $\frac{4}{12}$ din suprafața lui. Exprimați partea colorată printr-o fracție echivalentă cu fracția $\frac{4}{12}$. Scrieți două fracții care să reprezinte partea necolorată din dreptunghi.

4. Arătați că următoarele fracții sunt echivalente:

a) $\frac{1}{5}$ și $\frac{3}{15}$; b) $\frac{2}{10}$ și $\frac{7}{35}$;

c) $\frac{14}{21}$ și $\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{15}$ și $\frac{4}{20}$;

e) $\frac{5}{15}$ și $\frac{3}{9}$; f) $\frac{4}{10}$ și $\frac{6}{15}$;

g) $\frac{12}{15}$ și $\frac{20}{25}$; h) $\frac{6}{14}$ și $\frac{15}{35}$.

5. Scrieți ca procente fracțiile: $\frac{12}{100}, \frac{35}{100}, \frac{75}{100}, \frac{124}{100}$.

6. Scrieți ca fracții procentele 20%, 45% și 110%. Pentru fiecare fracție scrisă găsiți o fracție echivalentă.

●●

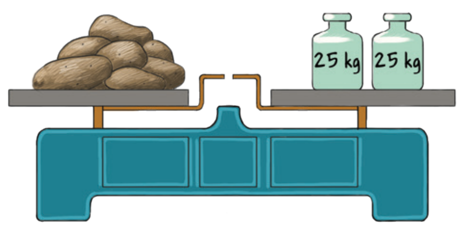
7. Dați exemplu de 2 fracții echivalente cu $\frac{5}{7}$ care să aibă numărătorul de 2 cifre.

8. Determinați numărul natural nenul n astfel încât:

a) $\frac{n}{7} = \frac{6}{21}$; b) $\frac{2}{5} = \frac{10}{n+1}$; c) $\frac{9}{n} = \frac{12}{12}$.

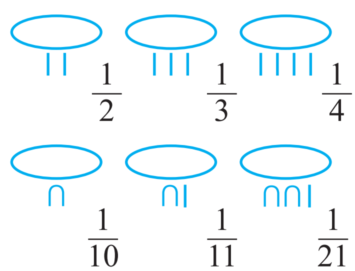
9. Scrieți 80% ca fracție și găsiți trei fracții echivalente cu aceasta, două cu termeni mai mici și una cu termeni mai mari.

10. Pentru a se pregăti de iarnă, bunicii s-au aprovizionat cu 50 kg de cartofi, 30 kg de morcovi, 15 kg de pătrunjel și 5 kg de țelină. Scrieți procentul corespunzător pentru fiecare legumă din cantitatea totală de legume.

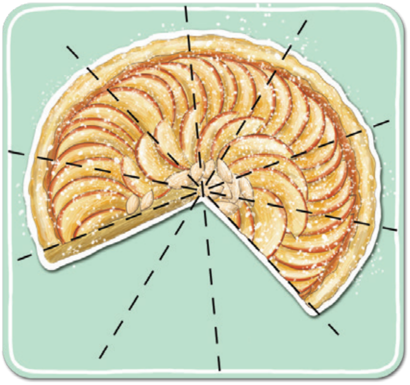


Știați că?

Egiptenii foloseau, în urmă cu aproximativ 4000 de ani, fracții cu numărătorul 1 (fracții alicote). Pentru scriere foloseau o hieroglifă formată dintr-un oval cu semne sub el.



Compararea fracțiilor ordinare. Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor ordinare



Tarta este gata! Cei doi frați, împreună cu mama lor, mănâncă câte o felie din tarta proaspăt tăiată în 10 bucăți. Ei observă că partea mâncată de ei, adică $\frac{3}{10}$ din tartă, este mai mică decât partea rămasă, $\frac{7}{10}$. Fiecare dintre cele 3 părți mâncate este egală cu fiecare dintre cele 7 părți rămase, deci $\frac{3}{10} < \frac{7}{10}$.

Ana: Andrei, mai știi când ai tăiat primul măr în 6 părți egale și mama a spus că sunt prea mari și să tăiem merele în câte 8 bucăți?

Andrei: Da, îmi amintesc. Dacă am vorbi în fracții, $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$, pentru că, dacă împărțim întregul în mai puține părți, acestea sunt mai mari. Iar dacă luăm același număr de părți, înseamnă că luăm mai mult, cum este, de exemplu, $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$.

Reținem

✓ Dintre două fracții cu același numitor, nenul, este mai *mică* fracția cu numărătorul mai *mic*:
$\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ dacă $a < b$, oricare ar fi numerele naturale a, b și numărul natural nenul n.

✓ Dintre două fracții cu același numărător, este mai *mică* fracția cu numitorul mai *mare*:
$\frac{m}{a} < \frac{m}{b}$ dacă $a > b$, oricare ar fi numerele naturale nenule a, b și numărul natural nenul m.

Probleme rezolvate

- Comparăm:

$\frac{14}{27} < \frac{21}{27}$ pentru că au același numitor și $14 < 21$;

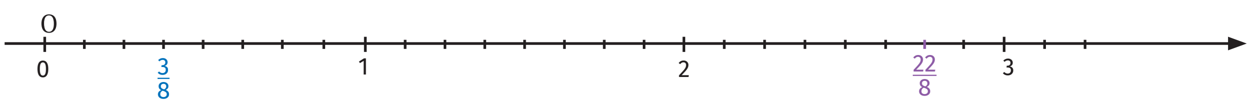
$34\% < 42\%$ pentru că $34 < 42$, procentele fiind fracții cu același numitor 100;

$\frac{7}{13} < \frac{7}{11}$ pentru că $13 > 11$ și au același numărător.

Andrei: Ana, am învățat despre axa numerelor la numere naturale. Oare putem reprezenta pe ea și fracții? De exemplu, cum reprezentăm fracțiile $\frac{3}{8}$ și $\frac{22}{8}$?

Ana: Mă gândesc că, dacă fracția $\frac{3}{8}$ reprezintă 3 părți dintr-un întreg împărțit în 8 părți egale, la fel ar trebui să se întâmple și pe axa numerelor. Hai să împărțim partea de pe axă dintre numerele 0 și 1 în 8 părți egale și să luăm 3 dintre aceste părți.

Andrei: Iar pentru fracția $\frac{22}{8}$ facem două grupe de câte 8 părți, adică doi întregi și încă 6 părți, deci mai numărăm după 2, pe axă, încă 6 părți din cele 8.



Reținem

✓ Pentru a reprezenta pe axa numerelor fracția ordinară $\frac{a}{b}$ (a și b fiind numere naturale, $b \neq 0$), împărțim unitatea de măsură a axei în b părți și considerăm, începând de la origine, un număr de părți egal cu a.

✓ Dacă două fracții sunt reprezentate pe axa numerelor, fracția din dreapta este mai mare decât cea din stânga.

Probleme propuse

●

1. Completați cu unul dintre semnele <, =, >.

a) $\frac{1}{5} \dots \frac{3}{5}$; b) $\frac{4}{7} \dots \frac{2}{7}$; c) $\frac{7}{11} \dots \frac{7}{7}$; d) $\frac{12}{5} \dots 1$;

e) $2 \dots \frac{20}{10}$; f) $\frac{8}{6} \dots \frac{5}{6}$; g) $\frac{10}{6} \dots \frac{15}{9}$; h) $\frac{15}{15} \dots 1$.

2. Dintre următoarele fracții, cea care este mai mare decât fracția $\frac{15}{13}$ este:

a) $\frac{14}{13}$; b) $\frac{15}{14}$; c) $\frac{15}{12}$; d) $\frac{13}{13}$.

3. Ordonați crescător fracțiile:

$$\frac{5}{17}, \frac{18}{17}, \frac{12}{17}, \frac{3}{17}, \frac{43}{17}.$$

Indicație. Fracțiile au același numitor, deci ordinea lor crescătoare este dată de ordinea crescătoare a numărătorilor.

4. Ordonați crescător fracțiile:

$$\frac{15}{37}, \frac{9}{37}, \frac{7}{37}, 1, \frac{43}{37}, \frac{19}{37}, \frac{11}{37}.$$

5. Comparați fracțiile:

a) $\frac{23}{51}$ cu $\frac{17}{51}$; b) $\frac{11}{9}$ cu $\frac{15}{9}$; c) $\frac{15}{17}$ cu $\frac{15}{19}$;

d) $\frac{7}{23}$ cu $\frac{9}{23}$; e) $\frac{31}{32}$ cu 1; f) $\frac{19}{117}$ cu $\frac{55}{117}$;

g) $\frac{25}{40}$ cu $\frac{25}{35}$; h) 2 cu $\frac{38}{20}$.

●●

6. Ordonați descrescător numerele:

$$\frac{29}{7}, \frac{29}{31}, \frac{29}{11}, \frac{29}{9}, \frac{29}{17}, \frac{29}{20}, 1.$$

8. Reprezentați pe axa numerelor fracțiile:

a) $\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{8}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{11}{5}, \frac{15}{5}$.

9. Șirul scris în ordine crescătoare este:

a) $\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{12}{11}, 1$; b) $1, \frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{12}{11}$;

c) $\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{9}{11}, 1, \frac{12}{11}$; d) $\frac{12}{11}, 1, \frac{9}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}$.

10. Folosind reprezentarea pe axa numerelor, comparați fracțiile $\frac{17}{9}$ și $\frac{21}{10}$.

11. Dați exemplu de 3 valori pentru numărul natural x pentru care $\frac{5}{11} > \frac{x}{11}$.

Indicație. Cele două fracții au același numitor, deci 5 trebuie să fie mai mare decât numărul x.

●●●

12. Găsiți toate numerele naturale x în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\frac{17}{23} < \frac{x}{23} < \frac{21}{23}$; b) $\frac{49}{71} < \frac{x+1}{71} < \frac{53}{71}$;

c) $\frac{27}{45} < \frac{27}{x} < \frac{27}{41}$.

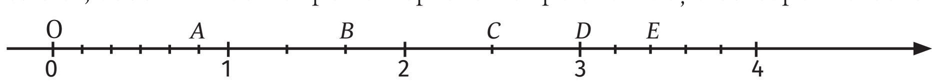
13. Determinați cea mai mare și cea mai mică fracție de forma:

a) $\frac{\overline{ab}}{23}$, unde $\overline{ab}$ este un număr par divizibil cu 3;

b) $\frac{23}{\overline{ab}}$, unde $\overline{ab}$ este un număr par divizibil cu 5.

14. Reprezentați pe axă fracțiile $\frac{5}{8}$ și $\frac{5}{3}$ și precizați, pentru fiecare dintre ele, între ce numere naturale consecutive se află. Care dintre cele două fracții este mai aproape de numărul 1?

7. Completați tabelul, asociind fiecărui punct reprezentat pe axă fracția corespunzătoare:



Punctul	A	B	C	D	E
Fracția					

Introducerea și scoaterea întregilor din fracție

Ana: Andrei, în lecția trecută, când am reprezentat pe axă fracția $\frac{22}{8}$, ai spus să facem două grupe de câte 8 părți, adică doi întregi, și că mai rămân încă 6 părți, adică fracția $\frac{6}{8}$.

Andrei: Așa este, Ana. Știi cum mi-am dat seama de asta? Împărțind 22 la 8 am observat că obțin câtul 2 și restul 6. Deci fracția $\frac{22}{8}$ este totuna cu 2 întregi și $\frac{6}{8}$ (2 întregi și șase optimi).

Ana: Putem să facem asta doar la fracțiile supraunitare, pentru că acestea reprezintă o cantitate mai mare decât un întreg. Să văd dacă am înțeles! Pentru fracția $\frac{19}{5}$, împart 19 la 5 și obțin $19 = 5 \cdot \underset{\text{câtul}}{3} + \underset{\text{restul}}{4}$, adică pot scoate 3 întregi din fracție și ar rămâne $\frac{4}{5}$.

Reținem

Scoaterea întregilor din fracție	Introducerea întregilor în fracție
O fracție supraunitară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt numere naturale, $n \neq 0$, se poate scrie sub forma $c\frac{r}{n}$, unde c reprezintă câtul și r reprezintă restul împărțirii lui m la n: $$\frac{m}{n} = c\frac{r}{n}$$ scrierea $c\frac{r}{n}$ se citește *c întregi și* $\frac{r}{n}$.	Fiind dată fracția $a\frac{b}{n}$, unde a, b și n sunt numere naturale, iar n este nenul, aceasta se poate scrie sub forma fracției $\frac{m}{n}$, unde $m = a \cdot n + b$: $$a\frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + b}{n}$$

✓ Fracția care rămâne după scoaterea întregilor din fracție este subunitară (restul este mai mic decât împărțitorul).

✓ Numărul de întregi pe care-i scoatem din fracție reprezintă cel mai mare număr natural care este mai mic decât fracția.

Probleme rezolvate

- 25 : 6 = 4 (*câtul*)
  24
  = 1 (*restul*)
  deci $\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$, iar fracția $\frac{25}{6}$ este cuprinsă între numerele naturale 4 și 5;
- $3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5}$, deci $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$;
- $7\frac{23}{17} = \frac{7 \cdot 17 + 23}{17}$, deci $7\frac{23}{17} = \frac{142}{17}$.

Probleme propuse

●

1. Completați tabelul următor conform modelului (scoateți întregii din fracție):

$\frac{11}{4}$	$\frac{31}{8}$	$\frac{47}{11}$	$\frac{72}{15}$	$\frac{127}{19}$	$\frac{521}{8}$	$\frac{3125}{37}$
$2\frac{3}{4}$						

2. Introduceți întregii în fracție:

$$2\frac{3}{7},\ 3\frac{7}{11},\ 5\frac{5}{6},\ 7\frac{12}{5},\ 10\frac{7}{10},\ 15\frac{17}{11}.$$

3. Precizați între care două numere naturale consecutive sunt situate fracțiile:

$$\frac{19}{3},\ \frac{37}{5},\ \frac{39}{7},\ \frac{56}{11}.$$

4. Determinați numărul natural care este cel mai aproape, pe axa numerelor, de fracțiile:

a) $\frac{13}{5}$; b) $\frac{17}{3}$; c) $\frac{17}{4}$; d) $\frac{23}{4}$.

Indicație. a) $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$; fracția este între 2 și 3 pe axă, distanța de la 2 până la $2\frac{3}{5}$ este $\frac{3}{5}$, iar de la $2\frac{3}{5}$ până la 3 este $\frac{2}{5}$, așadar 3 este mai aproape de $\frac{13}{5}$.

5. Comparați:

a) $3\frac{2}{5}$ cu $\frac{18}{5}$; b) $\frac{33}{7}$ cu $4\frac{1}{8}$;

c) $\frac{31}{6}$ cu $\frac{41}{8}$; d) $\frac{38}{7}$ cu $\frac{19}{3}$.

●●

6. Copiați pe caiet și completați spațiile libere:

a) $3\frac{2}{5} = \frac{\dots}{5}$; b) $\dots\frac{7}{9} = \frac{34}{9}$;

c) $5\frac{\dots}{5} = \frac{28}{5}$; d) $4\frac{2}{\dots} = \frac{22}{\dots}$.

7. Arătați că fracția $\frac{27}{6}$ este situată, pe axa numerelor, la mijlocul distanței dintre 4 și 5.

8. Andreea trebuie să introducă întregii în fracția $15\frac{12}{7}$, iar Barbu în fracția $16\frac{5}{7}$. Ei constată că obțin aceeași fracție. Care este aceasta?

Ei se hotărăsc să scoată întregii din fracția obținută, dar doar unul dintre ei obține numărul inițial. Cine este acesta?

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Mi-a plăcut în această unitate	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitit înainte și după test pentru a îmbunătăți

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Probleme recapitulative

1. Scrieți fracțiile subunitare care se pot forma folosind două dintre numerele 7, 15, 21 și 30.

2. Selectați dintre următoarele fracții pe cele supraunitare: $\frac{17}{15}, \frac{2^4}{17}, \frac{51}{3^3}, \frac{1^{10}}{10^1}, \frac{31^7}{31^6}, \frac{\overline{5a}}{23}, \frac{40}{\overline{6b}}$.

3. Scrieți fracția:
a) echiunitară care are suma dintre numărător și numitor egală cu 20;
b) care reprezintă 2 întregi și are numărătorul 14;
c) care reprezintă 3 întregi și are numitorul 9;
d) care este formată din 4 întregi și încă două treimi.

4. Scrieți 35% ca fracție ordinară și arătați că aceasta este echivalentă cu $\frac{7}{20}$.

5. Introduceți întregii în fracție:
a) $5\frac{4}{7}$; b) $6\frac{3}{5}$; c) $8\frac{21}{9}$; d) $2\frac{a}{11}$, a număr natural.

6. Comparați:
a) $\frac{7}{9}$ cu $\frac{11}{9}$; b) $2\frac{3}{7}$ cu $\frac{18}{7}$; c) $\frac{15}{23}$ cu $\frac{15}{26}$;
d) 3 cu $\frac{59}{20}$; e) $3\frac{5}{9}$ cu $3\frac{12}{10}$; f) $4\frac{11}{21}$ cu 5.

7. Determinați valorile numărului natural n pentru care fracția $\frac{2n-3}{15}$ este subunitară.

8. Despre fracția $\frac{\overline{ab}+5}{37}$ se știe că este echiunitară. Arătați că $a > b$.

9. Determinați numerele naturale nenule a și b, $a < b$, pentru care fracția $\frac{5}{a+b}$ este supraunitară.

10. Deteminați valorile, numere naturale, ale lui n pentru care:
a) $\frac{5}{12} < \frac{n}{12} < \frac{11}{12}$; b) $3 < \frac{n}{10} < 3\frac{5}{10}$.

11. Determinați numerele naturale consecutive între care se află fracțiile:
a) $\frac{13}{15}$; b) $3\frac{3}{11}$; c) $\frac{73}{7}$; d) $\frac{157}{21}$.

12. Ordonați crescător: $\frac{17}{10}, \frac{11}{10}, 1, \frac{8}{10}, 3\frac{2}{10}, \frac{21}{10}, 2$.

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 30 de minute.

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Valoarea numărului natural nenul a pentru care fracțiile $\frac{4}{20}$ și $\frac{7}{a}$ sunt echivalente este egală cu:
a) 20; b) 25; c) 30; d) 35. *10 puncte*

2. Dintre următoarele valori ale numărului nenul n, cea pentru care fracția $\frac{15}{n}$ este supraunitară este:
a) 16; b) 15; c) 14; d) 0. *10 puncte*

3. Prin scoaterea întregilor din fracția $\frac{47}{11}$ obținem:
a) $4\frac{3}{11}$; b) $3\frac{4}{11}$; c) $3\frac{14}{11}$; d) $11\frac{3}{4}$. *10 puncte*

Scrieți rezolvările complete.

4. Determinați numerele naturale consecutive între care se află fracția $\frac{37}{5}$. *20 puncte*

5. Determinați numerele naturale nenule a, b, cu $a < b$, pentru care fracția $\frac{5}{a+b}$ este echiunitară. *20 puncte*

6. Ordonați crescător numerele $\frac{7}{15}, \frac{18}{15}, \frac{4}{15}, 1\frac{1}{15}, 1, \frac{11}{15}, \frac{32}{15}, 2$. *20 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Scrieți toate fracțiile care au numărătorul egal cu 3 și numitorii mai mici decât 6. Subliniați cu o linie fracțiile subunitare și cu două linii fracțiile supraunitare din șirul de fracții obținut. Ce fel de fracție este cea rămasă nesubliniată?

2. Dintre toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime de o cifră, alegeți pe cele subunitare și, respectiv, pe cele supraunitare.

3. Considerăm fracția $\frac{a+5}{15}$. Precizați două valori ale numărului natural a pentru care fracția este subunitară și două valori pentru care fracția este supraunitară.

4. Determinați numărul natural n pentru care fracțiile următoare sunt echiunitare:

a) $\frac{n-2}{7}$; b) $\frac{13}{n+2}$; c) $\frac{2n}{22}$; d) $\frac{19}{2n+1}$.

5. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$, unde m este un divizor al lui 15 și n este un divizor al lui 21. Identificați printre acestea perechi de fracții echivalente.

6. Completați spațiile goale astfel încât să aibă loc echivalențele:

a) $\frac{1}{7} = \frac{3}{\dots}$; b) $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{10}$; c) $\frac{25}{\dots} = \frac{5}{6}$; d) $\frac{\dots}{48} = \frac{2}{8}$;

e) $\frac{11}{\dots} = \frac{55}{30}$; f) $\frac{8}{12} = \frac{20}{\dots}$; g) $\frac{12}{16} = \frac{15}{\dots}$; h) $\frac{10}{15} = \frac{\dots}{12}$.

7. Comparați:

a) $\frac{7}{15}$ cu $\frac{9}{15}$; b) $\frac{16}{23}$ cu $\frac{11}{23}$; c) $\frac{9}{5}$ cu $\frac{9}{7}$; d) $\frac{17}{25}$ cu $\frac{17}{11}$;

e) $\frac{15}{12}$ cu 1; f) $\frac{14}{17}$ cu 1; g) $2\frac{3}{11}$ cu $\frac{20}{11}$; h) $1\frac{7}{10}$ cu 2.

8. Pentru fiecare dintre următoarele fracții găsiți o fracție care să fie mai mare și una care să fie mai mică. În fiecare dintre situații trebuie să respectați condiția precizată.

a) $\frac{\dots}{12} < \frac{7}{12} < \frac{\dots}{12}$; b) $\frac{13}{\dots} < \frac{13}{8} < \frac{13}{\dots}$; c) $\frac{15}{\dots} < \frac{15}{19} < \frac{\dots}{19}$.

9. Ordonați crescător fracțiile $\frac{17}{25}, \frac{8}{25}, \frac{4}{25}, 1, \frac{21}{25}, \frac{37}{25}, \frac{14}{25}$ și descrescător fracțiile $\frac{43}{17}, \frac{43}{53}, \frac{43}{13}, \frac{43}{21}, \frac{43}{8}, \frac{43}{23}, 1$.

10. Determinați cel mai mare număr natural mai mic decât:

a) $\frac{42}{5}$; b) $\frac{73}{7}$; c) $\frac{108}{11}$.

11. Determinați cel mai mic număr natural mai mare decât:

a) $\frac{47}{6}$; b) $\frac{87}{7}$; c) $\frac{114}{12}$.

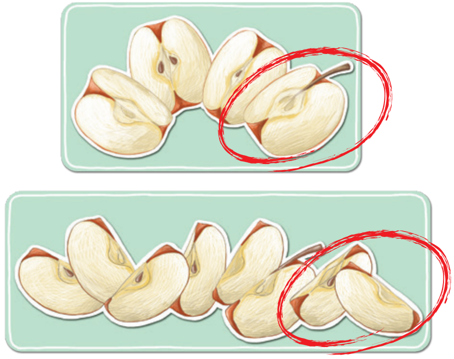
12. Scrieți două fracții cu numitorul 7, poziționate pe axă între numerele naturale 4 și 5.

13. Scrieți o fracție cu numărătorul 33, situată între numerele naturale 6 și 7.

14. Stabiliți între ce două numere naturale consecutive se află fracțiile:

a) $\frac{23}{3}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $\frac{28}{11}$; d) $\frac{19}{2}$.

Amplificarea și simplificarea fracțiilor



Andrei: Ana, când am învățat despre fracții echivalente am observat că, la unele dintre ele, există o legătură între numărători și numitori. De exemplu, la $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ a doua fracție este formată din numere duble celor de la prima fracție.

Ana: Da, ca atunci când m-ai pus să formez un sfert de măr și am luat 2 optimi. Hai să mai încercăm la o fracție, cu alt număr. Dacă triplăm numărătorul și numitorul fracției $\frac{3}{5}$ obținem $\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15}$. Fracțiile $\frac{3}{5}$ și $\frac{9}{15}$ sunt echivalente pentru că $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$.

Reținem

✓ A *amplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a obține o nouă fracție prin înmulțirea numărătorului și a numitorului fracției date cu acel număr. Cele două fracții sunt echivalente.

✓ Acest lucru se scrie sub forma

$${}^{n)}\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$$, unde a, b, n sunt numere naturale, $b \neq 0$ și $n \neq 0$.

Exemple.
- ${}^{3)}\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$;
- ${}^{4)}\frac{7}{11} = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot 11} = \frac{28}{44}$;
- ${}^{x)}\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$; $x = 5$;
- ${}^{11)}\frac{a}{8} = \frac{55}{88}$, $a = 5$.

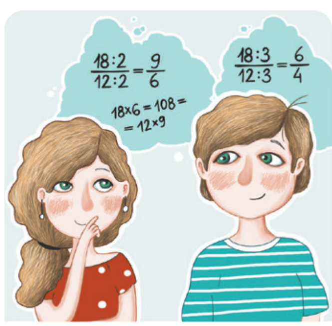
Activitate în perechi

Compuneți o fracție pentru colegul de bancă pe care să o amplifice cu un număr de o cifră ales de tine! Verificați dacă răspunsul lui este corect.

Ana și Andrei se hotărăsc să verifice dacă obțin fracții echivalente și atunci când folosesc împărțire în loc de înmulțire. Amândoi folosesc fracția $\frac{18}{12}$ și încearcă să împartă numărătorul și numitorul la același număr natural.

Ana: Eu împart la 2 și obțin $\frac{18:2}{12:2} = \frac{9}{6}$, iar $\frac{18}{12}$ este echivalentă cu $\frac{9}{6}$ pentru că $18 \cdot 6 = 108 = 12 \cdot 9$.

La 4 nu pot să împart pentru că 18 nu se împarte exact la 4, nici la 5 nu pot, dar la 6 pot să împart și obțin $\frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}$, echivalentă cu $\frac{18}{12}$.



Andrei: Eu voi împărți la 3 și obțin $\frac{18:3}{12:3} = \frac{6}{4}$, care și ea este echivalentă cu $\frac{18}{12}$ $(18 \cdot 4 = 72 = 12 \cdot 6)$.

Am observat că, pentru a le putea împărți pe amândouă la același număr, trebuie ca acesta să fie divizor comun al numărătorului și al numitorului.

Reținem

✓ A *simplifica* o fracție printr-un număr natural nenul înseamnă a obține o nouă fracție prin împărțirea numărătorului și a numitorului fracției date la acel număr. Numărul prin care facem simplificarea este un divizor comun al numărătorului și numitorului fracției. Cele două fracții sunt echivalente.

✓ Acest lucru se scrie sub forma

$$\frac{a}{b}^{(n} = \frac{a:n}{b:n}$$, unde a, b, n sunt numere naturale $b \neq 0$ și $n \neq 0$.

Numărul n prin care am simplificat este număr natural nenul, divizor comun al numerelor a și b.

Exemple. ● $\frac{15}{35}^{(5} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}$; ● $\frac{28}{44}^{(4} = \frac{28:4}{44:4} = \frac{7}{11}$;
● $\frac{77}{55}^{(x} = \frac{7}{5}$, $x = 11$; ● $\frac{96}{a}^{(12} = \frac{8}{10}$, $a = 120$.

Activitate în perechi

Compuneți câte o fracție pentru colegul de bancă pe care să o poată simplifica prin 3, iar el va compune o fracție care să se poată simplifica prin 5. Realizați amândoi simplificările și verificați apoi dacă ați lucrat corect.

Cel mai mare divizor comun a două numere. Fracții ireductibile

Ana: Andrei, când am făcut simplificările de mai sus am folosit doar divizori comuni ai lui 12 și 18. I-am folosit oare pe toți?

Andrei: Divizorii lui 12 sunt 1, 2, 3, 4, 6 și 12, iar ai lui 18 sunt 1, 2, 3, 6, 9 și 18. Cei comuni sunt 1, 2, 3 și 6, iar 6 este cel mai mare dintre divizorii comuni.

Ana: Observ că cei patru divizori comuni sunt divizorii lui 6, cel mai mare dintre ei.

Andrei: Iar când ai făcut simplificarea prin 6 ai obținut o fracție care nu se mai poate simplifica, $\frac{18}{12}^{(6} = \frac{3}{2}$, pentru că 3 și 2 au divizor comun doar pe 1.

Reținem

✓ *Cel mai mare divizor comun* a două numere naturale nenule este cel mai mare număr natural care divide cele două numere.

✓ Notăm *cel mai mare divizor comun* al numerelor naturale a și b folosind prescurtarea c.m.m.d.c. sau notația (a, b).

✓ Toți divizorii comuni ai numerelor a și b sunt divizori și ai *celui mai mare divizor comun* al numerelor naturale a și b.

✓ Două numere naturale care au divizor comun doar pe 1 se numesc *numere prime între ele*.

Activitate în perechi

Împreună cu colegul de bancă, determinați divizorii comuni ai numerelor 24 și 36 și verificați dacă aceștia sunt divizori ai celui mai mare dintre ei. Realizați simplificarea fracției $\frac{24}{36}$ astfel încât fracția obținută să nu se mai poată simplifica.

Exemple.

● Divizorii comuni ai numerelor 20 și 12 sunt 1, 2 și 4, deci $(20, 12) = 4$. Divizorii 1, 2 și 4 sunt toți divizorii lui 4.

● Numerele 15 și 16 au divizor comun doar pe 1, deci $(15, 16) = 1$, adică sunt prime între ele.

Reținem

✓ O fracție care nu se mai poate simplifica se numește *fracție ireductibilă*.

✓ Fracția $\frac{a}{b}$, a și b numere naturale, $b \neq 0$, este ireductibilă dacă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1, adică $(a, b) = 1$.

Probleme rezolvate

● Putem simplifica fracția $\frac{36}{48}$ pentru a obține o fracție ireductibilă fie prin mai multe simplificări succesive cu numere mai mici, fie prin simplificare cu c.m.m.d.c.(36, 48).

● $\frac{36}{48}^{(2} = \frac{18}{24}^{(2} = \frac{9}{12}^{(3} = \frac{3}{4}$ $(36, 48) = 12$ și facem simplificarea $\frac{36}{48}^{(12} = \frac{3}{4}$.

Observăm că cele 3 numere prin care am făcut simplificările succesive au produsul egal cu 12.

Observație. Atunci când facem mai multe simplificări succesive ale unei fracții prin numere mai mici, până la forma ireductibilă a acesteia, produsul numerelor prin care se simplifică reprezintă cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.

Probleme propuse

•

1. Amplificați cu 3 următoarele fracții:
a) $\frac{1}{2}$;   b) $\frac{3}{7}$;   c) $\frac{5}{4}$;   d) $\frac{12}{15}$;   e) $2\frac{2}{3}$.

2. Amplificați fracția $\frac{5}{7}$ cu numerele:
a) 2;   b) 3;   c) 5;   d) 7;   e) 10.

3. Folosind o amplificare convenabilă, transformați următoarele fracții în procente:
a) $\frac{7}{2}$;   b) $\frac{3}{5}$;   c) $\frac{11}{10}$;   d) $\frac{17}{20}$;   e) $\frac{37}{25}$.

4. Asociați o fracție de pe prima coloană cu un număr natural de pe a doua coloană astfel încât, prin amplificare, să obțineți una dintre fracțiile de pe a treia coloană (după model).

$\frac{5}{3}$	2	$\frac{28}{44}$
$\frac{7}{11}$	3	$\frac{18}{24}$
$\frac{3}{4}$	4	$\frac{20}{25}$
$\frac{13}{15}$	5	$\frac{15}{9}$
$\frac{4}{5}$	6	$\frac{26}{30}$

5. Simplificați:
a) prin 2, fracțiile: $\frac{4}{12}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{24}{40}$, $\frac{36}{44}$, $\frac{100}{200}$;
b) prin 3, fracțiile: $\frac{6}{9}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{18}{21}$, $\frac{33}{51}$, $\frac{123}{312}$;
c) prin 5, fracțiile: $\frac{25}{20}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{35}{15}$, $\frac{55}{75}$, $\frac{100}{250}$.

6. Calculați cel mai mare divizor comun pentru fiecare pereche de numere:

numere	4 și 12	8 și 16	18 și 24	20 și 50	30 și 45	72 și 90
c.m.m.d.c.	4	...	...	...	...	...

••

7. Simplificați următoarele fracții pentru a obține fracții ireductibile: $\frac{4}{12}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{36}{42}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{28}{35}$, $4\frac{30}{45}$, $2\frac{44}{66}$, $1\frac{52}{78}$.

Indicație. Pentru fracția $4\frac{30}{45}$ realizăm simplificarea prin două metode: $4\frac{30}{45} = {}^{(15}\frac{210}{45} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ sau $4\,{}^{(15}\frac{30}{45} = 4\frac{2}{3}$; observăm că se obține același rezultat.

8. Ce fracție trebuie amplificată pentru a obține fracția $\frac{32}{48}$? Câte răspunsuri are întrebarea?

9. Determinați fracția echivalentă cu fracția $\frac{6}{7}$ care are numărătorul:
a) 24;   b) 42;   c) 90;   d) 150.

10. Determinați fracția echivalentă cu fracția $\frac{9}{5}$ care are numitorul:
a) 25;   b) 45;   c) 110;   d) 550.

11. Amplificați fracțiile $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{5}$ și $\frac{30}{19}$ astfel încât cele trei fracții obținute să aibă același numărător de două cifre.

12. Amplificați fracțiile $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{9}$ și $\frac{11}{18}$ pentru a obține trei fracții cu același numitor.

13. Simplificați fracția $\frac{90}{72}$ pentru a obține o fracție cu numărătorul egal cu:
a) 30;   b) 15;   c) 5.

14. Transformați următoarele procente în fracții ordinare și simplificați-le până la forma ireductibilă.
a) 40%;   b) 65%;   c) 75%;   d) 125%.

•••

15. Realizând o amplificare sau o simplificare convenabilă, comparați următoarele fracții:
a) $\frac{7}{8}$ cu $\frac{3}{4}$;   b) $\frac{12}{30}$ cu $\frac{7}{15}$;   c) $\frac{16}{18}$ cu $\frac{8}{11}$.

16. Determinați:
a) fracțiile de forma $\frac{\overline{5a}}{14}$ care se pot simplifica prin 2 și realizați simplificările;
b) fracțiile de forma $\frac{\overline{2b}}{45}$ care se pot simplifica prin 5 și realizați simplificările;
c) fracțiile de forma $\frac{\overline{2c}}{30}$ care se pot simplifica și realizați simplificările.

Aducerea fracțiilor la un numitor comun

Ana și Andrei discută despre problema 15. din lecția anterioară, pe care au avut-o de rezolvat la temă.

Ana: Pentru a putea compara fracțiile $\frac{7}{8}$ și $\frac{3}{4}$ m-am gândit să o amplific pe a doua cu 2, $^{2)}\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, și, cum $\frac{7}{8} > \frac{6}{8}$, rezultă că $\frac{7}{8} > \frac{3}{4}$.

Andrei: Pentru a compara fracțiile $\frac{12}{30}$ și $\frac{7}{15}$ am simplificat $\frac{12}{30}^{(2} = \frac{6}{15}$ și am putut face compararea $\frac{6}{15} < \frac{7}{15}$, pentru că au același numitor. Deci a fost util să fac în așa fel încât fracțiile să aibă același numitor.

Reținem

✓ Fiind date două fracții cu numitori diferiți, modalitatea prin care obținem două fracții cu același numitor, echivalente cu fracțiile date, se numește *aducerea la un numitor comun* sau *aducerea la același numitor*.

✓ Două fracții se pot *aduce* la diverși *numitori comuni*.

✓ Numitorul comun a două fracții este, de cele mai multe ori, un *multiplu comun* al numitorilor celor două fracții.

Probleme rezolvate

● Pentru fracțiile $\frac{7}{15}$ și $\frac{3}{5}$, folosind amplificarea $^{3)}\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, ajungem la două fracții cu *numitor comun* 15. Numitorul 15 al primei fracții este un multiplu al numitorului 5 al celei de-a doua fracții.

● Amplificând fracția $\frac{5}{8}$ cu 9 și fracția $\frac{7}{9}$ cu 8 obținem $\frac{45}{72}$ și $\frac{56}{72}$. *Numitorul comun,* 72, al celor două fracții este primul (cel mai mic, nenul) dintre multiplii comuni nenuli ai numitorilor 8 și 9.

● Pentru fracțiile $\frac{11}{15}$ și $\frac{7}{10}$ putem face amplificările $^{10)}\frac{11}{15} = \frac{110}{150}$ și $^{15)}\frac{7}{10} = \frac{105}{150}$, obținând *numitorul comun* 150, dar am putea face și amplificările $^{2)}\frac{11}{15} = \frac{22}{30}$ și $^{3)}\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$, la care numitorul comun, 30, este cel mai mic dintre multiplii comuni nenuli ai numerelor 15 și 10. Numărul 150 este un multiplu al numărului 30.

Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale

Reținem

✓ Orice număr natural nenul are multipli și orice două numere naturale nenule au multipli comuni.

✓ *Cel mai mic multiplu comun* a două numere naturale nenule este cel mai mic număr natural nenul care se divide cu cele două numere.

✓ Notăm *cel mai mic multiplu comun* al numerelor naturale a și b folosind prescurtarea c.m.m.m.c. sau notația $[a, b]$.

✓ Multiplii comuni ai numerelor a și b sunt multipli ai *celui mai mic multiplu comun* al numerelor naturale a și b.

Atenție!
Atunci când vorbim despre c.m.m.m.c. a două numere ne referim la cel mai mic dintre multiplii comuni nenuli.

Probleme rezolvate

● Găsim c.m.m.m.c. al numerelor 16 și 12 scriind șirurile de multipli ai celor două numere.

Nr.	Multipli	Multipli comuni	c.m.m.m.c.
16	**0**, 16, 32, **48**, 64, 80, **96**, 112, ...	0, 48, 96, ... (multipli ai lui 48)	[16, 12] = 48
12	**0**, 12, 24, 36, **48**, 60, 72, 84, **96**, 108, ...		

Activitate în perechi

Împreună cu colegul de bancă, determinați [15, 25] folosind, fiecare dintre voi, câte una dintre metodele prezentate în exemplele anterioare. Comparați rezolvările și discutați despre eficiența lor.

- Determinăm [20, 12] folosind multiplii celui mai mare dintre numere. Multiplicând pe 20 obținem 40 – care nu este multiplu al lui 12, apoi 60 – care este multiplu al lui 12. Deci 60 este primul multiplu comun nenul al celor două numere, adică [20, 12] = 60.

- Calculăm c.m.m.m.c. folosind c.m.m.d.c. al celor două numere:

Numerele date	Pasul I calculăm c.m.m.d.c.	Pasul II descompunem numerele	Pasul III calculăm c.m.m.m.c.
12 și 20	(12, 20) = 4	12 = 4·3 și 20 = 4·5	[12, 20] = 4·3·5 = 60
15 și 25	(15, 25) = 5	15 = 5·3 și 25 = 5·5	[15, 25] = 5·3·5 = 75
3 și 5	(3, 5) = 1	3 = 3·1 și 5 = 5·1	[3, 5] = 1·3·5 = 15

Mai general:

- dacă $(a, b) = d$, atunci $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, iar $[a, b] = d \cdot x \cdot y$;

- dacă două numere au cel mai mare divizor comun egal cu 1, atunci ele au cel mai mic multiplu comun egal cu produsul lor.

Probleme propuse

●

1. Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru următoarele perechi de numere:

a) 4 și 12; b) 8 și 16; c) 9 și 18; d) 15 și 30;

e) 10 și 15; f) 6 și 9; g) 14 și 21; h) 22 și 33;

i) 9 și 15; j) 5 și 6; k) 11 și 8; l) 12 și 7.

2. Aduceți la un numitor comun următoarele perechi de fracții:

a) $\frac{1}{6}$ și $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$ și $\frac{5}{4}$; $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{3}$ și $\frac{3}{8}$; $2\frac{1}{3}$ și $3\frac{1}{2}$;

b) $\frac{5}{8}$ și $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{27}$ și $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{21}$ și $\frac{2}{7}$; $\frac{11}{10}$ și $\frac{19}{30}$; $\frac{5}{6}$ și $\frac{14}{24}$;

c) $\frac{7}{6}$ și $\frac{5}{9}$; $\frac{13}{20}$ și $\frac{7}{12}$; $2\frac{3}{8}$ și $\frac{17}{20}$; $\frac{9}{10}$ și $\frac{12}{25}$; $\frac{31}{35}$ și $\frac{18}{49}$;

d) $\frac{15}{21}$ și $\frac{24}{28}$; $\frac{35}{50}$ și $\frac{27}{30}$; $\frac{30}{24}$ și $\frac{55}{20}$; $\frac{20}{32}$ și $\frac{15}{40}$; $\frac{50}{80}$ și $\frac{9}{24}$.

Indicație. La punctul d) realizați aducerea la un numitor comun prin simplificări.

3. Folosind aducerea la un numitor comun, comparați următoarele perechi de fracții:

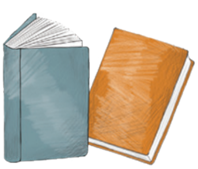
a) $\frac{5}{8}$ și $\frac{9}{16}$; b) $\frac{24}{18}$ și $\frac{11}{9}$; c) $\frac{9}{16}$ și $\frac{7}{12}$;

d) $\frac{5}{8}$ și $\frac{6}{12}$; e) $\frac{15}{20}$ și $\frac{7}{12}$; f) $\frac{6}{18}$ și $\frac{4}{12}$.

●●

4. Matei a citit ieri $\frac{4}{9}$ dintr-o carte și azi $\frac{1}{3}$ din aceeași carte. El afirmă: „Azi am citit mai mult decât am citit ieri.”. Afirmația lui Matei este:

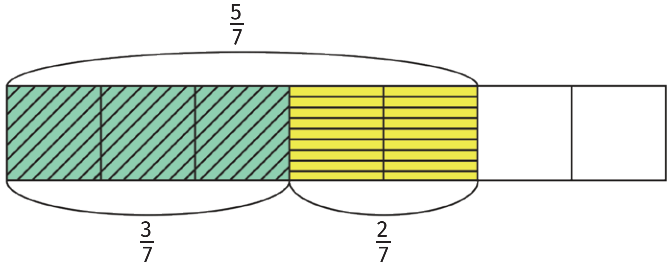
a) adevărată b) falsă



5. Ioan și Cătălin locuiesc în același bloc și sunt elevi la aceeași școală. Plecând de la școală spre casă, Ioan a parcurs în 10 minute 65% din distanță, iar Cătălin a parcurs, tot în 10 minute, $\frac{3}{5}$ din distanță. Care dintre ei este mai aproape de casă?

6. Ana și Andrei beau în fiecare dimineață, la micul dejun, câte un pahar cu lapte. În această dimineață, Ana a băut $\frac{4}{5}$ din paharul ei, iar Andrei a băut $\frac{6}{7}$ din paharul lui. Cine a băut mai mult lapte (cei doi au pahare identice)?

Adunarea și scăderea fracțiilor



Pentru că au văzut în manual că urmează această lecție, Ana și Andrei își amintesc cum făceau aceste operații în clasa a IV-a. Pentru a fi siguri că nu greșesc, au desenat un dreptunghi pe care l-au împărțit în 7 părți și au hașurat diverse părți din el.

Andrei: Cele două zone hașurate puse împreună reprezintă $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7}$, adică $\frac{5}{7}$.

Ana: Partea rămasă nehașurată reprezintă $\frac{2}{7}$, după cum observ pe desen, dar pot afla asta calculând diferența dintre întreg și rezultatul adunării tale, $\frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7-5}{7}$.

Reținem

✓ *Suma a două fracții cu același numitor* este fracția al cărei numărător este egal cu suma numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n},\ a, b \text{ și } n \text{ sunt numere naturale, } n \neq 0.$$

✓ *Diferența a două fracții cu același numitor* este fracția al cărei numărător este egal cu diferența numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții:

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n},\ a, b \text{ și } n \text{ sunt numere naturale, } n \neq 0 \text{ și } a \geq b.$$

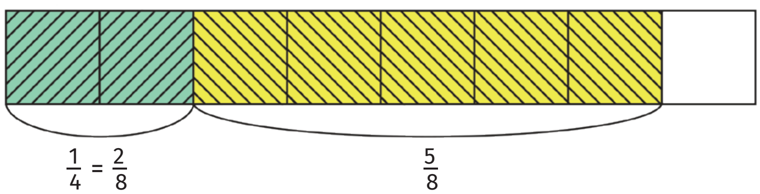
Exemple.

- $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$;
- $\frac{13}{22} + \frac{5}{22} = \frac{18}{22}$;
- $\frac{13}{8} - \frac{2}{8} = \frac{11}{8}$;
- $\frac{17}{33} - \frac{5}{33} = \frac{12}{33}$.

Activitate în perechi

Formați perechi și propuneți-vă unul altuia câte o adunare și o scădere dintre două fracții cu același numitor. Verificați dacă rezultatele colegului sunt corecte.

Andrei: Ana, dar dacă fracțiile nu au același numitor, oare să ne folosim de lecția *Aducerea la un numitor comun* pentru a le aduna?



Ana: Dacă am adus la un numitor comun pentru a putea compara fracțiile – fiind simplu să comparăm fracții cu același numitor, eu zic să facem la fel și la adunare și scădere.

Andrei: De exemplu, dacă am vrea să adunăm $\frac{5}{8}$ cu $\frac{1}{4}$, să transformăm sferturile în optimi, ${}^{2)}\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$; am avea $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$ și am folosi numărul 8 ca numitor comun.

Ana: Și dacă folosim alt numitor comun obținem același rezultat? De exemplu, dacă fac amplificările ${}^{4)}\frac{5}{8}$ și ${}^{8)}\frac{1}{4}$ obțin $\frac{20}{32} + \frac{8}{32} = \frac{28}{32}$ și, dacă simplific, $\frac{28}{32}^{(4} = \frac{7}{8}$, obțin același rezultat.

Reținem

Pentru a aduna/scădea două fracții care au numitori diferiți, parcurgem următorii pași:

- ✓ aducem cele două fracții la același numitor;
- ✓ adunăm/scădem cele două fracții folosind metoda adunării/scăderii fracțiilor cu același numitor;
- ✓ aducem fracția obținută, prin simplificare, la forma sa ireductibilă.

Probleme rezolvate

- $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$ sau $^{4)}\frac{5}{8} - {}^{8)}\frac{1}{4} = \frac{20}{32} - \frac{8}{32} = \frac{12}{32}^{(4} = \frac{3}{8}$.

Rezultatul este același, indiferent de numitorul comun folosit, dar se recomandă aducerea la un numitor cât mai mic – cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor.

- Dacă vrem să adunăm fracțiile $a = \frac{2}{3}$ și $b = \frac{1}{2}$ putem să calculăm $a + b = {}^{2)}\frac{2}{3} + {}^{3)}\frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$ sau $b + a = {}^{3)}\frac{1}{2} + {}^{2)}\frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$ și obținem același rezultat.

Adunarea fracțiilor ordinare este comutativă: $a + b = b + a$, pentru orice fracții a și b.

- Pentru adunarea fracțiilor $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{7}{10}$ și $c = \frac{3}{2}$ grupăm termenii:

$$(a + b) + c = \left({}^{2)}\frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right) + \frac{3}{2} = \frac{6 + 7}{10} + {}^{5)}\frac{3}{2} = \frac{13 + 15}{10} = \frac{28}{10}^{(2} = \frac{14}{5} \text{ sau}$$

$$a + (b + c) = \frac{3}{5} + \left(\frac{7}{10} + {}^{5)}\frac{3}{2}\right) = {}^{2)}\frac{3}{5} + \frac{7 + 15}{10} = \frac{6 + 22}{10} = \frac{28}{10}^{(2} = \frac{14}{5}.$$

Adunarea fracțiilor ordinare este asociativă: $(a + b) + c = a + (b + c)$, pentru orice fracții a, b și c.

- $\frac{5}{6} + 0 = \frac{5}{6} + \frac{0}{6} = \frac{5 + 0}{6} = \frac{5}{6}$.

Numărul 0 este element neutru la adunarea fracțiilor: $a + 0 = 0 + a = a$, pentru orice fracție a.

- $\frac{17}{20} - {}^{4)}\frac{3}{5} = \frac{17}{20} - \frac{12}{20} = \frac{5}{20}^{(5} = \frac{1}{4}$;

- $\frac{8}{14}^{(2} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$;

- $2\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = {}^{5)}\frac{2}{1} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ – introducerea întregilor în fracție cu ajutorul adunării;

- $\frac{8}{10}^{(2} + \frac{2}{5} - \frac{9}{15} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} - \frac{9}{15} = {}^{3)}\frac{6}{5} - \frac{9}{15} = \frac{18}{15} - \frac{9}{15} = \frac{9}{15}^{(3} = \frac{3}{5}$.

Atunci când în calcul intervin și adunări și scăderi, operațiile se realizează în ordinea apariției acestora.

- $3\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{22}{7} + \frac{2}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ sau $3\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 3 + \frac{3}{7} = 3\frac{3}{7}$.

Atunci când cel puțin unul dintre termenii adunării conține întregi în fața fracției, putem să introducem întregii în fracție și apoi să efectuăm adunarea sau putem aduna doar fracțiile, păstrând numărul de întregi în fața rezultatului.

Probleme propuse

•

1. Efectuați:

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}$; c) $\frac{8}{15}+\frac{14}{15}$; d) $\frac{5}{19}+\frac{7}{19}+\frac{2}{19}$; e) $\frac{4}{35}+\frac{12}{35}+\frac{7}{35}$.

2. Efectuați:

a) $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$; b) $\frac{9}{13}-\frac{3}{13}$; c) $\frac{27}{25}-\frac{11}{25}$; d) $\frac{29}{43}-\frac{7}{43}-\frac{5}{43}$; e) $\frac{37}{50}-\frac{21}{50}-\frac{3}{50}$.

3. Efectuați și simplificați fracțiile obținute (dacă este necesar):

a) $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}-\frac{3}{8}$; b) $\frac{11}{18}-\frac{5}{8}+\frac{6}{18}$; c) $\frac{17}{21}+\frac{19}{21}-\frac{33}{21}$;

d) $\frac{19}{35}-\frac{8}{35}-\frac{9}{35}$; e) $\frac{21}{16}-\frac{19}{16}+\frac{5}{16}$; f) $\frac{10}{20}+\frac{10}{20}+\frac{10}{20}$.

4. Efectuați calculele necesare completării tabelului următor:

a	b	c	$a+b$	$a+b+c$	$b+c$	$a-(b+c)$	$a-b-c$	$b-c$	$a-b+c$	$a-(b-c)$
$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$								
$\frac{17}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{4}{11}$								
$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{18}$								
$\frac{29}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{7}{20}$								
$\frac{23}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{1}{6}$								

Important. Pentru orice fracții a, b și c au loc relațiile: $a-(b+c)=a-b-c$ și $a-(b-c)=a-b+c$.

5. Calculați și simplificați fracțiile obținute (dacă este necesar):

a) $\frac{7}{8}+\frac{5}{4}$; $\frac{5}{3}+\frac{8}{9}$; $\frac{6}{12}+\frac{5}{6}$; $\frac{5}{18}+\frac{2}{9}+\frac{3}{2}$; $\frac{7}{10}+\frac{1}{4}+\frac{11}{20}$;

b) $\frac{11}{6}-\frac{3}{2}$; $\frac{8}{5}-\frac{13}{10}$; $\frac{15}{14}-\frac{5}{7}$; $\frac{31}{18}-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$; $\frac{40}{24}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$;

c) $\frac{3}{5}+\frac{3}{7}$; $\frac{9}{11}+\frac{5}{8}$; $\frac{1}{5}-\frac{2}{11}$; $\frac{7}{10}-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{2}+\frac{2}{3}-\frac{9}{5}$;

d) $\frac{5}{9}+\frac{5}{6}$; $\frac{7}{18}+\frac{5}{12}$; $\frac{5}{8}+\frac{3}{20}$; $\frac{10}{20}+\frac{5}{12}$; $\frac{9}{24}+\frac{7}{8}+\frac{5}{16}$;

e) $\frac{7}{12}-\frac{3}{8}$; $\frac{5}{8}-\frac{5}{10}$; $\frac{13}{20}-\frac{11}{30}$; $\frac{27}{45}-\frac{13}{30}$; $\frac{8}{9}+\frac{17}{18}-\frac{6}{27}$.

••

6. Din toată suprafața grădinii, două treimi a fost cultivată cu cartofi, o șesime cu morcovi și restul, cu roșii. Arătați că suprafața cultivată cu roșii este egală cu cea cultivată cu morcovi.

7. Introduceți întregii în fracție folosind adunarea fracțiilor: $3\frac{4}{5}$; $2\frac{7}{11}$; $4\frac{11}{15}$; $5\frac{6}{10}$.

8. Efectuați calculele și scrieți rezultatul obținut după scoaterea întregilor din fracție:

a) $2\frac{3}{5}+3\frac{1}{10}$; $3\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}$; $8\frac{2}{3}+1\frac{4}{9}$; $8\frac{1}{2}+4\frac{5}{8}$;

b) $4\frac{3}{5}-2\frac{4}{15}$; $5\frac{5}{6}-1\frac{11}{12}$; $3\frac{4}{15}-2\frac{2}{3}$; $6\frac{2}{7}-\frac{30}{14}$.

9. Ioana citește o carte în trei zile consecutive. În prima zi citește $\frac{5}{9}$ din carte, a doua zi cu o treime mai puțin decât în prima zi și restul în a treia zi.

a) Este adevărat că Ioana a citit în prima zi mai mult de jumătate din carte? Justificați răspunsul.

b) Ce parte din carte a citit Ioana în a treia zi?

Probleme recapitulative

1. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) ${}^{4)}\frac{5}{7} = \frac{\dots}{28}$; b) ${}^{3)}\frac{7}{11} = \frac{21}{\dots}$; c) ${}^{5)}\frac{6}{8} = \frac{\dots}{\dots}$;

d) ${}^{13)}\frac{10}{3} = \frac{\dots}{\dots}$; e) $\frac{60}{45}^{(5} = \frac{\dots}{9}$; f) $\frac{108}{64}^{(4} = \frac{\dots}{\dots}$;

g) $\frac{96}{76}^{(\dots} = \frac{24}{\dots}$; h) $\frac{84}{120}^{(\dots} = \frac{\dots}{30}$; i) $\frac{5^6}{5^4}^{(5^3} = \frac{\dots}{\dots}$.

2. Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru următoarele perechi de numere:

a) 20 și 84; b) 30 și 36; c) 60 și 72.

3. Transformați în fracții ireductibile procentele:

a) 24%; b) 48%; c) 120%; d) 250%.

4. Scrieți și simplificați până la forma ireductibilă toate fracțiile de forma $\frac{40}{\overline{7a}}$ care se pot simplifica prin:

a) 2; b) 4; c) 5.

5. Ordonați crescător fracțiile:

$\frac{14}{27}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{30}{81}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{4}{27}$, $1\frac{2}{9}$.

6. Folosind o amplificare sau o simplificare convenabilă, comparați fracțiile:

a) $\frac{4}{9}$ cu $\frac{3}{5}$; b) $\frac{6}{7}$ cu $\frac{18}{19}$;

c) $\frac{7}{11}$ cu $\frac{31}{55}$; d) $\frac{17}{20}$ cu $\frac{27}{30}$;

e) $\frac{80}{76}$ cu $\frac{20}{19}$; f) $\frac{12}{9}$ cu $\frac{18}{13}$.

7. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{5}{18} + \frac{11}{18} - \frac{7}{18}$; b) $\frac{11}{12} + \frac{17}{12} - \frac{7}{12}$;

c) $\frac{5}{17} + \frac{21}{17} - \frac{9}{17}$; d) $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$;

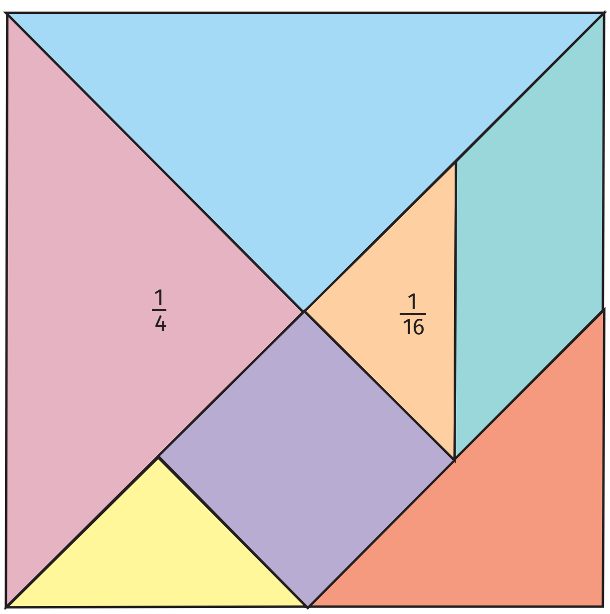
e) $\frac{17}{18} + \frac{5}{6} - \frac{7}{9}$; f) $\frac{11}{24} - \frac{5}{12} + \frac{3}{8}$.

8. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă. Acolo unde se poate, scoateți întregii din fracție.

a) $2\frac{5}{12} + 4\frac{7}{12} - 5\frac{19}{36}$; b) $4\frac{11}{16} - 3\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4}$;

c) $3\frac{4}{15} - \left(\frac{7}{10} + 1\frac{5}{6}\right)$; d) $4\frac{3}{22} - \left(2\frac{1}{2} - \frac{13}{11}\right)$.

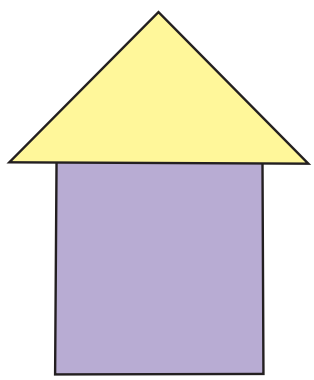
Proiect



TANGRAM este un joc chinezesc cunoscut de mai bine de 2000 de ani. Cele 7 figuri geometrice, numite tanuri, reprezintă: 5 triunghiuri, 1 pătrat, 1 paralelogram.

Reproduceți desenul din stânga pe un carton și decupați cele 7 părți. Scrieți pe fiecare dintre acestea ce fracție din întreg reprezintă.

Desenul din dreapta este format din două piese de tangram: $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.



Reprezentați fracțiile $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{16}$ cu ajutorul a două piese de tangram.

Test de autoevaluare

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 45 de minute.

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Prin amplificare cu 7, fracția $\frac{8}{11}$ devine:

a) $\frac{56}{11}$; b) $\frac{8}{77}$; c) $\frac{56}{77}$; d) $\frac{8}{11}$. *10 puncte*

2. După simplificare până la forma ireductibilă, fracția $\frac{72}{108}$ este echivalentă cu fracția:

a) $\frac{6}{7}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{36}{54}$; d) $\frac{3}{2}$. *10 puncte*

3. Andrei vrea să-și cumpere o minge și a găsit oferte la două magazine cu vânzare online. La ambele magazine prețul mingii este același, dar, la achiziționare, la magazinul A se face o reducere cu 20% a prețului, iar la magazinul B o reducere cu o cincime din preț. Andrei afirmă: „*Voi cumpăra de la magazinul A, pentru că este mai convenabilă oferta!*”. Afirmația lui Andrei este:

a) adevărată; b) falsă. *10 puncte*

Scrieți rezolvările complete.

4. Aduceți fracțiile $\frac{7}{12}$ și $\frac{11}{18}$ la un numitor comun și comparați-le. *15 puncte*

5. Calculați:

a) $\frac{14}{15} - \frac{2}{15} + \frac{17}{20} - \frac{7}{20}$; b) $2\frac{1}{4} - \left(\frac{5}{12} + \frac{11}{12}\right)$. *20 puncte*

6. Dintr-un butoi cu motorină s-au scos în prima zi $10\frac{2}{5}$ litri, a doua zi cu $2\frac{1}{5}$ litri mai mult decât în prima zi, iar a treia zi cu $2\frac{1}{4}$ litri mai puțin decât a doua zi.

a) Este adevărat că în a treia zi s-au scos mai puțini litri decât în prima zi? Justificați răspunsul.

b) Dacă în butoi erau 50 litri, determinați câți litri de motorină au rămas în butoi după cele trei zile.

25 puncte

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Determinați fracția:

a) cu $3\frac{2}{5}$ mai mare decât $2\frac{1}{4}$; b) cu $1\frac{5}{6}$ mai mică decât $3\frac{3}{7}$;

c) cu 2 mai mare decât $3 + \frac{3}{5}$; d) cu 3 mai mică decât $3\frac{7}{10}$.

2. Folosind o amplificare sau o simplificare convenabilă, comparați fracțiile:

a) $\frac{5}{8}$ cu $\frac{9}{16}$; b) $\frac{23}{24}$ cu $\frac{5}{6}$; c) $\frac{4}{9}$ cu $\frac{17}{36}$; d) $\frac{19}{42}$ cu $\frac{4}{7}$;

e) $\frac{10}{11}$ cu $\frac{5}{6}$; f) $\frac{18}{17}$ cu $\frac{9}{8}$; g) $\frac{30}{32}$ cu $\frac{10}{11}$; h) $\frac{18}{23}$ cu $\frac{27}{31}$;

i) $\frac{15}{4}$ cu 3; j) 7 cu $\frac{53}{7}$; k) $3\frac{3}{5}$ cu $4\frac{2}{3}$; l) $5\frac{4}{9}$ cu $\frac{30}{7}$.

3. Ordonați crescător șirurile de fracții:

a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{17}{16}, \frac{26}{32}, \frac{14}{16}, 1$; b) $\frac{1}{2}, \frac{10}{17}, \frac{5}{11}, \frac{4}{9}, \frac{20}{18}, \frac{2}{5}$.

4. Scrieți trei fracții cuprinse între:

a) $\frac{7}{10}$ și $\frac{14}{15}$; b) $\frac{9}{14}$ și $\frac{25}{28}$; c) $\frac{7}{10}$ și $\frac{4}{5}$.

5. Ordonați crescător țările din tabelul următor, după suprafața împădurită raportată la suprafața totală:

Țara	Franța	România	Elveția	Rusia	Danemarca	Finlanda	Turcia
$\frac{\text{suprafață pădure}}{\text{suprafață totală}}$	$\frac{31}{100}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{20}$

6. O ladă cu mere cântărește $25\frac{1}{2}$ kg. Cât cântăresc merele, știind că lada goală cântărește $3\frac{3}{4}$ kg?

7. Pentru prepararea unui suc se folosesc mere, pere și caise. Merele reprezintă $\frac{2}{5}$ din cantitatea totală de fructe, iar perele $\frac{3}{10}$ din aceeași cantitate. Calculați cât reprezintă caisele din cantitatea de fructe folosită, exprimând rezultatul sub formă de procent.

8. Calculați:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$; c) $\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\right)\cdot 3-15^0$; d) $3\frac{7}{22}-2\frac{5}{33}$;

e) $2\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{30}$; f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$; g) $1\frac{5}{9}-\frac{7}{18}-\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)$;

h) $\frac{44}{55}+\frac{111}{555}+\frac{77}{66}-\frac{1554}{777}$; i) $\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}$.

9. Într-un butoi sunt $80\frac{1}{2}$ litri de apă. Dimineața se folosesc pentru irigat $20\frac{1}{4}$ litri de apă din butoi, iar seara se folosesc cu $2\frac{1}{4}$ litri mai mulți decât dimineața. Știind că, peste noapte, în butoi se mai strâng 50 litri de apă, determinați câți litri de apă sunt în butoi în dimineața următoare.

10. Calculați:

a) $\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\frac{3}{50}+\ldots+\frac{49}{50}$;

b) $\frac{2}{50}+\frac{4}{50}+\frac{6}{50}+\ldots+\frac{50}{50}$;

c) $\left(\frac{2}{99}+\frac{4}{99}+\frac{6}{99}+\ldots+\frac{100}{99}\right)-\left(\frac{1}{99}+\frac{3}{99}+\frac{5}{99}+\ldots+\frac{99}{99}\right)$.

Indicație. a) Grupăm convenabil termenii și obținem $\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\frac{3}{50}+\ldots+\frac{48}{50}+\frac{49}{50}=$

$=\left(\frac{1}{50}+\frac{49}{50}\right)+\left(\frac{2}{50}+\frac{48}{50}\right)+\ldots+\frac{25}{50}=1+1+\ldots+1+\frac{1}{2}$, cu 24 de termeni de 1, deci suma este $24\frac{1}{2}$.

Înmulțirea fracțiilor ordinare

Ana: Andrei, vreau să fac adunarea $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$ și m-am gândit să fac la fel ca la înmulțirea numerelor naturale, adică să spun că $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=3\cdot\frac{2}{7}$. Obțin astfel că $\frac{3\cdot 2}{7}=3\cdot\frac{2}{7}$, ceea ce îmi arată cum să înmulțesc un număr natural cu o fracție. Dar dacă folosim fracție în loc de număr natural, cum să facem?

Andrei: Să încercăm să înmulțim $\frac{1}{2}$ cu $\frac{3}{4}$, ceea ce ar însemna să calculăm jumătate din $\frac{3}{4}$. Jumătate dintr-un sfert este o optime, adică $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\left(=\frac{1}{2\cdot 4}\right)$, deci jumătate din trei sferturi este egal cu trei optimi, adică $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\left(=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)$.

Reținem

✓ Produsul unei fracții cu un număr natural este o fracție care are ca numărător produsul dintre numărătorul fracției și numărul natural, iar ca numitor numitorul fracției date:

$$n\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{b},\ a,\ b,\ n \text{ numere naturale, } b\neq 0$$

✓ Produsul a două fracții este o fracție, care are ca numărător produsul numărătorilor celor două fracții, iar ca numitor produsul numitorilor acestora:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ a,\ b,\ c,\ d \text{ numere naturale, } b\neq 0,\ d\neq 0$$

✓ Într-un exercițiu fără paranteze se efectuează întâi înmulțirile, apoi adunările și scăderile.

Probleme rezolvate

- $5\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{7}=\frac{20}{7}$;
- $\frac{2}{5}\cdot 6=\frac{2\cdot 6}{5}=\frac{12}{5}$;
- $10\cdot\frac{7}{15}=\frac{70}{15}^{(5}=\frac{14}{3}$;
- $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$;
- $\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{3}=\frac{6\cdot 7}{11\cdot 3}=\frac{42}{33}^{(3}=\frac{14}{11}$;
- $\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}=\frac{45}{60}^{(15}=\frac{3}{4}$.

Se recomandă ca rezultatul înmulțirii să fie adus, prin simplificare, la forma ireductibilă.

- Pentru calcule mai rapide se pot face simplificări înainte de a face produsul numărătorilor/numitorilor:

$\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{6\cdot 7}{5\cdot 2}^{(2}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 1}=\frac{21}{5}$;	Am făcut simplificarea prin împărțirea numerelor 6 și 2 la 2 și apoi am realizat înmulțirile.
$\frac{^{3}\cancel{6}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{2}_{1}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{1}=\frac{21}{5}$;	Am făcut simplificarea numerelor 6 și 2 prin *tăiere*, iar lângă numerele tăiate am scris câturile împărțirii lor la 2.
$\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{12}=\frac{8\cdot 5}{15\cdot 12}=\frac{40}{180}^{(20}=\frac{2}{9}$; $\frac{^{2}\cancel{8}}{_{3}\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{12}_{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$;	Am simplificat 8 și 12 prin 4 (un divizor comun), iar pe 15 și 5 prin 5.

Atenție! Se poate simplifica orice numărător cu orice numitor. Nu pot simplifica un numărător cu un numărător sau un numitor cu un numitor.

Probleme propuse

•

1. Copiați tabelul pe caiete și apoi completați-l. Acolo unde este posibil, simplificați și scoateți întregii din fracție.

a	2	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{21}$	6	$3\frac{2}{5}$	11	8
b	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{7}$	11	6	14	$\frac{5}{3}$	6	$2\frac{3}{22}$	$2\frac{3}{16}$
$a \cdot b$									

Indicație. $3\frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{17}{5} \cdot 6 = \frac{102}{5} = 20\frac{2}{5}$ (introducem mai întâi întregii în fracție și apoi facem înmulțirea).

2. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{18}$; b) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{16}$; c) $\frac{20}{7} \cdot \frac{49}{30}$; d) $\frac{5}{21} \cdot \frac{14}{15}$;

e) $\frac{25}{16} \cdot \frac{8}{15}$; f) $\frac{25}{35} \cdot \frac{14}{20}$; g) $\frac{22}{8} \cdot \frac{10}{55}$; h) $\frac{13}{15} \cdot \frac{45}{26}$.

3. Copiați tabelul pe caiete și apoi completați-l. Acolo unde este posibil, simplificați și scoateți întregii din fracție.

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot a$	$b \cdot c$	$(a \cdot b) \cdot c$	$a \cdot (b \cdot c)$
$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{14}$					
$\frac{8}{5}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{3}{4}$					
$\frac{2^2}{3^3}$	$\frac{9}{2^3}$	$\frac{6}{5}$					
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{5}$	$\frac{7}{24}$					

Important. Comparând coloanele 4 și 5, respectiv 7 și 8 se observă că se respectă următoarele proprietăți ale înmulțirii fracțiilor ordinare:

- $a \cdot b = b \cdot a$ pentru orice fracții a și b – *înmulțirea fracțiilor ordinare este comutativă;*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pentru orice fracții a, b și c – *înmulțirea fracțiilor este asociativă;*
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ pentru orice fracție a – *numărul 1 este element neutru la înmulțirea fracțiilor.*

••

4. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{14}{25} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{40}{21}$; b) $5\frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{14} \cdot \frac{7}{36}$; c) $\frac{2^3}{3^4} \cdot \frac{5^3}{2^4} \cdot \frac{3^3}{5^2}$.

5. Calculați, respectând ordinea operațiilor:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}$; c) $\left(\frac{5}{6} + \frac{19}{24}\right) \cdot \frac{24}{13}$;

d) $\frac{18}{13} \cdot \left(1\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right)$; e) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{12}{35}$; f) $\frac{21}{8} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{15}$.

6. Pentru a prepara saramura necesară unui butoi de varză se amestecă 30 litri de apă cu $1\frac{1}{20}$ kg de sare. Ce cantități sunt necesare pentru a prepara saramura pentru 5 butoaie de varză? Cât va cântări saramura pentru cele 5 butoaie? (un litru de apă cântărește 1 kg)

7. Calculați:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8}$; b) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$;

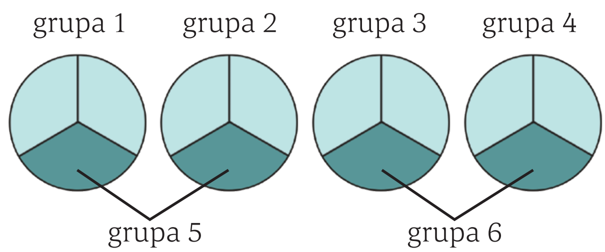
c) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{25}\right)$; d) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{49}\right)$.

Împărțirea fracțiilor

Andrei: Pentru a împărți un număr natural *a* la un număr natural *b* trebuie să aflăm de câte ori se cuprinde numărul *b* în numărul *a*. De exemplu, pentru a împărți 12 la 2 grupăm cei 12 întregi în grupe de câte 2 și numărăm că s-au format 6 grupe.

Ana: Așa facem. Mă gândesc să calculăm la fel $4 : \frac{2}{3}$. Trebuie să aflăm de câte ori se cuprinde $\frac{2}{3}$ în 4. Luăm patru întregi și îi împărțim în câte 3 părți egale (să obținem treimi), așadar vom avea $4 \cdot 3 = 12$ părți egale. Formăm grupe de câte două astfel de părți și obținem 12 (părți) : 2 = 6 grupe. Deci $\frac{2}{3}$ se cuprinde în 4 de 6 ori, adică $4 : \frac{2}{3} = 6$ și am obținut acest rezultatul prin calculul $4 \cdot 3 : 2 = 4 \cdot \frac{3}{2}$.

Andrei: Putem deci afirma că $4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.



Reținem

✓ Orice fracție $\frac{a}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ are inversă fracția $\frac{b}{a}$.

✓ Produsul dintre fracție și inversa sa este 1: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, a și b numere naturale, $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

✓ Câtul a două fracții, a doua fiind diferită de 0, este egal cu produsul dintre prima fracție și inversa celei de-a doua.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$, unde a, b, c și d sunt numere naturale, $b \neq 0$, $c \neq 0$ și $d \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ este deîmpărțitul, $\frac{c}{d}$ este împărțitorul, iar rezultatul împărțirii este câtul.

Probleme rezolvate

- inversa fracției $\frac{3}{7}$ este $\frac{7}{3}$;
- inversa lui $\frac{1}{12}$ este $\frac{12}{1}$, adică numărul natural 12 ;
- $\frac{12}{25} : \frac{8}{5} = \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{8} = \frac{60}{200}^{(20} = \frac{3}{10}$;
- inversa lui $\frac{8}{5}$ este $\frac{5}{8}$;
- inversul numărului natural 7 este $\frac{1}{7}$.
- $\frac{10}{27} : \frac{4}{9} = \frac{{}^{5}\cancel{10}}{{}_{3}\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$.

Probleme propuse

1. Copiați tabelul pe caiete și apoi completați-l. Acolo unde este posibil, simplificați.

a	3	4	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{18}{35}$
b	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{3}$	9	8	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{25}$
inversa lui b	$\frac{7}{2}$								
$a:b$	$\frac{21}{2}$								

2. Determinați:

a) de câte ori se cuprinde un sfert într-o jumătate;

b) de câte ori se cuprinde o jumătate într-un sfert;

c) de câte ori se cuprinde o șesime într-o treime;

d) numărul care înmulțit cu $\frac{3}{4}$ dă ca rezultat numărul $\frac{1}{2}$;

e) numărul care înmulțit cu $\frac{2}{3}$ dă ca rezultat un număr cu $\frac{1}{3}$ mai mic decât $\frac{3}{5}$.

3. Calculați, respectând ordinea operațiilor, și exprimați rezultatul sub formă de fracție ireductibilă.

a) $\frac{12}{25} \cdot \frac{20}{27} : \frac{16}{15}$; b) $\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{12}\right) : \frac{34}{27}$;

c) $\frac{12}{11} \cdot \frac{33}{30} - \frac{10}{9} : \frac{20}{21}$; d) $\left(\frac{4}{15} - \frac{3}{20}\right) : \frac{49}{30}$;

e) $\frac{14}{15} : \frac{10}{21} \cdot \frac{45}{16}$; f) $\frac{12}{15} + \frac{16}{25} : \frac{8}{10}$;

g) $2\frac{5}{14} - 4\frac{1}{12} : 3\frac{8}{9}$; h) $\left(\frac{7}{6} + \frac{7}{8}\right) : \left(1\frac{7}{18} - \frac{5}{12}\right)$.

4. Calculați, exprimând rezultatul sub formă de fracție ireductibilă.

a) $\frac{6}{35} : \frac{9}{14}$; b) $\frac{7}{10} : \frac{21}{15}$; c) $3\frac{1}{5} : 4$;

d) $6 : 1\frac{5}{7}$; e) $2\frac{5}{12} : 4\frac{5}{6}$; f) $4 : \frac{1}{6} : 4\frac{4}{5}$.

5. Ana pregătește banderole tricolore pe care să le poarte împreună cu colegii ei pe 24 ianuarie. Pentru aceasta, taie dintr-o rolă de tricolor lungă de $13\frac{1}{2}$ metri bucăți cu lungimea de $\frac{2}{5}$ metri. Pentru câți copii poate ea confecționa banderole? Îi mai rămâne Anei material nefolosit la final?

6. Mihai înmulțește fracția $\frac{5}{6}$ cu fracția $\frac{2}{3}$, iar Nadia împarte facția $\frac{5}{6}$ la fracția $\frac{2}{3}$. Care dintre cei doi copii obține o fracție mai mare? Comparați cele două fracții obținute cu fracția inițială.

Curiozități

De câte ori puteți plia o foaie de hârtie în jumătate?

Experiența ne arată că, în mod obișnuit, nu puteți plia o foaie de hârtie în jumătate de mai mult de șapte ori. De ce?

Pentru că suprafața hârtiei scade la jumătate cu fiecare pliere și devine foarte puternică din cauza grosimii pe care o capătă. Limita „de șapte ori” este valabilă dacă utilizați o foaie standard de hârtie A4 pentru imprimantă.

De câte ori a fost îndoită foaia de hârtie din imaginea alăturată în jumătate?

De 4 ori.

A câta parte din suprafața foii de hârtie o reprezintă suprafața unui dreptunghiuleț mic din imaginea alăturată?

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

A câta parte din suprafața foii de hârtie o reprezintă suprafața unui dreptunghiuleț mic din foaia de hârtie pliată în jumătate de șapte ori?

Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

Ana: Andrei, comparând cu ce am învățat la puterea unui număr natural, eu zic că putem nota înmulțirea repetată $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ cu scrierea $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Andrei: Și să o citim „2 supra 3, totul la puterea a treia”; iar dacă vrem să o calculăm, facem astfel: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$.

Reținem

✓ Fie o fracție ordinară $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale, $b \neq 0$ și n un număr natural, $n \geq 2$.
Puterea a n-a a fracției $\frac{a}{b}$ se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ și reprezintă produsul $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}$ care conține n factori.
Pentru a ridica la putere o fracție, se ridică la putere numărătorul și numitorul: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
Prin convenție: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ și $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$.

✓ Pentru orice numere naturale a, b, m și n, $b \neq 0$, au loc regulile de calcul cu puteri:
$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$, $m \geq n$; $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$;

Probleme rezolvate

- $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$;
- $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$;
- $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$;
- $\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{7+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$;
- $\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{2}{7}\right)^8 = \left(\frac{2}{7}\right)^{12-8} = \left(\frac{2}{7}\right)^4$;
- $\left[\left(\frac{6}{8}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{6}{8}\right)^{3 \cdot 5} = \left(\frac{6}{8}\right)^{15}$.

Probleme propuse

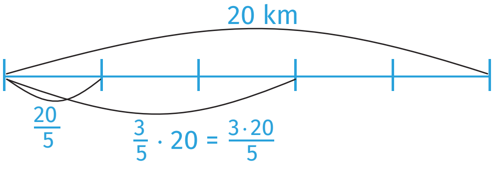
1. Calculați:
a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; b) $\left(\frac{5}{3}\right)^3$; c) $\left(\frac{8}{9}\right)^1$;
d) $\left(\frac{11}{9}\right)^0$; e) $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$;
f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{125}$; g) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 10 - \frac{7}{15}$.

2. Calculați, scriind rezultatul sub forma unei puteri:
a) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7$; b) $\left(\frac{3}{11}\right)^{11} : \left(\frac{3}{11}\right)^5$; $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^4\right]^5$.

3. Calculați, scriind rezultatul sub forma unei puteri:
a) $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 : \left(\frac{5}{6}\right)^7$;
b) $\left[\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right]^{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$;
c) $\left[\left(\frac{11}{9}\right)^6 \cdot \left(\frac{11}{9}\right)^5\right]^3 : \left(\frac{11}{9}\right)^{28}$;
d) $\left[\left(\frac{9}{5}\right)^5\right]^4 : \left(\frac{9}{5}\right)^{15}$.

Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară

Ana a citit un articol despre un semimaraton cu lungimea de 20 km și jumătate, adică $20\frac{1}{2} = \frac{41}{2}$ km. Din acesta ea a aflat că, după 2 ore de la începerea probei, majoritatea concurenților parcurseseră $\frac{3}{5}$ din drum. Împreună cu Andrei, au hotărât să calculeze cât reprezintă distanța respectivă.



Ana: Dacă semimaratonul ar avea doar 20 km aș calcula mai întâi cât reprezintă a cincea parte, adică o cincime (ca la reducerea la unitate): $20:5 = 20 \cdot \frac{1}{5} = \frac{20}{5} = 4$ km. Cele $\frac{3}{5}$ reprezintă 3 astfel de părți, adică $3 \cdot 4 = 12$ km. Deci am calculat de fapt produsul $\frac{3}{5} \cdot 20 = \frac{60}{5} = 12$ km.

Andrei: Eu aș face aceiași pași, folosind lungimea de $\frac{41}{2}$ km. O cincime este $\frac{41}{2} : 5 = \frac{41}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{41}{10}$ km, iar trei cincimi ar fi $3 \cdot \frac{41}{10} = \frac{123}{10}$ km ($12\frac{3}{10}$ km, adică 12 km și 300 de metri). Deci, în final, pentru a afla $\frac{3}{5}$ din $\frac{41}{2}$ am calculat $\frac{3}{5} \cdot \frac{41}{2} = \frac{123}{10}$.

Reținem

- ✓ Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural înmulțim fracția cu numărul.
- ✓ Pentru a afla o fracție dintr-o fracție înmulțim cele două fracții.
- ✓ Pentru a afla $p\%$ dintr-un număr natural / o fracție, înmulțim $\frac{p}{100}$ cu numărul / fracția.

Probleme rezolvate

- $\frac{2}{7}$ din 21 este $\frac{2}{7} \cdot 21 = \frac{2 \cdot 21}{7} = 6$;
- $\frac{5}{8}$ din $\frac{12}{5}$ este $\frac{5}{8} \cdot \frac{12}{5} = \frac{5 \cdot 12}{8 \cdot 5}^{(5\cdot4} = \frac{3}{2}$;
- 20% din 180 este $\frac{20}{100} \cdot 180 = \frac{20 \cdot 180}{100} = 36$;
- $\frac{7}{4}$ din 16 este $\frac{7}{4} \cdot 16 = \frac{7 \cdot 16}{4} = 28$;
- $\frac{6}{7}$ din $\frac{14}{5}$ este $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{12}{5}$;
- 35% din 70 este $\frac{35}{100} \cdot 70 = \frac{2450}{100} = \frac{49}{2}$.

Probleme propuse

1. Copiați tabelul pe caiete și apoi completați-l:

$\frac{3}{4}$ din 20 m	$\frac{4}{5}$ din 50 cm	$\frac{17}{20}$ din 100 kg	$\frac{5}{12}$ din 60 km	$\frac{4}{7}$ din 350 lei
$\frac{3}{4} \cdot 20$ m = 15 m				

Provocare

Ana și Andrei au găsit această problemă într-o culegere. Ei spun că textul nu este corect. Discutați cu un coleg și verificați și voi dacă problema este corect enunțată!

Din cei 24 de elevi ai clasei, 45% sunt băieți. Justificați faptul că în clasă sunt mai multe fete decât băieți.

2. Calculați 15% din:

a) 80 m; b) 60 litri; c) 400 lei;
d) 200 km; e) 300.

3. Calculați:

a) 20% din 70; b) 14% din 250;
c) 34% din 2700; d) 110% din 80.

4. Calculați suma dintre 30% din 70 și 25% din 40.

5. Calculați:

a) $\frac{5}{6}$ din $\frac{36}{10}$ m; b) $\frac{1}{6}$ din 12 ore;

c) $\frac{5}{7}$ din $3\frac{1}{2}$ km; d) $\frac{5}{7}$ din $\frac{7}{10}$;

e) un sfert dintr-un sfert;

f) jumătate din $\frac{7}{5}$; g) 5 jumătăți din $\frac{2}{5}$.

●●

6. Am cheltuit la magazin 45 lei, sumă care reprezintă $\frac{3}{4}$ din suma pe care o aveam. Ce sumă am avut?

Indicație. Dacă $\frac{3}{4}$ din sumă reprezintă 45 lei, atunci $\frac{1}{4}$ din sumă reprezintă 45 : 3 = 15 lei. Suma întreagă este 15 · 4 = 60 lei. Am obținut rezultatul prin calculul $45 : \frac{3}{4} = 45 \cdot \frac{4}{3} = 15 \cdot 4 = 60$ lei.

Important. Putem afla un număr când cunoaștem o fracție din el, împărțind numărul cunoscut la fracția respectivă.

7. Determinați un număr știind că:

a) jumătate din el este 24; b) $\frac{1}{5}$ din el este 20;

c) $\frac{3}{5}$ din el este 12; d) $\frac{4}{3}$ din el este 80;

e) $\frac{5}{6}$ din el este 100; f) 20% din el este 40.

8. Din cei 28 de elevi ai clasei, $\frac{3}{7}$ sunt băieți. Calculați diferența dintre numărul fetelor și cel al băieților.

9. Un biciclist a parcurs în două zile o distanță de 60 km. În prima zi el a parcurs $\frac{2}{5}$ din distanță. Determinați câți kilometri a parcurs în fiecare dintre cele două zile.

10. Prețul unui atlas este 120 lei. El se ieftinește cu 20%. Calculați suma cu care se ieftinește atlasul și care va fi prețul acestuia după ieftinire.

●●●

11. Un bazin gol, cu capacitatea de 2000 litri, începe să se umple la ora 8 dimineața. În fiecare jumătate de oră se umple 10% din capacitatea bazinului.

a) Determinați la ce oră este umplut jumătate din bazin.

b) Calculați câți litri de apă sunt în bazin la ora 12.

12. La intrarea unui magazin este afișul de mai jos. Dacă prețul de pe etichetă al unui tricou este de 80 lei și aveți 50 lei la voi, puteți cumpăra tricoul? Justificați răspunsul.

Știați că?

Maratonul este o probă sportivă de alergare pe distanță lungă, cu o distanță oficială de aproximativ 42 km, care se aleargă de obicei pe șosea. Numele evenimentului face referire la legenda soldatului grec Phidippides, un mesager care a adus la Atena vestea victoriei din bătălia de la Maraton. Semimaratonul are lungimea aproximativă de 20 km.

Probleme recapitulative

1. Rezultatul calculului $\frac{4}{15} \cdot \frac{25}{12}$ este egal cu:

a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $\frac{100}{160}$; d) $\frac{6}{9}$.

2. Rezultatul calculului $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ este egal cu:

a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{4}{6}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{2}{9}$.

3. Calculând 10% din 200 obținem:

a) 10; b) 20; c) 100; d) 200.

4. Calculați:

a) $\frac{7}{12}$ din 360; b) $\frac{8}{5}$ din $\frac{15}{16}$; c) 42% din 150.

5. Calculați:

a) $\frac{8}{15} \cdot \left(\frac{15}{16} : \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4}\right)$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 : \frac{9}{20} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

6. Ana și Andrei pleacă în excursie. Distanța până la destinație este de aproximativ 650 km. Ei parcurg distanța în 3 zile, făcând 2 opriri în două orașe de pe drum. În prima zi parcurg $\frac{2}{5}$ din drum și încă 8 km, iar a doua zi parcurg 20% din lungimea totală a drumului.

a) Este adevărat că în prima zi parcurg mai puțin de 270 km? Justificați răspunsul.

b) Calculați distanța, în kilometri, parcursă în a treia zi.

7. Calculați:

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; b) $\frac{6}{35} \cdot \frac{14}{9} \cdot 3\frac{1}{3}$; c) $4 : \frac{1}{6} : 4\frac{4}{5}$;

d) $\frac{7}{10} \cdot \frac{15}{21} : \frac{1}{4}$; e) $\frac{15}{25} \cdot 1\frac{1}{9} : 1\frac{1}{3}$; f) $15 : 3\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}$;

g) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; h) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right)$;

i) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right)$.

8. Calculați:

a) suma dintre $\frac{3}{5}$ din 80 și 25% din 160;

b) diferența dintre 15% din 180 și $\frac{4}{7}$ din 35.

9. O familie pleacă într-o excursie de la Timișoara spre Iași și hotărăște să parcurgă distanța de 665 km în 3 zile. În prima zi a parcurs $\frac{3}{7}$ din drum, iar a doua zi 45% din restul drumului. Determinați distanța parcursă în a treia zi.

10. Una dintre cărțile citite de Ana în vacanță are 160 de pagini. Ea a citit cartea în 4 zile astfel: în prima zi a citit $\frac{1}{5}$ din numărul de pagini și încă 8 pagini, a doua zi a citit 25% din restul de pagini, a treia zi a citit $\frac{1}{3}$ din câte pagini mai avea cartea și încă 5 pagini, iar în a patra zi restul de pagini. Determinați câte pagini a citit Ana în fiecare dintre cele 4 zile.

Test de autoevaluare

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 45 de minute.

1. Determinați valorile lui a și b știind că $\frac{3}{7} = \frac{a}{21}$ și $\frac{b+1}{3} = \frac{4}{6}$. *10 puncte*

2. Aduceți fracțiile $\frac{5}{12}$ și $\frac{7}{20}$ la un numitor comun și comparați-le. *10 puncte*

3. Simplificați fracția $\frac{72}{90}$ până la forma ireductibilă. *10 puncte*

4. Calculați: a) $\frac{5}{6}$ din $\frac{24}{35}$; b) 22% din 350 m. *10 puncte*

5. Pentru fiecare dintre operațiile de pe prima linie, alegeți rezultatul corect de pe a doua linie.

$\frac{5}{11} + \frac{3}{11}$ $\quad$ $\frac{7}{12} - \frac{3}{12}$ $\quad$ $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{15}$ $\quad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\quad$ $\frac{12}{25} : \frac{18}{10}$

$\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{4}{15}$ $\quad$ $\frac{8}{11}$ $\quad$ $\frac{1}{10}$ $\quad$ $\frac{6}{4}$ $\quad$ $\frac{9}{4}$

10 puncte

6. Calculați: a) $\frac{9}{10}:\left[\left(3\frac{5}{8}-1\frac{3}{8}\right):2\frac{1}{2}\right]$; b) $\frac{5}{12}:\frac{25}{9}+\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{4}{6}-\frac{8}{18}\right)$. *20 puncte*

7. Un telefon costă 800 lei. Se face o ieftinire a acestuia cu 15% din valoarea lui.
a) Arătați că prețul telefonului după ieftinire este de 680 lei.
b) După un timp, telefonul se scumpește cu 15% din prețul lui. Determinați noul preț. *20 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Scoateți întregii din fracție și comparați fracțiile: a) $\frac{51}{16}$ cu $\frac{60}{19}$; b) $\frac{64}{15}$ cu $\frac{52}{12}$; c) $\frac{90}{23}$ cu $\frac{21}{5}$.

2. Comparați: a) $\frac{3}{7}$ din 84 cu $\frac{7}{3}$ din 15; b) $\frac{12}{15}$ din $\frac{125}{80}$ cu 30% din $4\frac{4}{9}$.

3. Transformați următoarele fracții în procente și ordonați-le: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{50}$, $\frac{7}{20}$ și $\frac{13}{25}$.

4. Ordonați crescător numerele:

a) $\frac{11}{20}$, 40%, $\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{25}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{17}{25}$.

5. Determinați valorile cifrei x pentru care fracția:

a) $\frac{\overline{3x}}{8}$ se simplifică prin 2; b) $\frac{18}{\overline{2x3}}$ se simplifică prin 3; c) $\frac{\overline{2xx}}{25}$ se simplifică.

6. Determinați cea mai mare și cea mai mică fracție de forma:

a) $\frac{41}{\overline{a5}}$, $a \neq 0$; b) $\frac{\overline{7a}}{83}$, unde $\overline{7a} \vdots 3$; c) $\frac{\overline{a7a}}{\overline{3b}}$, unde $\overline{a7a} \vdots 9$ și $\overline{3b} \vdots 2$.

7. Calculați:

a) $\left(\frac{7}{8}+\frac{9}{8}\right)\cdot 5-2^2$; b) $3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)-1$; c) $5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}\right)\cdot 5$;

d) $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{12}-\frac{23}{24}\right)\cdot\frac{3}{5}+1\frac{3}{10}$; e) $\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{6}+\frac{7}{18}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)$; f) $\left(\frac{1}{6}+\frac{17}{8}\right):\frac{33}{8}+\frac{4}{9}$;

g) $\left(\frac{11}{12}-\frac{13}{18}\right):1\frac{5}{9}$; h) $\left(1\frac{1}{12}-\frac{7}{15}\right):\frac{37}{20}+3\frac{2}{3}$; i) $\left(1\frac{7}{30}-\frac{3}{4}\right):\frac{29}{20}-\left(2\frac{5}{8}-1\frac{3}{4}\right):3\frac{1}{2}$.

8. Mihai are pe card suma de 4800 lei. El scoate într-o zi $\frac{3}{5}$ din suma pe care o are, iar după o săptămână încă $\frac{1}{3}$ din suma rămasă. Cu ce sumă a rămas Mihai pe card?

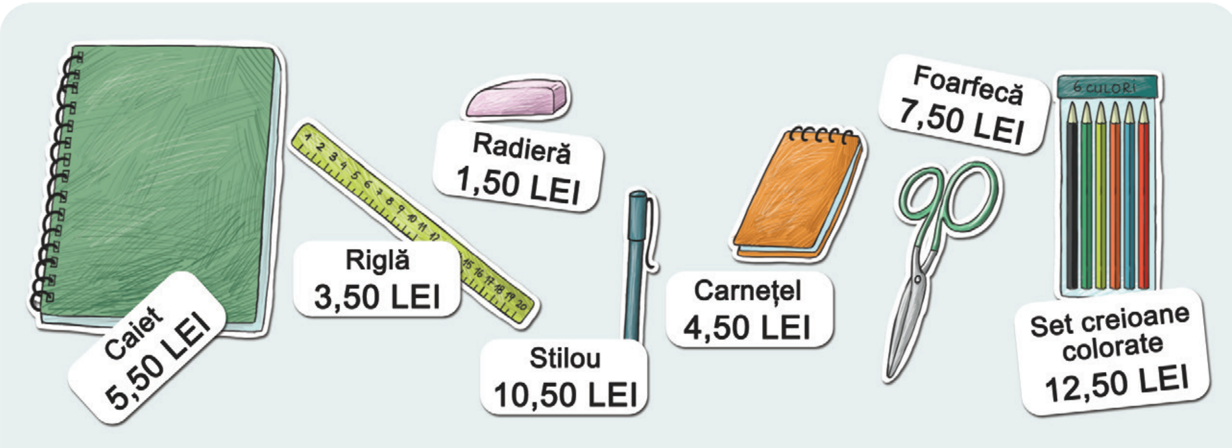
9. Într-un depozit sunt $23\frac{2}{5}$ tone de cereale. Se vinde într-o zi $\frac{5}{9}$ din cantitate.
a) Explicați, fără a calcula cantitățile, de ce în depozit rămâne o cantitate de cereale mai mică decât cea vândută.
b) Calculați cantitatea de cereale rămasă în depozit.

10. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{\overline{5a}}{\overline{a4}}$, unde a este cifră impară, și comparați numărul fracțiilor supraunitare cu cel al fracțiilor subunitare. Explicați de ce nu există astfel de fracții echiunitare.

11. Determinați numărul fracțiilor echiunitare de forma $\frac{\overline{ab}+3}{\overline{ba}+12}$.

12. Arătați că fracția $\frac{\overline{a0a}+\overline{a0}}{51}$ se poate simplifica, oricare ar fi valoarea cifrei nenule a, și realizați simplificarea.

FRACȚII ZECIMALE



Fracții zecimale

Ana și Andrei s-au întors de la magazin, unde au făcut cumpărături împreună cu părinții lor.

Ana: Andrei, l-am întrebat pe tata ce sunt numerele acelea cu virgulă scrise la prețurile obiectelor și mi-a spus că sunt tot niște fracții, dar le-a spus fracții zecimale. A mai spus că prețurile sunt exprimate în lei și bani, despărțite de virgulă

Andrei: Știi că am învățat că un leu este format din 100 de bani. Deci un ban ar fi a suta parte dintr-un leu, adică 1 ban = $\frac{1}{100}$ din 1 leu.

Ana: Deci, dacă rigla aceea pe care am cumpărat-o costă 3,50 lei, adică 3 lei și 50 de bani, înseamnă că partea de după virgulă reprezintă $\frac{50}{100}$ dintr-un leu, iar prețul ar fi $3\frac{50}{100}$, dar a fost scris $3,50$.

Reținem

✓ O *fracție zecimală* este un număr format din două părți despărțite de o virgulă:
- partea întreagă, aflată la stânga virgulei,
- partea zecimală, aflată la dreapta virgulei – cifrele de după virgulă numindu-se zecimale.

Fracția $\frac{1}{10}$, adică o zecime, se scrie sub forma 0,1 și se citește „zero virgulă unu”.

Fracția $\frac{1}{100}$, adică o sutime, se scrie sub forma 0,01 și se citește „zero virgulă zero unu”.

Fracția $\frac{1}{1000}$, adică o miime, se scrie sub forma 0,001 și se citește „zero virgulă zero zero unu”.

Continuând raționamentul, obținem $\frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{000\ldots01}_{\text{n cifre}}$, unde n este un număr natural nenul.

Exemple:

- $\frac{3}{10} = 0,3$ adică 3 *zecimi*;
- $\frac{7}{100} = 0,07$ adică 7 *sutimi*;
- $\frac{4}{1000} = 0,004$ adică 4 *miimi*;

Prima cifră din dreapta virgulei se numește *zecime*, a doua *sutime*, a treia *miime,* a patra se citește *zecime de miime* și așa mai departe.

Fracția zecimală	Partea întreagă	Partea zecimală	Cum citim	Fracția ordinară
3,5	3 întregi	5 zecimi	3 virgulă 5 sau 3 întregi și 5 zecimi	$3\frac{5}{10}$, adică $\frac{35}{10}$
27,24	27 de întregi	24 de sutimi <u>sau</u> 2 zecimi și 4 sutimi	27 de întregi și 24 de sutimi <u>sau</u> 27 de întregi 2 zecimi și 4 sutimi	$27\frac{24}{100}=\frac{2724}{100}$ sau $27+\frac{2}{10}+\frac{4}{100}$
74,238	74 de întregi	238 de miimi 2 zecimi 3 sutimi 8 miimi	74 de întregi și 238 de miimi <u>sau</u> 74 de întregi 2 zecimi 3 sutimi și 8 miimi	$74\frac{238}{1000}=\frac{74238}{1000}$

zecimi
unități sutimi
zeci miimi

$$\underbrace{74}_{\text{partea întreagă}},\underbrace{238}_{\text{partea zecimală}} = 74+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}=74\frac{238}{1000}=\frac{74238}{1000}$$

Reținem

✓ Orice fracție ordinară cu numitorul o putere a lui 10 se poate transforma într-o fracție zecimală. Aceasta se obține scriind doar numărătorul fracției și despărțind cifrele acestuia cu o virgulă, astfel încât numărul obținut să aibă numărul de zecimale egal cu exponentul lui 10 de la numitor.

Exemple:

- $\frac{526}{10}=52,6$ – o zecimală pentru că numitorul 10 are o singură cifră zero;
- $\frac{179}{100}=1,79$ – 2 zecimale pentru că $100=10^2$ (100 are 2 cifre de 0);
- $\frac{73}{100}=0,73$ – am adăugat un 0 în fața numărului 73 pentru că fracția este subunitară și nu are parte întreagă (adică partea întreagă este zero);
- $\frac{18}{1000}=0,018$ – $\frac{18}{1000}=\frac{10}{1000}+\frac{8}{1000}=\frac{1}{100}+\frac{8}{1000}$, deci fracția zecimală nu are zecimi și nici parte întreagă și am pus 0 în locul acestora.

La transformarea în fracție zecimală a unei fracții subunitare cu numitorul o putere a lui zece, este necesar să adăugăm zerouri în fața numărului care reprezintă numărătorul înainte de a stabili poziția virgulei!

Reținem

✓ Orice fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule se poate transforma într-o fracție ordinară. Pentru aceasta, scriem la numărător numărul natural obținut din fracția zecimală căreia îi „ștergem” virgula, iar la numitor scriem acea putere a lui 10 care are exponentul egal cu numărul de zecimale ale fracției zecimale.

Exemple:

- $1,25 = \frac{125}{100}$ – la numărător am scris numărul 125 obținut prin ștergerea virgulei de la 1,25, iar la numitor am scris 100 pentru că fracția zecimală avea 2 zecimale și $10^2 = 100$;
- $0,75 = \frac{75}{100}$ – odată cu ștergerea virgulei de la 0,75 șterg și cifra 0 din față;
- $0,009 = \frac{9}{1000}$ – fracția zecimală are 3 zecimale, deci numitorul trebuie să fie $10^3 = 1000$;
- $15,70 = \frac{1570}{100}$ – $\frac{1570^{(10}}{100} = \frac{157}{10}$ și pot face transformarea $\frac{157}{10} = 15,7$, deci $15,70 = 15,7$.

Reținem

✓ La o fracție zecimală, după ultima cifră nenulă putem adăuga oricâte zerouri, iar fracția își păstrează valoarea.

✓ Dacă ultimele zecimale ale unei fracții zecimale sunt zerouri, acestea pot fi eliminate, iar fracția își păstrează valoarea.

✓ Orice număr natural poate fi scris ca o fracție zecimală, punând virgulă în dreapta numărului și oricâte zerouri sunt necesare. *De exemplu* $14 = 14,0$ *sau* $125 = 125,000$.

✓ Dacă partea zecimală a unei fracții zecimale este formată doar din zerouri, atunci aceasta este un număr natural. *De exemplu,* $9,00 = 9$.

Probleme propuse

●

1. Pentru a citi numărul 3,8 pot spune: *trei virgulă 8* sau *3 întregi și 8 zecimi* sau *38 de zecimi*. Citiți și voi următoarele fracții zecimale:

a) 0,5; b) 17,9; c) 3,74; d) 9,143; e) 124,057.

2. Scrieți următoarele fracții zecimale:

a) cinci zecimi; b) nouăsprezece zecimi; c) opt sutimi; d) 34 de sutimi; e) 172 de sutimi; f) un întreg 6 zecimi 2 sutimi; g) 14 întregi 18 sutimi.

3. Considerăm fracția zecimală 174,5138. Completați spațiile punctate astfel încât următoarele propoziții să fie adevărate:

a) cifra sutelor este ...; b) cifra sutimilor este .... ; c) cifra zecimilor este .... ; d) cifra unităților este ....; e) partea întreagă este ....; f) partea zecimală are ... cifre.

4. Copiați pe caiet tabelul următor și completați-l conform modelului.

Fracția zecimală	Partea întreagă	Cifra zecimilor	Cifra sutimilor	Cifra miimilor	Numărul de zecimi
12,47	12	4	7	0	124
107,08					
0,5168					
7594,587					

Observație. La determinarea numărului de zecimi ale unei fracții zecimale ținem cont și de numărul de zecimi din care este formată partea întreagă!

●●

5. Scrieți următoarele fracții ordinare sub formă de fracții zecimale:

$\frac{3}{10}, \frac{87}{10}, \frac{75}{100}, \frac{9}{100}, \frac{485}{10}, \frac{1587}{100}, \frac{5978}{1000}, \frac{1008}{100}, \frac{25179}{1000}$.

6. Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare cu numitorul o putere a lui 10.

a) 1,24; b) 17,2; c) 0,014;
d) 100,07; e) 8,751; f) 34,15.

7. Scrieți sub formă de fracții zecimale, amplificând sau simplificând următoarele fracții ordinare pentru a obține puteri ale lui 10 la numitor.

a) $\frac{37}{5}$; b) $\frac{17}{4}$; c) $\frac{39}{30}$;
d) $2\frac{17}{25}$; e) $\frac{512}{50}$; f) $\frac{2300}{500}$.

8. Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare și simplificați-le pentru a obține fracții ireductibile.

a) 2,6; b) 0,08; c) 0,15;

d) 4,25; e) 3,75; f) 2,34.

Observați numitorii fracțiilor ireductibile. Singurii divizori proprii primi ai acestora sunt fie 2, fie 5, fie 2 și 5!

Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Ana și Andrei studiază bonul de la librăria de unde au făcut cumpărături. Pentru că tocmai au învățat despre fracțiile zecimale, s-au gândit să vadă care dintre obiectele cumpărate este mai scump și care este mai ieftin.

Andrei: Este clar că rigla este mai scumpă decât oricare dintre pixuri, pentru că pe riglă am dat mai mult de 3 lei, iar pixurile costă mai puțin de 3 lei. Deci 2,25 < 3,5 și 2,5 < 3,5. Dar la pixuri, deși este clar că 2 lei și 25 de bani e mai puțin decât 2 lei și 50 de bani, nu-mi dau seama cum să explic de ce 2,25 < 2,5.

Ana: Cred că trebuie să ne uităm la zecimi, prețul pixului albastru are doar două zecimi, iar prețul pixului roșu are 5 zecimi: 2,25 < 2,5. Nu m-a interesat partea întreagă a celor două numere pentru că este aceeași.

Andrei: Ai dreptate. Pe bon scrie că pixul roșu costă 2,5 lei, dar asta înseamnă 2 lei și 50 de bani, adică 2,50 lei. Iar 50 de sutimi este mai mare decât cele 25 de sutimi de la prețul de 2,25 lei al pixului albastru: 2,50 > 2,25.

Reținem

✓ Când comparăm două fracții zecimale comparăm mai întâi părțile lor întregi și, dacă acestea sunt diferite, este mai mare fracția cu partea întreagă mai mare. Dacă părțile întregi sunt egale, comparăm, de la stânga la dreapta, zecimalele de același ordin până când găsim două cifre diferite; este mai mare fracția care are cifra respectivă mai mare.

✓ A ordona *crescător* un șir de numere înseamnă a le așeza de la cel mai mic la cel mai mare, iar *descrescător*, de la cel mai mare la cel mai mic.

Exemple:

- **21**,74 < **37**,112
părți întregi diferite și **21** < **37**;

- 45,**9** > 45,**3**47
aceeași parte întreagă,
zecimi diferite și **9** > **3**;

- 105,4**1**7 < 105,4**2**5
aceeași parte întreagă,
sutimi diferite și **1** < **2**;

- fiind date fracțiile 5,63; 3,6; 5,62; 4,28; 3,57; 2,99; 8,1 ordinea crescătoare a acestora este 2,99 < 3,57 < 3,6 < 4,58 < 5,62 < 5,63 < 8,1.

Probleme rezolvate

- Determinați cea mai mare și cea mai mică dintre fracțiile: 1,23; 3,4; 2,15; 1,1; 2,09; 3,04; 0,589; 1.

Rezolvare. Căutăm fracțiile zecimale cu cea mai mare parte întreagă: 3,4 și 3,04, iar dintre ele 3,4 este mai mare. Cea mai mică este 0,589 pentru că are cea mai mică parte întreagă.

- Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între 7,53 și 7,54.

Rezolvare. Având în vedere că 7,53 = 7,530 și 7,54 = 7,540 se observă acum (mai ușor) exemple de fracții zecimale cuprinse între 7,530 și 7,540. De exemplu, 7,532 sau 7,537 sau 7,539.

Proiect

Folosind internetul, căutați care este cursul valutar la 4 bănci diferite într-o anumită zi. Completați un tabel cu trei coloane, în care pe prima coloană scrieți numele băncii, pe a doua coloană cursul de schimb valutar la vânzare și pe a treia coloană prețul de curs valutar la cumpărare. Ordonați crescător cursurile la vânzarea unui euro.

Aproximări

Reținem

✓ De multe ori, pentru a face unele calcule mai ușoare, folosim *aproximări* ale fracțiilor zecimale.

✓ Ca și la numere naturale, *aproximările* pot fi *prin lipsă* sau *prin adaos*.

✓ Rotunjirea unei fracții la un anumit ordin este aproximarea prin lipsă sau prin adaos mai „apropiată” de numărul respectiv.

Exemple:

Fracția zecimală	Aproximarea prin adaos la ...				Aproximarea prin lipsă la ...				Rotunjirea la întreg
	întreg	zecime	sutime	miime	întreg	zecime	sutime	miime	
12,2765	13	12,3	12,28	12,277	12	12,2	12,27	12,276	12
9,527	10	9,6	9,53	9,527	9	9,5	9,52	9,527	10
0,01325	1	0,1	0,02	0,014	0	0	0,01	0,013	0

Rotunjirea numărului 125,357 la ...				
sută	zece	unitate/întreg	zecime	sutime
100	130	125	125,4	125,36

Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Ana: Andrei, știi că am discutat despre cum reprezentăm fracții ordinare pe axa numerelor și, spuneam atunci, că împărțim unitatea de măsură în atâtea părți câte arată numitorul.

Andrei: La fel facem și la fracțiile zecimale. Folosim aproximările la întreg pentru a vedea între ce numere naturale consecutive se încadrează fracția și apoi împărțim unitatea respectivă de pe axă în 10, sau 100, sau 1000 – depinde câte zecimale are numărul. În final, alegem poziția numărului pe axă. Arată la fel ca rigla cumpărată azi, care are diviziunile mari la centimetri (diviziuni pentru întregi), iar diviziunile mici la milimetri (diviziuni ale zecimilor).

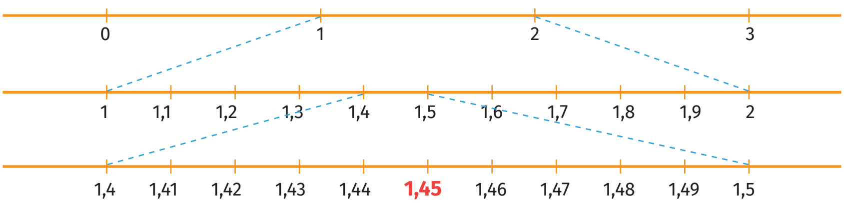
Ana: Este cam greu să împarți unitatea axei în 100 de părți egale. Eu zic că e mai bine să facem reprezentări pe axă ale unor aproximări ale fracțiilor zecimale sau chiar ale rotunjirilor acestora, de exemplu la zecime.

Reținem

✓ Fracțiile zecimale pot fi reprezentate pe axa numerelor. Pe axa numerelor, numerele din stânga sunt mai mici decât numerele din dreapta. Uneori, reprezentarea pe axă a fracțiilor zecimale se face folosind aproximări ale acestora, în special pentru fracțiile cu un număr mare de zecimale.

Exemplu: Pentru a reprezenta numărul 1,45:

- mai întâi stabilim că 1 < 1,45 < 2 și luăm partea de axă corespunzătoare numerelor 1 și 2 pe care o împărțim în 10 părți;
- poziționăm punctele 1,4 și 1,5 pe axă (aproximările lui 1,45 la zecimi), adică a patra și a cincea diviziune, și *mărim* partea de axă dintre ele (ca și cum am privi printr-o lupă);
- împărțim partea respectivă în 10 părți și îl poziționăm pe 1,45 la a 5-a diviziune.



Probleme propuse

1. Încadrați între două numere naturale consecutive fracțiile zecimale:
a) 0,17; b) 3,4; c) 5,008; d) 23,100.

2. Comparați:
a) 3,2 cu 3,5; b) 27,8 cu 27,73; c) 352,4 cu 253,4;
d) 0,27 cu 0,37; e) 1,008 cu 1,08; f) 17,5 cu 17,50.

3. Scrieți două fracții zecimale:
a) mai mari decât 15,7 și mai mici decât 16,3;
b) mai mari decât 9,2 și mai mici decât 10,2;
c) mai mari decât 11 și mai mici decât 11,4;
d) mai mari decât 4,8 și mai mici decât 4,9;
e) care au partea întreagă 7 și sunt mai mici decât 7,1.

4. Determinați câte numere naturale sunt cuprinse între:
a) 0,7 și 8,3; b) 4,71 și 14,71; c) 3,8 și 87,5.

5. Ordonați crescător numerele: 2,1; 0,89; 1,04; 1,997; 2,05; 0,005897.

6. Copiați pe caiete tabelul și completați-l.

Fracția zecimală	Aproximarea prin adaos la ...		Aproximarea prin lipsă la ...		Rotunjirea la întreg
	întreg	zecime	întreg	zecime	
7,321					
27,07					
54,63					
317,554					

7. Rotunjiți:
a) numerele 0,76; 49,27 și 7218,53 la zecime;
b) numerele 1,236; 0,888 și 152,824 la sutime;
c) numerele 29,355; 0,9971 și 15,627 la întreg.

8. Reprezentați pe axa numerelor fracțiile: 0,6; 1,4; 2,7; 3,2; 1,5; 2,2 și 4.

9. În imaginea de mai jos este un fragment dintr-un test grilă rezolvat de un elev. Calculați punctajul obținut de el pentru cele 5 exerciții, știind că fiecare răspuns corect primește un punct.

1. Dintre următoarele relații, cea adevărată este:
a) 3,71 < 3,568; b) 7,01 > 7,1;
c) 0,04 > 0,004; d) 7,12 = 7,21
2. Dintre următoarele fracții zecimale, cea care este mai mare decât 7,314 este:
a) 7,3; b) 7,31; c) 7,305; d) 7,4.
3. Dintre următoarele numere, cel mai mic este:
a) 8,20; b) 8,192; c) 8,19000; d) 8,191.
4. Rotunjirea la întreg a numărului 17,538 este:
a) 17; b) 18.
5. Mihai afirmă: „Între numerele 15,3 și 15,9 există cinci fracții zecimale cu o zecimală”. Afirmația lui Mihai este:
a) adevărată b) falsă.

10. Determinați câte numere naturale n verifică relația $14,8 < \frac{n}{100} < 72,21$.
Indicație. Transformați fracțiile zecimale în fracții ordinare cu numitorul 100.

11. Determinați cifra x știind că:
a) $11,8 < \overline{11,x}$; b) $\overline{x24} > 735,7$.

Activitate în echipe

Împărțiți-vă în echipe de câte 5-6 colegi. În cadrul fiecărei echipe, scrieți pe caiete înălțimile voastre (în metri) și ordonați crescător numele voastre în funcție de acestea. Luați cea mai mare înălțime din fiecare dintre echipele formate și ordonați-le crescător. Puteți spune acum care este cel mai înalt coleg din clasă? Dar cel mai scund?

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 30 de minute.

1. Transformați în fracții zecimale: a) $\frac{1754}{100}$; b) $5\frac{17}{100}$. *20 puncte*

2. Scrieți ca fracție ordinară ireductibilă: a) 0,073; b) 12,25. *20 puncte*

3. Calculați suma numerelor a și b știind că $3,24 = \frac{a}{50}$ și $0,16 = \frac{4}{b}$. *15 puncte*

4. Comparați: a) 17,24 cu 19,35; b) 7,215 cu 7,125; c) 31,47 cu $\frac{3149}{100}$. *15 puncte*

5. Determinați numărul de numere naturale situate, pe axa numerelor, între 11,7 și 58,004. *10 puncte*

6. Calculați suma dintre aproximarea prin lipsă la întregi a numărului 24,7, aproximarea prin adaos la întregi a numărului 14,24 și rotunjirea la întregi a numărului 8,456. *10 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

Ana și Andrei sunt la cumpărături cu părinții lor și au primit „misiunea” de a cumpăra legume și fructe, dar trebuie să se încadreze în 50 lei. Ei au pus în coș:

Produs	Portocale	Mere	Banane	Cartofi	Ardei	Roșii	Ceapă	Morcovi
Preț (lei)	3,85	4,30	5,85	7,20	6,50	8,75	4,30	5,80

Ana: Cu ceea ce am învățat până acum la fracții zecimale, eu spun că ne ajung cei 50 lei pentru a plăti tot ce am pus în coș.

Andrei: Ai dreptate.

Verificați dacă cei doi au dreptate. Explicați cum ați procedat.

1. Transformați în fracții ordinare ireductibile. Acolo unde se poate, scoateți întregii din fracție.

a) 0,24; b) 3,5; c) 0,64; d) 17,8; e) 7,03; f) 8,75.

2. Mihai a primit rest de la cumpărături 2 bancnote de 1 leu, o monedă de 50 de bani, 3 monede de 10 bani și o monedă de 5 bani. Exprimați acest rest sub forma unei fracții zecimale (exprimată în lei).

3. Scrieți: a) trei fracții zecimale care au partea întreagă 11 și sunt mai mici decât 11,2;

b) două fracții zecimale cuprinse între numerele 105,9 și 106;

c) numerele naturale consecutive între care se află fracția 12,517.

4. Scrieți în ordine crescătoare fracțiile: $\frac{15}{100}$; 0,2; 0,034; 1,8; $1\frac{5}{10}$; 1,34.

5. Transformați fracțiile ordinare în fracții zecimale. Acolo unde este cazul, realizați simplificări/amplificări convenabile.

a) $\frac{11}{10}$; b) $\frac{36}{10}$; c) $\frac{1487}{100}$; d) $\frac{28}{1000}$; e) $3\frac{17}{100}$; f) $15\frac{4}{100}$; g) $\frac{75}{30}$; h) $\frac{749}{70}$; i) $\frac{18}{5}$; j) $\frac{36}{16}$; k) $1\frac{7}{25}$; l) $\frac{138}{50}$.

6. Scrieți sub formă de fracție zecimală fiecare dintre următoarele procente:

a) 37%; b) 8%; c) 231%; d) 2050%.

Indicație. $37\,\% = \frac{37}{100} = 0,37$.

7. Determinați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că $0,8 = \frac{a}{5}$ și $4,5 = \frac{9}{b}$.

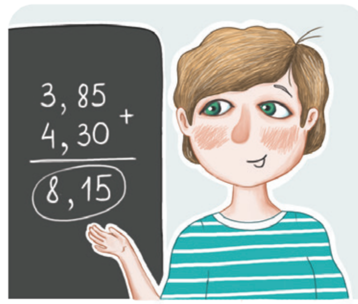
8. Scrieți toate numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relația $2,34 < \overline{a,bc} < \frac{241}{100}$.

Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Amintindu-și de ziua anterioară, când au avut *misiunea* de a cumpăra legumele și fructele, Ana și Andrei discută despre modul în care au estimat dacă le ajung cei 50 lei pentru cumpărături. Amândoi au aproximat prin adaos prețurile, dar acum au hotărât să le adune, pentru a ști exact ce sumă au cheltuit.

Ana: Voi aduna 3,85 lei cu 4,30 lei, trasformând în lei și bani.

Andrei: Eu le pun *unele sub altele*, cum am învățat la numere naturale, așezând cifele de același ordin una sub alta. Dacă pun unitățile sub unități și zecimile sub zecimi, *virgula ajunge sub virgulă*.



După ce au adunat prețurile produselor cumpărate, copiii au obținut 46,55 lei. Acum calculează suma rămasă din cei 50 lei după ce au fost achitate cumpărăturile.

$$\begin{array}{r} 50,00 - \\ 46,55 \\ \hline 3,45 \end{array}$$

Reținem

Pentru a aduna sau scădea două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale, procedăm astfel:

✓ așezăm/scriem numerele unul sub altul: virgulă sub virgulă, unități sub unități, zeci sub zeci, sute sub sute etc., zecimi sub zecimi, sutimi sub sutimi etc.;

✓ efectuăm adunarea/scăderea după regula de adunare/scădere a numerelor naturale;

✓ scriem virgula la rezultat pe aceeași poziție ca și la termeni (când ajungem în dreptul virgulei „o coborâm la rezultat”).

Important! În cazul în care unul dintre termeni are mai puține zecimale, îi adăugăm zerouri după ultima zecimală nenulă până când vor avea același număr de zecimale.

Exemple:

$$\begin{array}{r} 23,425 + \\ 4,214 \\ \hline 27,639 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 107,20 + \\ 21,74 \\ \hline 128,94 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 83,00 + \\ 7,52 \\ \hline 90,52 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,008 + \\ 1,992 \\ \hline 2,000 \end{array}$$

23,425 + 4,214 = 27,639	107,2 + 21,74 = 128,94	83 + 7,52 = 90,52	0,008 + 1,992 = 2

$$\begin{array}{r} 57,84 - \\ 21,23 \\ \hline 36,61 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 217,47 - \\ 43,20 \\ \hline 174,27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 59,85 - \\ 23,00 \\ \hline 36,85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100,00 - \\ 18,25 \\ \hline 81,75 \end{array}$$

57,84 – 21,23 = 36,61	217,47 – 43,2 = 174,27	59,85 – 23 = 36,85	100 – 18,25 = 81,75

Problemă rezolvată

Într-un depozit cu cereale erau, la primele ore ale dimineții, 127,5 tone de grâu. Până la ora 12 s-au vândut 12,3 tone pentru un magazin și alte 23,48 tone pentru o fermă de păsări. La ora 14 s-a făcut aprovizionare cu încă 40 tone, iar până la închiderea programului s-au mai vândut 75,215 tone de grâu. Câte tone au rămas în depozit la finalul programului?

Rezolvare. 127,5 – 12,3 – 23,48 = 91,72 tone erau la ora 12;
91,72 + 40 = 131,72 tone erau după aprovizionare;
131,72 – 75,215 = 56,505 tone au rămas în depozit la finalul programului.

Activitate în perechi

Considerăm numerele $a = 17,2$, $b = 15,4$ și $c = 9,15$. Formați echipă cu un coleg de clasă și efectuați, fiecare dintre voi, calculele de pe câte una dintre coloanele tabelului următor. Verificați calculele colegului și trageți concluzii referitoare la proprietățile adunării fracțiilor zecimale.

$a + b$	$b + a$
$(a + b) + c$	$a + (b + c)$
$a + 0$	$b + 0$

Probleme propuse

●

1. Calculați:

a) 2,4 + 3,5; b) 11,7 + 8,3; c) 2,75 + 7,4;

d) 12,42 + 17,58; e) 15 + 21,7; f) 102,08 + 54,8.

2. Calculați:

a) 25,7 – 12,5; b) 82,45–17,21;

c) 134,74 – 45,4; d) 57,9 – 23,42;

e) 73,45 – 34,72; f) 207,6 – 124,82.

3. Calculați:

a) 14,7 + 21,8 + 0,9; b) 25,12 + 81,4 + 7,05;

c) 0,04 + 0,4 + 0,004; d) 54,3 + 17,81 – 61,32;

e) 32,8 – 14,27 + 6,025; f) 87,45 – 23,21 – 17,9.

4. Determinați numărul care este:

a) cu 15,72 mai mare decât 21,18;

b) cu 14,8 mai mic decât 54;

c) cu 11,6 mai mic decât suma numerelor 7,51 și 12,09;

d) cu 21,17 mai mare decât diferența numerelor 24 și 15,17.

●●

5. Scrieți numărul 12,7 ca:

a) o sumă dintre două fracții zecimale;

b) o sumă dintre un număr natural și o fracție zecimală;

c) o diferență dintre două fracții zecimale;

d) o diferență dintre o fracție zecimală și un număr natural.

6. Pentru a străbate un traseu montan cu lungimea de 6,7 km, un turist a făcut 2 popasuri, primul după 2,4 km, iar al doilea după încă 2,75 km. Calculați lungimea ultimei părți a traseului (rezolvați problema prin 2 metode).

Exercițiu ajutător:

Dacă $a = 51,4$, $b = 12,28$ și $c = 23,32$, calculați $a - b - c$ și $a - (b + c)$.

Discutați cu colegi din clasă ce observați, formulați o concluzie și verificați dacă se aplică și pentru alte fracții zecimale.

7. Observați rezolvarea de la punctul a) și rezolvați și voi, prin transformare în fracții ordinare, celelalte exerciții, scriind rezultatul ca o fracție zecimală:

a) $11,4 + 21,25 = {}^{10)}\frac{114}{10} + \frac{2125}{100} = \frac{1140 + 2125}{100} = \frac{3265}{100} = 32,65$;

b) 23,12 + 7,3; c) 142,5 – 73,15;

d) $43,45 + \frac{837}{100}$; e) $12\frac{7}{10} - 7,21$;

f) $51,4 + 8\frac{3}{5}$; g) $23,5 - 17\frac{1}{2}$.

8. Efectuați următoarele calcule și rotunjiți rezultatul la un întreg. Rotunjiți la întreg fiecare termen al adunării și calculați suma. Ce observați?

a) 15,2 + 11,4 + 8,2; b) 17,8 + 23,5 + 11,6.

9. Calculați suma tuturor numerelor de forma $\overline{x,y}$ pentru care $x = y - 4$.

10. Dați un exemplu de două fracții zecimale care nu sunt numere naturale, dar pentru care atât suma, cât și diferența lor sunt numere naturale.

11. Plecând în vizită la bunica lui, Mihai a parcurs 2,4 km cu taxiul, de acasă până la Autogară, 32,75 km cu autobuzul, până în localitatea bunicii, și încă 0,8 km pe jos. Ce distanță a parcurs în total Mihai?

●●●

12. Calculați suma $\overline{a,b} + \overline{b,a}$, știind că suma cifrelor a și b este 8.

Indicație. Puteți așeza numerele unele sub altele sau puteți transforma în fracții ordinare:

$$\overline{a,b} + \overline{b,a} = \frac{\overline{ab}}{10} + \frac{\overline{ba}}{10} = \frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{10} = \frac{11(a+b)}{10} =$$
$$= \frac{88}{10} = 8,8.$$

13. Calculați suma $\overline{a,b} + \overline{b,a}$ dacă $a + b = 15$.

14. Determinați cifra a pentru care $a - (\overline{0,a} + \overline{0,0a}) = 6,23$.

Proiect

Căutați pe internet care este recordul mondial actual la proba de atletism de 100 m. Completați un tabel cu ultimele 10 recorduri mondiale (o coloană cu anul în care a fost înregistrat și una cu recordul) și calculați cu cât s-a *îmbunătățit* ultimul record mondial față de cel din anul 1999. Prezentați colegilor materialul și verificați dacă ați obținut aceleași rezultate.

Provocare

Ioana, Raluca și Dănuț au de rezolvat exercițiul 32,61 + 1,526 și au obținut rezultate diferite:

- Ioana
$$\begin{array}{r} 3\,2,61\,+ \\ \underline{1,5\,26} \\ 4\,7,87 \end{array}$$
- Raluca
$$\begin{array}{r} 32,610\,+ \\ \underline{1,526} \\ 34,136 \end{array}$$
- Dănuț
$$\begin{array}{r} 32,610\,+ \\ \underline{1,526} \\ 33,136 \end{array}$$

Care adunare este corectă? Discutați la nivelul clasei și stabiliți unde este greșeala!

Să ne jucăm

Pătrat magic: suma numerelor de pe fiecare linie, coloană și diagonală este aceeași.

Rezolvați:

	1,7	1,6
	1,5	
1,4		

0,8	2,8	2,4
		3,2

3,6			3,3
		3,1	
2,9	2,6		
2,4		3,4	2,1

	2,5		5,4	
1,75		0,25		4,6
	3,15		2,1	
2,6		3,27		1,14
	1,84		4,08	
2,05		2,62		0,05
	4,19		3,7	

Completați fiecare spațiu liber cu suma celor patru vecini și ordonați crescător numerele obținute.

Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale

Ana: Am avut câteva exerciții în temă la care am făcut adunarea sau scăderea unor fracții zecimale folosind transformarea lor în fracții ordinare. Încerc metoda pentru o înmulțire și voi calcula $2,13 \cdot 3$ astfel:

$2,13 \cdot 3 = \frac{213}{100} \cdot 3 = \frac{213 \cdot 3}{100} = \frac{639}{100} = 6,39.$

Observ că am înmulțit de fapt 213 cu 3, iar rezultatul are tot 2 zecimale ca și numărul 2,13.

Andrei: Calculez și eu $2,13 \cdot 1,2$ astfel:

$2,13 \cdot 1,2 = \frac{213}{100} \cdot \frac{12}{10} = \frac{213 \cdot 12}{100 \cdot 10} = \frac{2556}{1000} = 2,556.$

Și eu am înmulțit de fapt numerele naturale care provin din fracțiile zecimale de la care am eliminat virgula. Iar rezultatul înmulțirii, adică produsul, observ că are aceași număr de zecimale ca cei doi factori împreună.

Reținem

Pentru a înmulți două fracții zecimale procedăm astfel:

✓ înmulțim numerele ca și când nu ar avea virgulă, deci ca și când ar fi numere naturale;

✓ punem virgula la rezultat astfel încât fracția obținută să aibă atâtea zecimale câte au împreună cei doi factori; dacă nu sunt suficiente cifre, completăm în stânga cu zerouri!

$$15,\underbrace{72}_{\text{2 zecimale}} \cdot 2,\underbrace{003}_{\text{3 zecimale}} = 31,\underbrace{48716}_{\text{5 zecimale}}$$

Exemple:

- $3,42 \cdot 1,7 = \ldots$

$$\begin{array}{r} 342\,\cdot \\ 17 \\ \hline 2394 \\ 342 \\ \hline 5814 \end{array}$$

Numărăm zecimalele de la factori: 3,**42** are **2** zecimale, 1,**7** are **o** zecimală, deci punem virgula la 5814 astfel încât fracția zecimală să aibă **3** zecimale: 5,**814**.

Așadar $3,42 \cdot 1,7 = 5,814$.

- $12,54 \cdot 0,82 = \ldots$

$$\begin{array}{r} 1254\,\cdot \\ 82 \\ \hline 2508 \\ 10032 \\ \hline 102828 \end{array}$$

12,**54** are **2** zecimale, 0,**82** are **2** zecimale, deci punem virgula la 102828 astfel încât fracția zecimală să aibă **4** zecimale: 10,**2828**.

Așadar $12,54 \cdot 0,82 = 10,2828$.

- $12,5 \cdot 0,07 = \ldots$

$$\begin{array}{r} 125\,\cdot \\ 7 \\ \hline 875 \end{array}$$

12,**5** are **o** zecimală, 0,**07** are **2** zecimale, deci punem virgula la 875 astfel încât fracția să aibă **3** zecimale: **?,875** și adăugăm un zero în față pentru a avea sens scrierea.

Așadar $12,5 \cdot 0,07 = 0,875$.

- $2,34 \cdot 0,04 = \ldots$

$$\begin{array}{r} 234\,\cdot \\ 4 \\ \hline 936 \end{array}$$

Numărând câte zecimale au împreună cei doi factori obținem 4; dar numărul 936 nu are *suficiente* cifre pentru a putea pune virgula și a obține **4** zecimale, deci vom adăuga zerouri în fața acestuia: **0,0**936.

Așadar $2,34 \cdot 0,04 = 0,0936$.

- $2,72 \cdot 10 = \ldots$ Obținem $272 \cdot 10 = 2720$. 2,72 are **2 zecimale**, deci: $2,72 \cdot 10 = 27,20 = 27,2$.

- $12,5 \cdot 100 = \ldots$ Obținem $125 \cdot 100 = 12500$. 12,5 are **o** zecimală, deci: $12,5 \cdot 100 = 1250,0 = 1250$.

Reținem

Pentru a înmulți o fracție zecimală cu o putere a lui 10 mutăm virgula spre dreapta peste atâtea cifre cât arată exponentul lui 10. Dacă nu sunt suficiente cifre la partea zecimală, se adaugă zerouri.

✓ 23,417·10 = 234,17; ✓ 23,417·100 = 2341,7; ✓ 23,417·1000 = 23417; ✓ 23,417·10000 = 234170.

Probleme propuse

●

1. Calculați:
a) 17,52 · 10; b) 0,8 · 10; c) 3,45 · 100;
d) 0,007 · 100; e) 247,3 · 1000; f) 0,001 · 10^3.

2. Calculați:
a) 2,75 · 4; b) 12,4 · 5; c) 0,15 · 12;
d) 5,05 · 16; e) 24 · 1,25; f) 245 · 0,01.

3. Mihai cumpără 10 covrigi și 10 cornuri pentru colegii lui de clasă. Ce sumă a plătit Mihai, dacă un covrig costă 1,75 lei, iar un corn 2,15 lei? Calculați suma plătită prin două metode.

4. Folosind grupări convenabile, calculați cât mai rapid:
a) 2 · 13,2 · 5; b) 5 · 17,29 · 20;
c) 6,4 · 4 · 3,5 · 2,5; d) 5 · 21,7 · 0,2;
e) 0,25 · 12,5 · 4 · 1,6; f) 1,4 · 0,1 · 100.

5. Determinați numărul egal cu:
a) dublul lui 12,75;
b) triplul numărului 0,75;
c) numărul de 2,4 ori mai mare decât 8;
d) produsul dintre 120 și 12,5.

6. Scrieți ca produsul dintre o fracție zecimală și 10, respectiv 100, fiecare dintre numerele:
a) 637; b) 57; c) 124,5.

7. Efectuați următoarele calcule și rotunjiți rezultatul la întreg:
a) 12,75 · 6; b) 25,14 · 5,5; c) 105,5 · 2,4.

●●

8. Calculați produsul dintre suma și diferența numerelor 17,25 și 5,25.

9. Calculați suma dintre dublul lui 1,25 și împătritul lui 0,125.

10. Calculați:
a) 3,25 · (12,4 + 7,6);
b) 15 · (14,2 – 7,8);
c) (12,24 + 29,16) · 0,5;
d) (12,14 + 15,06) · (34,008 – 17,458);
e) (53 – 24,5) · (26,72 + 5,18).

11. La un magazin s-au vândut într-o zi 24,6 kg de cartofi, iar a doua zi de 2,5 ori mai multe. Câte kilograme de cartofi s-au vândut în cele două zile la un loc?

12. Manualul de matematică cântărește 0,385 kg. Editura trimite școlii 8 pachete în care sunt ambalate câte 12 manuale. Cât cântărește un pachet? Dar toate pachetele?

●●●

13. Maria pregătește șnururi pentru ecusoanele pe care le vor purta cei 25 de participanți la o activitate. Fiecare șnur are lungimea de 0,85 m, iar prețul unui metru de șnur este 2,25 lei. Îi ajung Mariei 50 lei pentru cumpărarea șnurului necesar?

14. Știind că $a = 21,5$ și $b + c = 12,6$, calculați:
a) $ab + ac$; b) $3a + 4b + 4c$; c) $a - b - c$.

15. Flacăra olimpică a fost purtată, pe rând, de către 25 de atleți: 4 au purtat-o câte 14,5 km, 5 câte 13,75 km și restul câte 1,325 km. Câți kilometri a parcurs flacăra olimpică?

16. Pentru o cantitate de legume cumpărate la piață s-au plătit 15,75 lei. Dacă s-ar fi cumpărat cu un kilogram mai mult, s-ar fi plătit 19,95 lei. Determinați cât s-ar plăti pentru 100 kg de legume.

Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală

Ana și Andrei efectuează, folosind calculatorul de pe telefon, împărțirea lui 25 la 4 și obțin 6,25.

Ana: Mă gândesc că pot scrie împărțirea lui 25 la 4 ca fracție pentru că $25:4 = \frac{25}{1}:\frac{4}{1} = \frac{25}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, iar fracția $\frac{25}{4}$ se poate transforma în fracție zecimală.

Andrei: Trebuie doar să amplificăm fracția cu 25, adică

$$^{25)}\frac{25}{4} = \frac{625}{100} = 6,25.$$

Ana: Asta înseamnă că putem transforma o fracție ordinară $\frac{a}{b}$ în fracție zecimală împărțind *a* la *b*, dar nu împărțirea cu rest pe care am învățat-o la numere naturale.

Reținem

Pentru a împărți două numere naturale nenule procedăm astfel:

✓ împărțim numerele ca la numere naturale și, dacă împărțirea nu este exactă, scriem deîmpărțitul ca o fracție zecimală cu zecimalele 0;

✓ când ajungem la virgula de la deîmpărțit scriem virgulă la cât și continuăm împărțirea (ca la numere naturale) *coborând* zerourile de la partea zecimală a deîmpărțitului.

Exemple:

- $25:4 = 6$
  24
  =1

Împărțirea nu este exactă, deci vom scrie 25,0 în loc de 25, vom pune virgula după câtul 6 și *continuăm coborându-l* pe 0.

$25,0:4 = 6,2$
24
= 10
8
2

Împărțirea *nu s-a terminat*, deci vom mai scrie un 0, obținând 25,00 și continuăm *coborând* și acest 0.

$25,00:4 = 6,25$
24
= 10
8
= 20
20
= =

În concluzie:
$25:4 = 6,25$
sau, altfel spus,
$\frac{25}{4} = 25:4 = 6,25.$

- $73,0:5 = 14,6$
  5
  23
  20
  = 30
  30
  = =

Probă:
$14,6 = \frac{146}{10}^{(2} = \frac{73}{5}$

$\frac{73}{5} = 73:5 = 14,6$

- $337,00:25 = 13,48$
  25
  = 87
  75
  120
  100
  = 200
  200
  = = =

Faceți proba ca la exemplul anterior

$\frac{337}{25} = 337:25 = 13,48$

- $5,000:8 = 0,625$
  0
  50
  48
  = 20
  16
  = 40
  40
  = =

8 se cuprinde în 5 de 0 ori, punem virgula și coborâm 0, continuând ca la celelalte exemple.

$\frac{5}{8} = 5:8 = 0,625$

Ana: Andrei, încerc să calculez 16:3 dar se întâmplă ceva curios: împărțirea nu se termină. Văd că fracția zecimală care se obține are un număr infinit de zecimale...

$\frac{16}{3} = 16:3 = 5,33...$

$$\begin{array}{l} 16,000...:3 = 5,33... \\ \underline{15} \\ =10 \\ \ \ \underline{9} \\ \ \ =10 \\ \ \ \ \ \underline{9} \\ \ \ \ \ =10 \\ \ \ \ \ \ \ .... \\ \ \ \ \ \ \ ...... \end{array}$$

Andrei: Am obținut și eu ceva asemănător când am făcut împărțirea lui 58 la 11. Dar la mine sunt două cifre care se repetă...

$\frac{58}{11} = 58:11 = 5,2727...$

$$\begin{array}{l} 58,0000...:11 = 5,2727... \\ \underline{55} \\ =30 \\ \ \ \underline{22} \\ \ \ =80 \\ \ \ \ \ \underline{77} \\ \ \ \ \ =30 \\ \ \ \ \ \ \ \underline{22} \\ \ \ \ \ \ \ =80 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{77} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ =3... \end{array}$$

Reținem

✓ Orice fracție ordinară $\frac{a}{b}$, a și $b \neq 0$ numere naturale, se transformă în fracție zecimală prin împărțirea numărătorului a la numitorul b.

✓ La împărțirea a două numere naturale putem obține:
- un număr natural sau o *fracție zecimală finită* – o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule;
- o *fracție zecimală periodică* – o fracție zecimală în care o cifră sau un grup de cifre de la partea zecimală se repetă la nesfârșit.

✓ La o fracție zecimală periodică, cifra sau grupul de cifre care se repetă se numește *perioadă* și se scrie între paranteze rotunde.

O fracție zecimală periodică poate fi:
- *fracție zecimală periodică simplă* – perioada începe imediat după virgulă;
- *fracție zecimală periodică mixtă* – între perioadă și virgulă mai sunt și alte cifre care formează *neperioada*.

Exemple de fracții zecimale periodice:

- 16:3 = 5,3333... = 5,(3)
  se citește
  cinci virgulă perioadă trei
  5,(3)
  5 → partea întreagă; 3 → perioada

- 58:11 = 5,2727... = 5,(27)
  se citește
  cinci virgulă perioadă doi șapte
  5,(27)
  5 → partea întreagă; 27 → perioada

- 25:6 = 4,1666... = 4,1(6)
  se citește
  patru virgulă unu perioadă șase
  4,1(6)
  4 → partea întreagă; 6 → perioada; 1 → neperioada

Probleme rezolvate

- Precizați care este partea întreagă, din ce este formată partea zecimală și care sunt a 7-a și a 100-a zecimală: a) 8,(37); b) 321,4(127).

Rezolvare. a) 8,(37):

✓ are partea întreagă 8, partea zecimală este formată din perioada 37;

✓ scriem 8,(37) = 8,37373737..., așadar a 7-a zecimală este 3;

✓ observăm la partea zecimală că pe pozițiile impare este cifra 3, iar pe pozițiile pare este cifra 7; cum 100 este par, obținem că a 100-a zecimală este 7.

b) 321,4(127):

✓ partea întreagă este 321, partea zecimală este formată din neperioada 4 și perioada 127;

Activitate în echipe

Faceți echipe de câte 5 elevi și realizați împărțirile:

a) 1254 : 10; *b) 1254 : 100;*
c) 5214 : 1000; *d) 5 : 10;*
e) 37 : 100.

Discutați în cadrul echipei, dar și cu celelalte echipe și formulați o concluzie referitoare la rezultatul împărțirii unui număr natural la o putere a lui 10.

✓ 321,4(127) = 321,4127127127..., deci a 7-a zecimală este 7;

✓ partea zecimală a numărului conține cifra 4 (neperioada) urmată de tripletul de cifre 127 care se repetă; pentru că vrem să aflăm a 100-a cifră, dăm deoparte o cifră dintre acestea (pe cea care corespunde neperioadei) și împărțim 99 la 3 pentru a afla câte grupe de trei cifre se cuprind în 99; constatăm că sunt exact 33 de grupe, deci a 100-a cifră este ultima din grupa 127, adică 7.

- Se consideră fracția zecimală 15,7(21). Calculați suma primelor 20 de zecimale.

Rezolvare. Primele 20 de zecimale sunt: 7 (neperioada), 10 cifre de 2 și 9 cifre de 1, așadar 7 + 10·2 + 9·1 = 36.

Probleme propuse

•

1. Calculați:
a) 15:4; b) 37:5; c) 219:8;
d) 973:20; e) 169:16; f) 1002:125.

2. Calculați:
a) 29:3; b) 75:11; c) 839:33;
d) 1245:99; e) 214:7; f) 297:13.

3. Calculați:
a) 217:6; b) 8:15; c) 517:30;
d) 128:55; e) 237:22; f) 1247:14.

Reținem

✓ Dacă numitorul unei fracții ireductibile are singurii divizori primi pe 2 sau/și 5, atunci fracția se transformă într-o fracție zecimală finită.

✓ Dacă numitorul unei fracții ireductibile are numai divizori primi diferiți de 2 și de 5, atunci fracția se transformă într-o fracție zecimală periodică simplă.

✓ Dacă numitorul unei fracții ireductibile are divizori primi diferiți de 2 și de 5, dar și pe cel puțin unul dintre numerele 2 și 5, atunci fracția se transformă într-o fracție zecimală periodică mixtă.

••

Activitate în echipe

Observați tipurile de fracții zecimale obținute la primele 3 exerciții. Transformați în fracții ordinare împărțirile de la aceste exerciții, observați numitorii lor și completați tabelul:

Divizorii primi ai numitorilor fracțiilor de la...		
...exercițiul 1	...exercițiul 2	...exercițiul 3

4. Transformați în fracții zecimale finite:
a) $\frac{2157}{100}$; b) $\frac{117}{4}$; c) $3\frac{13}{25}$;
d) $37\frac{19}{20}$; e) $\frac{321}{30}$; f) $\frac{3587}{500}$.

5. Transformați în fracții zecimale periodice:
a) $\frac{7}{12}$; b) $\frac{214}{35}$; c) $13\frac{7}{11}$;
d) $\frac{1007}{45}$; e) $\frac{512}{22}$; f) $\frac{214}{35}$.

6. Rotunjiți la sutimi rezultatul împărțirilor:
a) 58:13; b) 128:7; c) 522:31;
d) 9:17; e) 59:55; f) 216:65.

Indicație. Pentru a rotunji la sutimi este necesar să faceți împărțirile până la a 3-a zecimală!

7. Comparații fracțiile zecimale:
a) 15,7 cu 14,(4); b) 23,(7) cu 23,8;
c) 54,(35) cu 54,(36); d) 121,752 cu 121,(75);
e) 68,3(4) cu 68,(34); f) 0,12(3) cu 0,1(23).

8. Considerăm fracțiile zecimale periodice

$$a = 12,(25) \text{ și } b = 12,2(5).$$

a) Comparați cele două fracții.

b) Determinați care este a 15-a zecimală pentru fiecare dintre cele două fracții.

c) Calculați diferența dintre suma primelor 15 zecimale ale lui b și suma primelor 15 zecimale ale lui a.

Curiozități

Observați cifrele din perioadă, sunt aceleași, mai puțin ordinea lor!

- 50 : 7 = 7,(142857)
- 51 : 7 = 7,(285714)
- 52 : 7 = 7,(428571)
- 53 : 7 = 7,(571428)
- 54 : 7 = 7,(714285)
- 55 : 7 = 7,(857142)

Media aritmetică a două sau mai multor numere naturale

Ana și Andrei au căutat în dicționar ce înseamnă cuvântul *medie*.

Ana: Eu am găsit că, folosit ca substantiv (feminin), *medie (medii)* înseamnă *valoarea mijlocie a mai multor mărimi* sau *cantitate care este la mijlocul altora.*

Andrei: Eu am găsit *mediu, -ie, medii* folosit ca adjectiv: *care se află în mijloc; de mijloc, mijlociu.*

Ana: Apropo de media aceea de 9 pe care am avut-o în semestrul I. Am avut un 8 și un 10, iar media 9 este un număr situat la mijloc între 8 și 10.

Reținem

Media aritmetică a două sau mai multor numere naturale este egală cu suma numerelor împărțită la numărul lor. De obicei, media aritmetică se notează m_a.

$$m_a = \frac{\text{suma numerelor}}{\text{numărul lor}}$$ – media aritmetică a mai multor numere

$m_a = \frac{a+b}{2}$	$m_a = \frac{a+b+c}{3}$	$m_a = \frac{a+b+c+d}{4}$
media aritmetică a două numere a și b	media aritmetică a trei numere a, b și c	media aritmetică a patru numere a, b, c și d

Exemple: ● Media aritmetică a numerelor 8 și 10 este $m_a = \frac{8+10}{2} = (8+10) : 2 = 9$.

● Media aritmetică a numerelor 7, 13 și 16 este $m_a = \frac{7+13+16}{3} = 12$.

● Dacă Mihai are notele 8, 9, 10 și 10, atunci media aritmetică a acestor numere este $m_a = \frac{8+9+10+10}{4} = 9,25$, dar media care i se trece în catalog este 9 (se rotunjește rezultatul).

Probleme rezolvate

● Media aritmetică a două numere este 14, iar unul dintre numere este 8. Determinați celălalt număr.

Rezolvare. Notăm cu a numărul necunoscut și obținem $(a + 8) : 2 = 14$. Folosind metoda mersului invers, aflăm că $a = 20$.

● Determinați două numere pare consecutive, știind că media lor aritmetică este egală cu 15.

Rezolvare. Dacă cele două numere au media aritmetică 15, atunci suma lor este 30. Folosind metoda figurativă, aflăm că cele două numere sunt 14 și 16.

Probleme propuse

●

1. Calculați media aritmetică a numerelor:
a) 12 și 18; b) 8, 10 și 12; c) 9 și 18;
d) 12, 21 și 34; e) 8, 8, 9 și 10; f) 7, 8, 9, 10 și 11.

2. Media aritmetică a trei numere este 21,2. Determinați suma celor trei numere.

3. Media aritmetică a două numere este 25, iar unul dintre numere este 30. Determinați celălalt număr.

4. Media aritmetică a trei numere este 14, iar două dintre numere sunt 9 și 20. Determinați al treilea număr.

5. Media aritmetică a două numere este 8,5, iar unul dintre numere este cu 3 mai mare decât celălalt. Determinați cele două numere.

●●

6. Media aritmetică a două numere impare consecutive este 16. Determinați cele două numere.

7. Media aritmetică a numerelor 8, 12 și n este 11. Determinați valoarea numărului n.

8. Media aritmetică a numerelor a, b și c este 19, iar media aritmetică a numerelor a și b este 21. Determinați valoarea numărului c.

9. În fiecare dimineață, înainte de a pleca la școală, Mihai își notează temperatura pe care o arată termometrul montat pe geamul exterior al camerei. Care este temperatura medie în cele cinci zile?

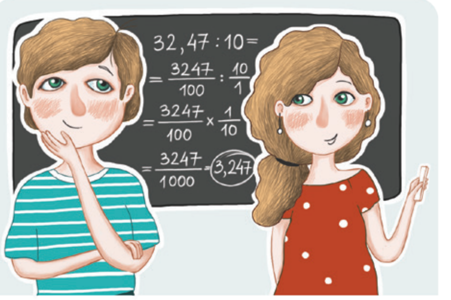
Ziua	luni	marți	miercuri	joi	vineri
Temperatura °C	4	6	7	7	9

Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul

Andrei: Când înmulțim o fracție zecimală cu 10, mutăm virgula spre dreapta cu o poziție. La înmulțirea cu 100 o mutăm cu două poziții; de exemplu, $32,47 \cdot 10 = 324,7$. Oare la împărțire mutăm virgula spre stânga? Dacă împart 32,47 la 10 voi obține 3,247? Ana, tu ce crezi?

Ana: Putem verifica folosind fracțiile ordinare:

$32,47:10 = \frac{3247}{100} : \frac{10}{1} = \frac{3247}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3247}{1000} = 3,247$. E adevărat ce ai spus!



Reținem

✓ Pentru a împărți o fracție zecimală cu o putere a lui 10, mutăm virgula spre stânga peste atâtea cifre cât arată exponentul lui 10. Dacă nu sunt suficiente cifre la partea întreagă, se adaugă zerouri în față.

Exemple:

- 57,2 : 10 = 5,72 — *o poziție mai la stânga*
- 532,14 : 100 = 5,3214 — *două poziții mai la stânga*
- 73,24 : 1000 = **0,0**7324 — *trei poziții mai la stânga, am adăugat doi de 0*
- 175 : 100 = 1,75 — *175 = 175,0 și am mutat virgula cu 2 poziții la stânga*

Reținem

Pentru a împărți o fracție zecimală finită la un număr natural nenul procedăm astfel:

✓ împărțim partea întreagă a fracției zecimale la numărul dat și scriem virgula la cât;

✓ continuăm împărțirea (ca la numere naturale) coborând, pe rând, cifrele de la partea zecimală a deîmpărțitului; dacă este nevoie, completăm cu zerouri partea zecimală.

Exemple:

<table>
<tr>
<td>73,6 : 4 = 18,
4
33
32
= 1
Am împărțit partea întreagă (73) la 4 și am pus virgula la cât.</td>
<td>73,6 : 4 = 18,4
4
33
32
= 16
16
= =
Am continuat împărțirea prin coborârea lui 6.</td>
<td>215,4 : 8 = 26,
16
= 55
48
= 7
Am împărțit partea întreagă la 8, am pus virgula și continui împărțirea coborând următoarele cifre.</td>
<td>215,400 : 8 = 26,925
16
= 55
48
= 74
72
= 20
16
= 40
40
= =
Am completat cu 0 până am finalizat.</td>
<td>57,5:3 = 19,166…
3
27
27
= =5
3
20
18
= 20
18
= 20
…</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">73,6 : 4 = 18,4</td>
<td colspan="2">215,4 : 8 = 26,925</td>
<td>57,5 : 3 = 19,1(6)</td>
</tr>
</table>

Faceți proba pentru primele două împărțiri din exemplul anterior.

Reținem

✓ La împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale la un număr natural nenul putem obține o fracție zecimală finită sau o fracție zecimală periodică.

Probleme rezolvate

● Andrei vrea să cumpere creioane. Găsește la prețul de 1,50 lei bucata, putând să beneficieze și de oferta alăturată. Cum alege creioanele mai ieftine?

Rezolvare. Calculăm prețul unui creion pentru fiecare dintre cele două oferte. La prima ofertă 5,20:4 = 1,30 lei, iar la a doua ofertă 12,50:10 = = 1,25 lei. Așadar, oferta cea mai bună este să cumpere 10 creioane cu 1,25 lei bucata.

● Suma a două fracții zecimale este 48,8, iar una dintre ele este de 3 ori mai mare decât cealaltă. Determinați cele două fracții.

Rezolvare. Aplicăm metoda figurativă. Sunt 4 segmente egale cu suma 48,8, deci 48,8:4 = 12,2 este una dintre fracții și 12,2·3 = 36,6 este a doua.

Probleme propuse

●

1. Efectuați:
a) 652,8 : 100; b) 17,2 : 100; c) 231,8 : 10;
d) 517 : 100; e) 1,55 : 10; f) 21,5 : 1000.

2. Efectuați:
a) 45,6 : 12; b) 3,75 : 25; c) 3,5 : 14;
d) 14,4 : 12; e) 147,6 : 18; f) 785,25 : 15.

3. Determinați:
a) numărul care este de 4 ori mai mic decât 32,7;
b) numărul care este de 5 ori mai mic decât 373,4;
c) numărul care este de 6 ori mai mic decât triplul lui 21,8;
d) de câte ori este mai mare 4152,72 decât 12.

4. Rotunjiți la sutimi rezultatul împărțirilor:
a) 57,4 : 6; b) 423,8 : 22; c) 100,25 : 35;
d) 21,45 : 33; e) 8,6 : 55; f) 123,321 : 13

5. Un bax cu 6 sticle de apă costă 19,50 lei. Cât costă o sticlă de apă?

●●

6. O cutie cu markere pentru scris pe tabla magnetică conține 25 de bucăți și costă 91,25 lei. Care este prețul pentru 7 dintre acestea?

7. Cât costă un kilogram de cartofi, dacă pentru un sac de 45 kg s-au plătit 78,75 lei?

8. Un automobilist a parcurs în trei zile un drum cu lungimea de 892,5 km. În fiecare zi a parcurs o distanță dublă față de ziua precedentă. Determinați distanțele parcurse în fiecare dintre cele trei zile.

9. Suma a două fracții zecimale este 118,5, iar una dintre ele este de patru ori mai mică decât cealaltă. Determinați cele două fracții zecimale.

10. Mă gândesc la un număr, îl înmulțesc cu 4, adun apoi rezultatul înmulțirii cu 18,4 și obțin 48,6. Care este numărul la care m-am gândit?

Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Ana și Andrei au cumpărat o pungă de mere de 1,5 kg și au plătit pe ea 5,25 lei. Acum vor să afle care este prețul unui kilogram de mere, dar nu știu cum să împartă 5,25 la 1,5.

Ana: Dacă aș fi cumpărat 10 pungi aș fi plătit 5,25 · 10 = = 52,5 lei pentru 1,5 · 10 = 15 kg de mere. Pot afla acum cât costă un kilogram de mere împărțind 52,5 la 15. Obțin 3,5 lei.

Andrei: Verific împărțirea ta folosind transformarea în fracții ordinare a celor două fracții zecimale:

$$5,25:1,5 = \frac{525}{100}:\frac{15}{10} = \frac{{}^{35}\cancel{525}}{{}_{10}\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{15}_{1}} = \frac{35}{10} = 3,5.$$

Reținem

Pentru a împărți două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule procedăm astfel:

✓ înmulțim și deîmpărțitul și împărțitorul cu acea putere a lui 10 pentru care împărțitorul devine număr natural;

✓ împărțim noul deîmpărțit la noul împărțitor conform regulilor de împărțire învățate.

Exemple:

- 17,35:0,5 = 173,5:5 = 34,7;
  împărțitorul 0,5 are o singură zecimală și se transformă în număr natural prin înmulțirea cu 10, deci am înmulțit ambele numere cu 10:
  $$\begin{cases} 17,35 \cdot 10 = 173,5 \\ 0,5 \cdot 10 = 5 \end{cases}$$

- 3,75:0,25 = 375:25 = 15;
  0,25 se transformă în număr natural prin înmulțirea cu 100, deci am înmulțit ambele numere cu 100:
  $$\begin{cases} 3,75 \cdot 100 = 375 \\ 0,25 \cdot 100 = 25 \end{cases}$$

- 2,17:0,007 = 2170:7 = 310;
  am înmulțit ambele numere cu 1000 pentru a obține împărțitorul 7:
  $$\begin{cases} 2,17 \cdot 1000 = 2170 \\ 0,007 \cdot 1000 = 7 \end{cases}$$

Am folosit regula împărțirii unei fracții zecimale finite la un număr natural.

Am folosit regula împărțirii a două numere naturale.

- 2,415:1,15 = 241,5:115 = 2,1; (· 100 / · 100)
- 51,74:1,2 = 517,4:12 = 43,11(6); (· 10 / · 10)
- 24:0,11 = 2400:11 = 218,(18). (· 100 / · 100)

Reținem

✓ La împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule putem obține un număr natural, o fracție zecimală finită sau o fracție zecimală periodică.

Probleme propuse

•

1. Copiați pe caiete tabelul următor și apoi completați-l.

a	b	$c = a:b$	$a:c$	$b \cdot c$
5,6	0,2			
12,1	1,1			
30,672	2,16			
25,56	0,3			
19,6	0,014			
239,4	0,35			
168,48	5,2			

2. Calculați:

a) 12,5:1,25; b) 1,25:12,5; c) 47:4,7;
d) 4,7:47; e) 0,47:47; f) 47:0,47.

3. Calculați:

a) 12,5:0,5 + 75; b) 32,24:2,6 – 2,4;
c) $2{,}1 \cdot 4{,}5:1{,}4$; d) 49,5:0,33:100;
e) $57{,}12:1{,}2 \cdot 2:0{,}1$; f) 0,0017:0,1:0,01:0,001.

4. Câți covrigi cu prețul de 1,5 lei se pot cumpăra cu 21 lei?

5. Cât costă 5 kg de pere, dacă pentru 3,25 kg de pere Mihai a plătit 13,65 lei?

••

6. Deîmpărțitul și câtul unei împărțiri sunt 105,24 și, respectiv, 0,008. Cât este împărțitorul?

7. Efectuați următoarele împărțiri cu 2 zecimale exacte:

a) 0,24:2,5; b) 3,1:3,5; c) 0,2:0,015; d) 1,73:1,8.

8. Ana și-a ajutat mama pentru a prepara dulceața de căpșuni, iar acum trebuie pusă în borcane de 0,42 kg. Câte borcane vor obține Ana și mama ei, știind că au preparat 6,840 kg de dulceață?

9. Mihai își ajută tatăl care pregătește materialele pentru a suda un gard. Ei au nevoie de bucăți de țeavă cu lungimea de 0,9 m și au cumpărat două țevi cu lungimea de 5 m fiecare. Mihai afirmă: *Din cele două țevi cumpărate putem să tăiem cele 11 bucăți de care avem nevoie.* Afirmația lui Mihai este adevărată sau falsă? Justificați răspunsul.

Activitate în echipe

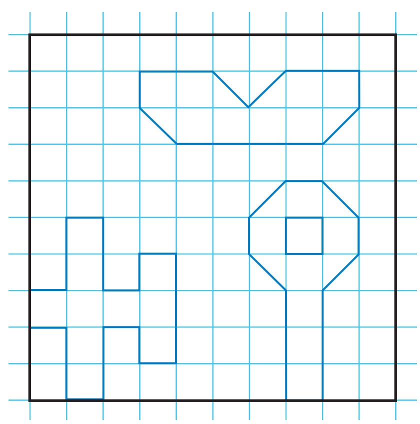
Formați echipe de câte 4 elevi și realizați împărțirile:
a) 12,57 : 0,1; b) 3,218 : 0,01;
c) 75 : 0,01; d) 0,008 : 0,001.
Verificați încrucișat dacă toate rezultatele obținute sunt corecte. Discutați cu colegii din celelalte echipe despre ce ați observat și formulați o concluzie referitoare la împărțirea unei fracții zecimale la 0,1, la 0,01 sau la 0,001.

Să ne jucăm

Colorați interioarele imaginilor (la cea din dreapta jos, pătratul din interior să nu fie colorat).

Precizați, pentru fiecare dintre suprafețele colorate, ce procent din suprafața pătratului reprezintă.

Folosind liniatura caietului, desenați pătrate cu latura de 10 pătrățele și colorați suprafețe din acestea care să corespundă procentelor: 24%, 40%, 65%. Realizați o expoziție la panoul clasei cu imaginile obținute.



Număr rațional. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

Reținem

Orice fracție zecimală periodică se transformă într-o fracție ordinară.
Pentru a transforma o fracție zecimală periodică simplă în fracție ordinară procedăm astfel:

✓ scriem la numărător numărul obținut prin eliminarea virgulei și a semnelor de paranteză și scădem din acesta partea întreagă;

✓ scriem la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

$2,(35)$: 235 – după eliminarea virgulei și a semnelor de paranteză; 2 – partea întreagă $\rightarrow \dfrac{235-2}{99}$

2 cifre în perioadă, 2 cifre de 9 la numitor

Exemple:

- $2,(35) = \dfrac{235-2}{99} = \dfrac{233}{99}$;
- $41,(6) = \dfrac{416-41}{9} = \dfrac{375^{(3}}{9} = \dfrac{125}{3}$;
- $0,(387) = \dfrac{387^{(9}}{999} = \dfrac{43}{111}$.

Pentru a transforma o fracție zecimală periodică mixtă în fracție ordinară procedăm astfel:

✓ scriem la numărător numărul obținut prin eliminarea virgulei și a semnelor de paranteză și scădem din acesta numărul format din ce este în fața perioadei (eliminând virgula);

✓ scriem la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada, urmat de atâtea cifre de 0 câte are neperioada.

$2,4(35)$: 2435 – după eliminarea virgulei și a semnelor de paranteză; 24 – numărul format cu ce este în afara perioadei $\rightarrow \dfrac{2435-24}{990}$

2 cifre în perioadă, 2 cifre de 9 la numitor

o cifră la neperioadă, o cifră de 0 după 9

Exemple:

- $2,4(35) = \dfrac{2435-24}{990} = \dfrac{2411}{990}$;
- $15,2(7) = \dfrac{1527-152}{90} = \dfrac{1375^{(5}}{90} = \dfrac{275}{18}$;
- $0,31(6) = \dfrac{316-31}{900} = \dfrac{285^{(15}}{900} = \dfrac{19}{60}$;
- $0,0(7) = \dfrac{7}{90}$;
- $0,00(5) = \dfrac{5}{900}$.

Andrei: Ana, am observat de când lucrăm cu fracții că, de exemplu, pentru fracția $\frac{1}{2}$ putem avea și scrierea $\frac{2}{4}$ sau $\frac{3}{6}$ și 0,5 și chiar 50%. Și asta se întâmplă pentru foarte multe numere.

Ana: Eu zic că se întâmplă pentru toate numerele, adică pentru toate tipurile de numere pe care le-am învățat până acum. Tocmai am învățat cum se transformă fracțiile zecimale periodice în fracții ordinare, deci acum putem spune că toate tipurile de fracții zecimale se pot transforma în fracții ordinare și invers.

Andrei: Chiar și numerele naturale se pot scrie ca fracții ordinare, de exemplu $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} \ldots$, sau sub formă de fracții zecimale, de exemplu 4,0 sau 4,00.

Reținem

✓ Orice număr care poate fi scris sub formă de fracție ordinară se numește număr rațional.

✓ Orice număr natural este un număr rațional.

✓ Numerele raționale pot fi reprezentate fie sub formă de fracții ordinare, fie sub formă de fracții zecimale.

✓ În efectuarea calculelor cu numere raționale se păstrează ordinea efectuării operațiilor cunoscută de la numerele naturale.

Numerele raționale sunt numerele care se pot scrie sub forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale, $b \neq 0$.

Probleme rezolvate

- $12{,}75 - 5{,}25 + 7{,}4 = 7{,}5 + 7{,}4 = 14{,}9;$
- $1\frac{7}{12} + 2{,}5 - 3{,}(3) = \frac{19}{12} + \frac{25}{10}^{(5} - \frac{33-3}{9} = \frac{19}{12} + {}^{6)}\frac{5}{2} - \frac{30}{9}^{(3} =$
  $= \frac{19}{12} + \frac{30}{12} - {}^{4)}\frac{10}{3} = \frac{49}{12} - \frac{40}{12} = \frac{9}{12}^{(3} = \frac{3}{4};$
- $2{,}5 \cdot \frac{5}{4} : \frac{9}{6} = 2{,}5 \cdot 1{,}25 : 1{,}5 = 3{,}125 : 1{,}5 = 2{,}08(3);$

Sunt operații de același ordin, le-am efectuat în ordinea scrierii lor, de la stânga la dreapta. Pentru că erau forme diferite de scriere, și fracții zecimale și fracții ordinare, le-am transformat în fracții ordinare – la al doilea exemplu, respectiv în fracții zecimale – la al treilea exemplu.

- $0{,}24 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}28 : 0{,}7 = 0{,}24 \cdot 0{,}5 + 2{,}8 : 7 = 0{,}12 + 0{,}4 = 0{,}52;$
- $2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 4 = 6{,}25 + 10 = 16{,}25;$
- $0{,}25 \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{25}{100}^{(25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{8}{12}^{(4} = \frac{2}{3};$

Sunt operații de mai multe ordine, deci efectuăm mai întâi calculele cu puteri, apoi înmulțirile și împărțirile și, la final, adunările și scăderile.

- $2{,}1 \cdot [3{,}4 - 2 \cdot (0{,}05 + 0{,}15)] - 2^2 = 2{,}1 \cdot (3{,}4 - 2 \cdot 0{,}2) - 4 =$
  $= 2{,}1 \cdot (3{,}4 - 0{,}4) - 4 = 2{,}1 \cdot 3 - 4 = 6{,}3 - 4 = 2{,}3;$
- $\left\{\left[2{,}25 - \left(\frac{2^2}{5} - \frac{2}{5^2}\right)\right] : 10{,}2 + 2\frac{1}{5}\right\} \cdot 2 - 1{,}5 =$
  $= \left\{\left[\frac{225}{100} - \left({}^{5)}\frac{4}{5} - \frac{2}{25}\right)\right] : \frac{102}{10} + \frac{11}{5}\right\} \cdot 2 - \frac{15}{10} =$
  $= \left[\left(\frac{225}{100} - {}^{4)}\frac{18}{25}\right) \cdot \frac{10}{102}^{(2} + \frac{11}{5}\right] \cdot 2 - \frac{15}{10} =$
  $= \left(\frac{{}^{3}\cancel{153}}{{}_{20}\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{51}_{1}} + \frac{11}{5}\right) \cdot 2 - \frac{15}{10} = \left(\frac{3}{20} + {}^{4)}\frac{11}{5}\right) \cdot 2 - \frac{15}{10} =$
  $= \frac{47}{{}_{10}\cancel{20}} \cdot \cancel{2}^{1} - \frac{15}{10} = \frac{47}{10} - \frac{15}{10} = \frac{32}{10}^{(2} = \frac{16}{10} = 1{,}6.$

Într-un exercițiu cu paranteze, se efectuează prima dată calculele din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele pătrate și, la urmă, cele din acolade. În fiecare paranteză se respectă ordinea operațiilor.

Atenție! Nu se pot efectua operații cu fracții zecimale periodice, de aceea, într-un calcul cu astfel de numere se face transformarea în fracții ordinare.

Probleme propuse

•

1. Scrieți următoarele fracții zecimale periodice sub formă de fracții ordinare. Unde este posibil, simplificați până la forma ireductibilă:

a) 0,(3); b) 0,(14); c) 2,(5); d) 15,(12); e) 21,(36); f) 0,2(32); g) 0,54(2); h) 0,0(4).

2. Comparați:

a) $\frac{23}{9}$ cu 2,(7); b) 3,(36) cu $\frac{33}{10}$;

c) $\frac{73}{7}$ cu 10,51; d) 12,(8) cu $12\frac{5}{6}$;

e) 0,(24) cu $\frac{3}{11}$; f) 17,2(34) cu 17,23(4).

Indicație. Transformați astfel încât cele două numere raționale să fie ori amândouă fracții zecimale, ori amândouă fracții ordinare.

3. Pentru fiecare dintre afirmațiile de mai jos precizați dacă sunt adevărate sau false.

a) Orice fracție zecimală este număr rațional.

b) Orice număr natural este număr rațional.

c) Există numere raționale care sunt numere naturale.

d) Toate numerele raționale se pot scrie ca fracții zecimale.

e) Toate fracțiile zecimale periodice sunt numere raționale.

4. Calculați:

a) $0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}04$; b) $0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1$;

c) $2{,}6 \cdot 3 - 7{,}1$; d) $15{,}3 - 3{,}1 \cdot 4{,}2$;

e) $0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 : 0{,}4$; f) $0{,}1 : 0{,}2 + 0{,}3 : 0{,}4$.

5. Calculați:

a) $(37{,}2 - 35{,}7)^2 - 2$; b) $1{,}2 \cdot (2{,}5 \cdot 4 - 9{,}5) + 1$;

c) $32{,}4 : (15{,}55 - 13{,}75)$; d) $(25{,}6 - 17{,}54) : 6{,}5$.

6. Dan a cumpărat 6 cornuri pentru care a plătit 10 lei, primind rest 1 leu. I-ar fi ajuns banii pentru cumpărarea a 7 cornuri? Justificați răspunsul.

7. Calculați:

a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2}$; b) $1\frac{1}{12} + 2\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$;

c) $3\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{4} - \frac{17}{5}$; d) $4\frac{1}{5} : 1\frac{5}{9} - \left(1\frac{2}{5}\right)^2$;

e) $\frac{19}{50} \cdot 4\frac{1}{6} - \frac{15}{18}$; f) $3 \cdot 1\frac{5}{18} - 2 \cdot 1\frac{5}{18}$.

••

8. Scrieți câte un exemplu de:

a) număr natural cuprins între numerele raționale 12,(5) și $\frac{63}{4}$;

b) număr rațional cuprins între numerele naturale 8 și 14;

c) număr rațional care nu este natural, mai mare decât 45,(8);

d) număr rațional cuprins între $\frac{15}{13}$ și $\frac{15}{12}$;

e) număr rațional cuprins între 7,4(7) și 7,47.

9. Calculați:

a) $\left(\frac{3}{5} + 1\frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{17}{73}$; b) $\frac{8}{21} \cdot \left(4\frac{5}{8} - 2\frac{7}{12}\right)$;

c) $\left(1\frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) : 3\frac{1}{12}$; d) $3\frac{2}{6} \cdot \left(2\frac{7}{10} - 1\frac{3}{4}\right) : 1\frac{7}{12}$;

e) $\frac{23}{28} : \left(\frac{11}{6} - \frac{5}{9}\right) : 1\frac{2}{7}$; f) $\left(\frac{15}{21} \cdot \frac{49}{30} + 2\right) : 6\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

10. Calculați:

a) $30 \cdot \left[0{,}3 + 0{,}(3) \cdot \frac{1}{2}\right]$;

b) $[0{,}2(3) + 0{,}5(6) \cdot 0{,}7] \cdot 11{,}(1)$;

c) $\left[\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}1(6)\right] : \frac{5}{12}$;

d) $\left(1 + \frac{2}{5} \cdot 1{,}5\right) \cdot 0{,}8(3)$;

e) $\left[\frac{1}{5} \cdot 1{,}(3) + 0{,}7 \cdot \frac{1}{2}\right] : 1{,}2(3)$;

f) $\left\{\left[\frac{1}{5} \cdot 5{,}(5) - 0{,}(5)\right] : 5{,}0(5)\right\} \cdot 91$.

•••

11. Pentru fiecare dintre afirmațiile de mai jos precizați dacă sunt adevărate sau false. Dați un exemplu care să vă susțină alegerea.

a) Există numere raționale care adunate dau număr natural.

b) Diferența oricăror două numere raționale este un număr natural.

c) Suma dintre un număr natural și un număr rațional care nu este natural este un număr rațional nenatural.

d) Există cazuri în care diferența dintre un număr rațional și un număr natural este un număr natural.

12. Considerăm numerele

$x = [1{,}2(6) + 3{,}(6) - 3{,}5] : 0{,}4(3)$ și

$y = [17 - 16{,}1(13)] \cdot 495$.

a) Arătați că $x = \frac{43}{13}$.

b) Calculați $13x + \frac{2y}{439}$.

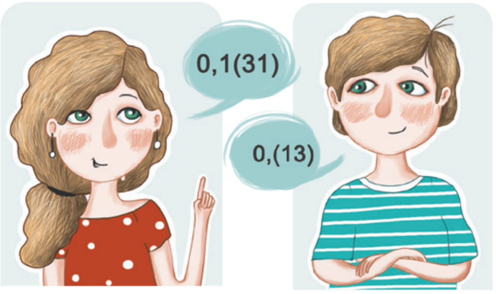
13. Două numere raționale au suma 120, iar unul este cu 7,6 mai mare decât triplul celuilalt. Calculați diferența celor două numere

14. Un producător a vândut mere în trei zile consecutive astfel: în prima zi a vândut 64,25 kg, a doua zi cu 16,5 kg mai mult decât în prima zi, iar a treia zi a vândut dublul cantităților vândute în primele două zile la un loc.

a) Ce sumă de bani a încasat producătorul, dacă prețul unui kilogram de mere este 2,25 lei?

b) Știind că merele sunt puse în cutii, greutatea unei cutii pline este 15 kg, iar cutia goală cântărește 0,5 kg, determinați câte cutii s-au golit în cele 3 zile.

15. Ana și Andrei au transformat fracția ordinară $\frac{13}{99}$ în fracție zecimală. Ana spune că rezultatul este 0,1(31), iar Andrei spune că este 0,(13). Transformați rezultatele celor doi în fracții ordinare și aflați care dintre ei are dreptate!



Investigație

După cum am învățat, $0,(17) = \frac{17}{99}$. V-ați pus întrebarea de ce spune regula că trebuie să punem 99 la numitor?

Urmăriți următorul raționament:

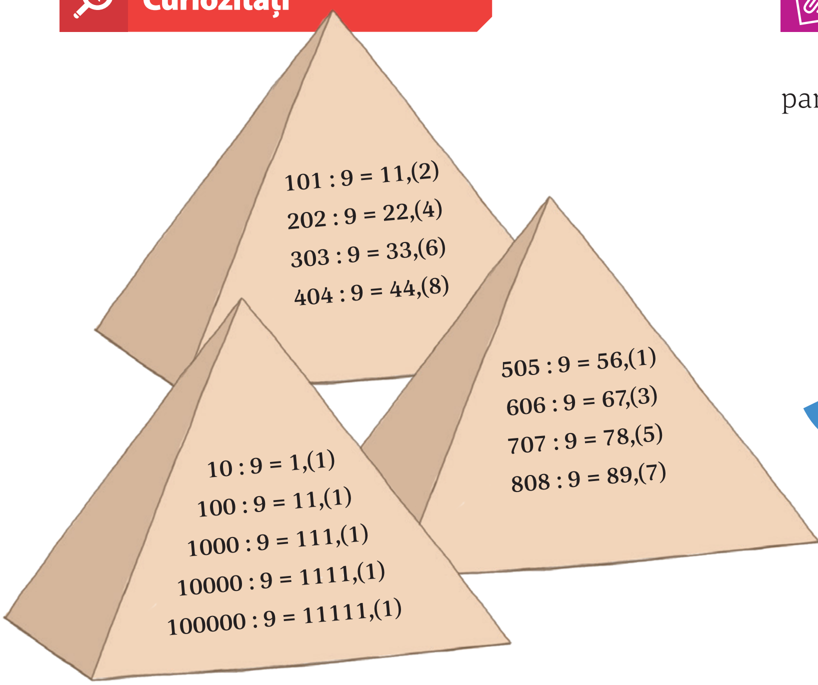
✓ Consider numărul $a = 0,(17)$, care se poate scrie și $a = 0,171717...$

✓ Înmulțesc numărul cu 100, deci voi muta virgula spre dreapta cu 2 poziții: $100 \cdot a = 17,171717$, care se poate scrie $100a = 17,(17)$.

✓ *Desprind* partea întreagă, adică scriu $100a = 17 + 0,(17)$ și, pentru că $0,(17)$ este chiar numărul a, pot scrie egalitatea $100a = 17 + a$.

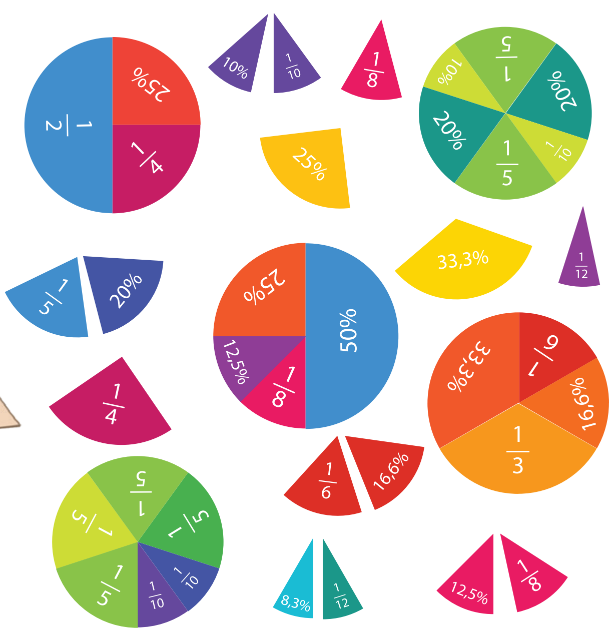
✓ Dacă $100a = 17 + a$, atunci $99a = 17$, deci $a = 17 : 99 = \frac{17}{99}$. Cum $a = 0,(17)$, obțin $0,(17) = \frac{17}{99}$.

Curiozități



Să ne jucăm

Identificați bucățile care reprezintă aceeași parte din întreg.



Probleme recapitulative

●

1. Completați astfel încât egalitățile să fie adevărate:

a) 7,43 · .... = 743; b) 12,007 · ... = 12007;
c) 0,7 · ... = 70; d) .... · 10 = 5,2;
e) 100 · ... = 12; f) 1000 · ... = 2022.

2. Numărul care este de 100 de ori mai mare decât a zecea parte din numărul 25,48 este egal cu:

a) 2,548; b) 25,48; c) 254,8; d) 2548.

3. Numărul care este de 100 de ori mai mic decât înzecitul numărului 0,123 este egal cu:

a) 12,3; b) 1,23; c) 0,123; d) 0,0123.

4. Calculați:

a) 15,23 + 84,77; b) 28,102 + 102,28;
c) 37,85 – 24,35; d) 1 + 1,2 + 1,23;
e) 125,8 + 0,597 + 0,013; f) 15,23 – 11,22;
g) 45,2 – 42,5; h) 7 – 4,25 + 15,75;
i) 12 – 2,87 + 3.

5. Calculați produsul dintre suma și diferența numerelor 15,7 și 8,3.

6. Calculați câtul dintre suma și diferența numerelor 20,25 și 12,75.

7. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) 24 și 17; b) 13, 29 și 45;
c) 7,8 și 15,4; d) 10, 9,5 și 7,5;
e) 9, 11, 8,4 și 15,6; f) 6, 7, 8, 9 și 10.

8. Calculați:

a) 512:100 + 4,78; b) 315,2:10 + 7,598·10;
c) 125·10:100 – 0,075·100; d) 17,2:8 + 0,85;
e) 183,89:71 – 19,08:12; f) 0,56:0,007:10·100.

●●

9. Media aritmetică a patru numere este 11,22. Știind că trei dintre ele sunt 7,4; 5,2 și 8,13, determinați al patrulea număr.

10. În scrierea $a \cdot 10^n = b$, a este o fracție zecimală, iar n este un număr natural. Determinați a în fiecare dintre cazurile: a) b =127 și n =2; b) b =45,8 și n =1; c) b =12 și n =3.

11. Determinați numărul cu 0,01 mai mare decât suma dintre triplul lui 7,21 și dublul lui 1,18.

12. Comparați numerele:

a) 15,2(37) cu 15,234; b) 6,(47) cu 6,4(7);
c) 5,(21) cu $5\frac{5}{33}$; d) 2,1(7) cu $2\frac{1}{9}$;
e) $\frac{139}{8}$ cu 17,42; f) 0,057 cu $\frac{11}{200}$.

13. Calculați:

a) $[0,(1) + 0,(2) + 0,(3)] \cdot 3$;

b) $0,(5) + 5,(5) - \left(3\frac{7}{6} + 1,5\right)$;

c) $[4,(1) - 3,5]: 0,3(8) - \frac{4}{7}$;

d) $[15 \cdot 0,2(5) - 1,5 \cdot 2,25] \cdot 0,(72)$;

e) $\left[15 \cdot 2,(7) + 2\frac{1}{3} \cdot 25\right] \cdot 0,25$;

f) $\left[2\frac{2}{5} \cdot 1,(4) - 2,1 \cdot 0,(7)\right] \cdot 0,(30)$.

●●●

14. Considerăm numerele a = 5,(72) și b =5,7(2).

a) Comparați cele două numere.

b) Calculați suma primelor 12 zecimale ale lui a și suma primelor 15 zecimale ale lui b.

c) Determinați a 73-a zecimală a lui a și a 97-a zecimală a lui b.

d) Calculați diferența dintre suma primelor 101 zecimale ale lui a și suma primelor 101 zecimale ale lui b.

15. Ionuț merge, împreună cu părinții lui, cu mașina. El a adormit în timpul drumului, la ora 12, și s-a trezit la 15:30, când a observat la bordul mașinii scris *viteza medie: 42,7 km/h*. Care este distanța pe care a parcurs-o mașina cât timp a dormit Ionuț?

16. Un bucătar cumpără de la piață legume, așa cum este arătat în tabelul următor:

Produs	Ardei	Cartofi	Roșii	Ceapă	Morcovi
Cantitate (kg)	2,7	12,35	4,5	3	3,25
Preț pentru 1 kg (lei)	4,5	2,4	4,5	3,75	4

a) Cât cântăresc toate cumpărăturile?

b) Ordonează crescător produsele, în funcție de sumele care s-au plătit pentru fiecare dintre ele.

c) Care este suma totală plătită de bucătar la piață?

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 50 de minute.

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dintre numerele următoare, cel care se află între 2,45 și 2,(5) este:

a) 2,4; b) 2,(4); c) 2,5; d) 3. *5 puncte*

2. Numărul de 10 ori mai mare decât suma numerelor 7,25 și 15,4 este:

a) 222,9; b) 22,65; c) 87,9; d) 226,5. *5 puncte*

3. Rezultatul calculului (215 – 124,8):100 este:

a) 0,902; b) 0,918; c) 3,398; d) 9020. *5 puncte*

4. Scrierea sub formă de fracție zecimală a numărului $\frac{7}{6}$ este:

a) 1,16; b) 1,1(6); c) 1,6(1); d) 1,(16). *5 puncte*

5. Media aritmetică a numerelor 14 și 21 este egală cu:

a) 14; b) 17,5; c) 18; d) 21. *5 puncte*

6. Rotunjirea la zecimi a numărului 32,(56) este egală cu:

a) 32; b) 32,5; c) 32,6; d) 33. *5 puncte*

7. Scris ca fracție ordinară ireductibilă, numărul 2,(39) este:

a) $\frac{239}{99}$; b) $\frac{79}{33}$; c) $\frac{79}{33}$; d) $\frac{24}{11}$. *5 puncte*

8. Numărul de numere naturale situate între numerele raționale 9,2(5) și $\frac{124}{7}$ este:

a) 7; b) 8; c) 9; d) 10. *5 puncte*

9. Calculând 26% din 120 obținem:

a) 31; b) 31,1; c) 31,2; d) 32. *5 puncte*

Scrieți rezolvările complete.

10. Calculați:

a) $3\frac{3}{5} + 178,5:10 - 0,975 \cdot 10$; *5 puncte*

b) $1,24 \cdot 2,5 + 9,92:3,1 - 6\frac{1}{5}$; *5 puncte*

c) $\left(2,25 - \frac{2^2}{5} + \frac{2}{5^2}\right): 0,4(63) + 2\frac{1}{5} - 1,5$. *15 puncte*

11. Mihai împreună cu 4 colegi lucrează la un proiect pentru școală. Pentru că li s-a făcut foame, s-au hotărât să comande 3 pizza care costă 26,50 lei bucata. Când au comandat au aflat că vor mai beneficia de o reducere de 20% din costul total al pizzelor. Au mai comandat și 5 sosuri, la prețul de 1,25 lei bucata.

a) Arătați că suma economisită pentru cumpărarea celor 3 pizza este de 15,90 lei.

b) Știind că au împărțit în mod egal cheltuielile, calculați cât a plătit fiecare, aproximând prin adaos la întreg rezultatul. *20 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Calculați:

a) $24{,}75 \cdot 10 + 1255:10$; b) $0{,}245 \cdot 100 - 223:10$; c) $(23:5 + 26:8) \cdot 10$;

d) $27 + 2{,}6 \cdot (18{,}7 - 13{,}2)$; e) $2{,}53:(15{,}7 - 14{,}6) + 0{,}7$; f) $(15{,}92 - 12{,}28):2{,}6 + 2{,}6$.

2. Transformați în fracții zecimale:

a) $\frac{57}{8}$; b) $\frac{75}{6}$; c) $\frac{243}{20}$; d) $\frac{517}{90}$; e) $4\frac{17}{99}$; f) $12\frac{5}{9}$.

3. Calculați diferența dintre înzecitul lui 1,775 și sfertul lui 17.

4. Calculați:

a) 20% din 254; b) 17% din 320; c) $\frac{3}{5}$ din 82;

d) 0,4 din 25; e) 2,6 din 134; f) 12,5 din 24,4.

5. Tatăl lui Mihai a sudat 2 bare metalice cu lungimea de 2,25 m fiecare, după care a tăiat bucata obținută în 5 bucăți de lungimi egale. Care este lungimea fiecăreia?

6. Câte numere naturale sunt între numerele:

a) 7,21 și 52,4; b) 8,(735) și 32,(007); c) 24,9 și $\frac{513}{7}$; d) $3\frac{2}{7}$ și $\frac{312}{23}$; e) $\frac{17}{9}$ și 431,2(88); f) $\frac{21}{8}$ și $\frac{517}{8}$?

7. Diferența dintre 461,28 și un număr rațional este 125,25. Determinați numărul, exprimând rezultatul sub formă de fracție zecimală.

8. Dintr-o sârmă cu lungimea de 25,75 m s-au tăiat două bucăți, una de 17,36 m, iar cealaltă cu 10,28 m mai mică decât prima. Ce lungime are sârma rămasă după cele două tăieturi?

9. Un excursionist a parcurs în prima zi 8,25 km, în a doua zi cu 2,25 km mai mult decât în prima, iar în a treia zi a parcurs cu 2 km mai puțin decât în a doua zi. Câți kilometri a parcurs în cele trei zile?

10. Calculați:

a) $\left(\frac{5}{8} + 8{,}5\right) \cdot 0{,}(73) - 7{,}375$; b) $3{,}3 : \left[\left(1{,}3(8) + \frac{7}{24}\right) \cdot 2{,}6(18)\right]$;

c) $[12{,}3:4{,}(5) + 1{,}3] \cdot 10 - 7{,}2 \cdot 5$; d) $\left[24{,}8 : \left(2\frac{1}{3} - 4{,}4(7):13{,}4(3)\right) - 2\frac{2}{5}\right] : 0{,}1$;

e) $[0{,}5 + 0{,}(3) - 0{,}1(6)] \cdot 3 + 4$; f) $\left[5\frac{1}{3} - 2{,}(3) \cdot \frac{5}{7}\right] : 1{,}(2) - 2$.

11. Considerăm numerele $\boldsymbol{a} = 10{,}15 - 2{,}15 \cdot 3 + 18{,}46:2{,}6$ și $\boldsymbol{b} = (195{,}3 : 3^2 + 5{,}3) : 10$.

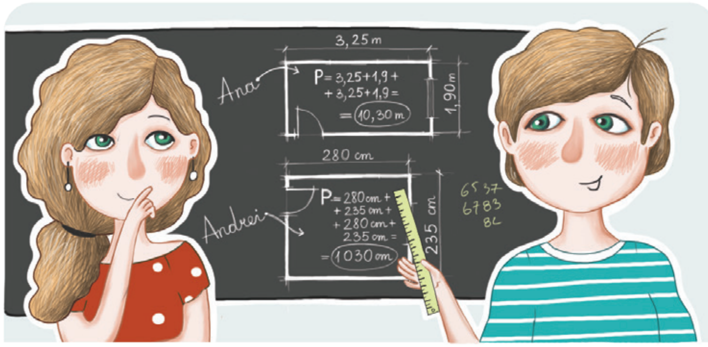
a) Determinați valorile lui a și b.
b) Comparați optimea lui a cu jumătatea lui b.
c) Calculați $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$ și $3\boldsymbol{a} - 10\boldsymbol{b}$.

12. Media aritmetică a cinci numere, *a*, *b*, *c*, *d* și *e*, este 17,4. Calculați media aritmetică a numerelor *a*, *b*, *c*, *d*, *e* și 9.

13. Media aritmetică a numerelor *a*, *b* și *c* este egală cu *b*. Arătați că media aritmetică a numerelor *a* și *c* este egală tot cu *b*.

14. Ana afirmă: *„Am la istorie notele 7 și 9 și, dacă mai iau un 9, voi avea media 9.”*. Este adevărată afirmația Anei? Justificați răspunsul.

Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare



Andrei: Ana, mama a spus că facem curățenie în apartament și ne schimbă parchetul în camerele noastre. Trebuie să măsurăm camerele pentru a ști cât parchet și câtă plintă să cumpere.

Ana: Ce este plinta?

Andrei: Plinta este o piesă de lemn care se aplică la partea de jos a pereților unei încăperi pentru a acoperi golurile dintre pardoseală și perete.

Ana: Atunci trebuie să măsurăm lungimea și lățimea camerei, iar pentru plintă să calculăm perimetrul.

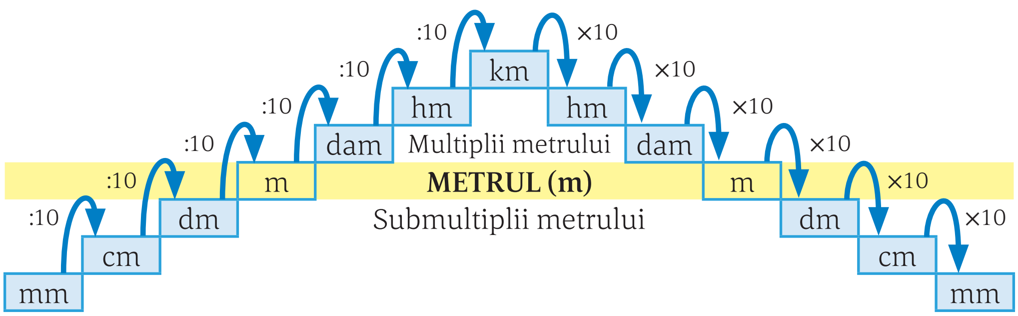
Andrei: Da. Să ne măsurăm fiecare camera și să aflăm câtă plintă ne trebuie.

Ana: Camera mea are lungimea egală cu 3,25 m și 1,9 m lățimea; așadar *P* = 3,25 + 1,90 + 3,25 + 1,90 = 10,30 m.

Andrei: Camera mea are lungimea de 280 cm și lățimea de 235 cm;
P = 280 cm + 235 cm + 280 cm + 235 cm = 1030 cm. Dacă transform în metri obțin tot 10,30 m.

Reținem

A măsura înseamnă a stabili prin comparare cu *o unitate de măsură etalon* valoarea unei mărimi (lungime, masă, greutate etc.). Etalonul este o măsură-tip acceptată oficial în știință sau în tehnică și care determină un sistem de unități de măsură. Prin convenție internațională, *unitatea principală pentru măsurarea lungimii* este *metrul* (m).



Probleme rezolvate

- Completați pe caiet transformările, după model:

23 m = 230 dm;   118 m = ... hm;   1,76 hm = ... cm;   366 cm = ... dm;   4,6 dam = ... dm.

- Calculați: a) 12 hm + 210 m + 1250 dm = ... dam;   b) 0,005 m + 0,07 dm + 0,12 cm = ... mm.

Rezolvare. a) 12 hm + 210 m + 1250 dm = 120 dam + 21 dam + 12,5 dam = 153,5 dam;
b) 0,005 m + 0,07 dm + 0,12 cm = 5 mm + 7 mm + 1,2 mm = 13,2 mm.

● Mihai vrea să-l ajute pe bunicul lui să calculeze dimensiunile grădinii. Bunicul îi spune că lungimea gardului este de 3 km, iar lungimea grădinii este de 2 ori mai mare decat lățimea. Câți metri are lungimea și câți metri are lățimea grădinii?

Rezolvare. Dacă perimetrul este egal cu 3 km = 3000 m, atunci semiperimetrul (adică suma dintre lungime și lățime) este de 1500 m.

Obținem lungimea egală cu 1000 m și lățimea egală cu 500 m.

● O croitoreasă cumpără 12,8 m de pânză pentru 4 rochii și 3 fuste. După o săptămână ea mai cumpără 9,3 m de pânză pentru 3 rochii și 2 fuste. Câți metri pe pânză sunt necesari pentru o rochie și câți metri sunt necesari pentru o fustă?

Rezolvare:

4 rochii .... 3 fuste ....12,8 m
3 rochii .... 2 fuste .... 9,3 m

Dublăm prima relație și triplăm a doua relație și obținem:

8 rochii .... 6 fuste ....25,6 m
9 rochii .... 6 fuste .... 27,9 m

Dacă scădem cele două relații obținem că pentru o rochie sunt necesari 2,3 m de pânză.

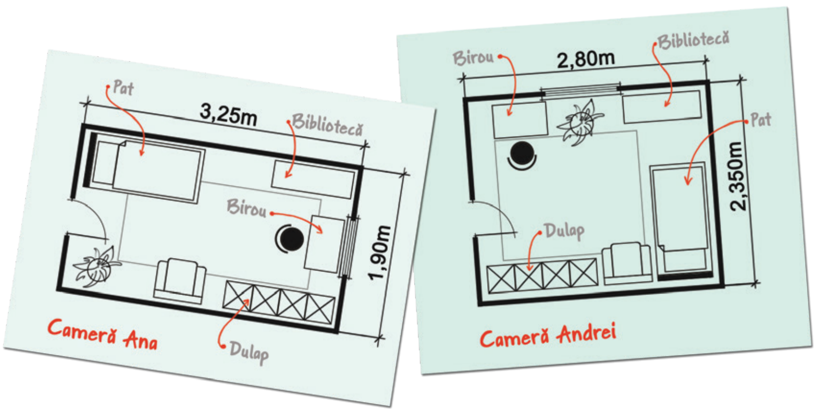
3 rochii = 6,9 m pânză .... 2 fuste .... 9,3 m. Obținem că pentru o fustă avem nevoie de 1,2 m de pânză.

Proiect

Ana și Andrei si-au desenat schițele camerelor lor și cum vor fi aranjate după curățenie.

Faceți-vă și voi schița camerei și marcați obiectele pe care le aveți în ea. Prezentați colegilor proiectele voastre.

Știind că în camera Anei lungimea bibliotecii este de 1,15 m și lungimea patului este de 1,80 m, determinați distanța dintre pat și bibliotecă.



Ana: Andrei, mama spune că pentru camera mea a cumpărat 3,5 cutii de parchet și 5 plinte și a plătit 342,77 lei, iar pentru camera ta a plătit 366,03 lei pentru 4 cutii de parchet și 5 plinte. Calculezi tu cât a fost prețul unei cutii de parchet și cât a costat o plintă?

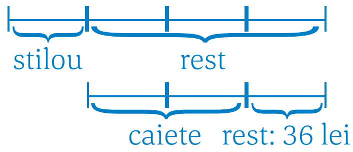
Andrei: 3,5 cutii .... 5 plinte ...... 505,59 lei
4 cutii .... 5 plinte ...... 552,11 lei. Dacă scădem cele două relații obținem că jumătate de cutie de parchet costă 46,52 lei, așadar o cutie are prețul de 93,04 lei. O plintă are prețul de 35,99 lei.

Ana: Știi că noi aveam 300 euro primiți astă-vară de la bunica pentru a schimba parchetul în camerele noastre? Să vedem câți bani ne mai rămân. M-am uitat pe internet și 1 euro este 4,95 lei, deci pentru 300 euro vom primi 1485 lei. Ne rămân 1485 lei – (505,59 lei + 552,11 lei) = 427,30 lei. Oare ajung să ne cumpărăm jaluzele?

Proiect

Folosiți internetul și completați un tabel care să conțină cursul valutar la Banca Națională a României pentru euro și dolar timp de o săptămână. Tabelul să conțină câte o linie cu ziua și câte o coloană pe care să fie trecut cursul pentru euro și cursul pentru dolar. Calculați valoarea medie pentru cursul euro și cursul dolarului din săptămâna studiată. Discutați cu colegii voștri și verificați dacă ați obținut aceeași medie. Păstrați în portofoliile voastre proiectele făcute pe parcursul anului.

Probleme rezolvate



● După ce a cumpărat cu un sfert din suma pe care o are un stilou, iar cu două treimi din rest caiete, Raluca mai are 36 lei. Ce sumă de bani a avut Raluca?

Rezolvare. Dacă folosim metoda mersului invers obținem suma egală cu 144 lei.

● Maria cumpără 5 lalele și 7 frezii și plătește 50 lei, iar Ioana cumpără 7 lalele și 5 frezii și plătește 46 lei. Cât costă o lalea și cât costă o frezie?

Rezolvare.

5 lalele ..... 7 frezii ..... 50 lei
7 lalele ..... 5 frezii .... 46 lei.

Dacă adunăm cele două relații obținem:

12 lalele ... 12 frezii .... 96 lei,
1 lalea .... 1 frezie ...... 8 lei.

Obținem că o lalea costă 3 lei și o frezie costă 5 lei.

● Vlad a cumpărat 45 de caiete și a plătit 189 lei. Dacă unele caiete costă 3,50 lei și altele 5 lei, câte caiete de fiecare fel a cumpărat Vlad?

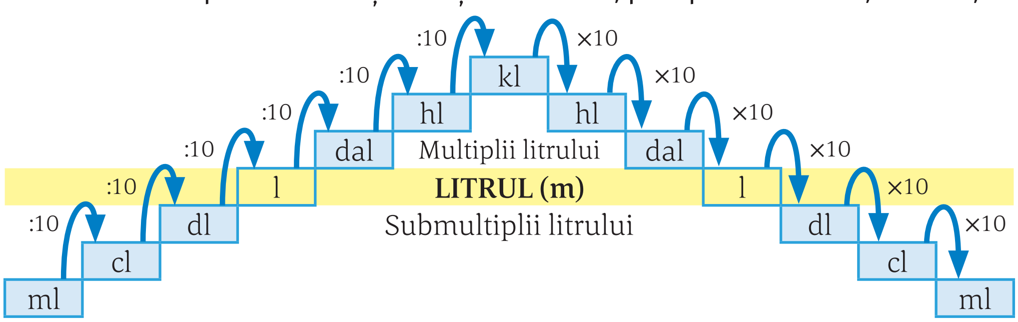
Rezolvare. Presupunem că toate caietele costă 3,50 lei, așadar 45 de caiete costă 157,50 lei. Diferența 189 lei – 157,50 lei = 31,50 lei provine din faptul că unele caiete costă cu 5 lei – 3,50 lei = 1,50 lei mai mult. 31,50 lei : 1,50 lei = 21 caiete de 5 lei; 45 – 21 = 24 caiete de 3,50 lei.

Proiect

Aveți la dispoziție pentru cumpărături 100 lei. Faceți o listă cu cel puțin 5 rechizite care vă sunt necesare și mergeți la cumpărături. Puteți să vă cumpărați și ceva dulce. Comparați-vă lista cu cea a colegului. Vedeți dacă aveți lucruri în comun și comparați prețurile lor.

Andrei: Ana, ce îți amintești despre unitățile de măsură pentru capacități?

Ana: Unitatea de măsură pentru capacitate este litrul, iar multiplii și submultiplii sunt din 10 în 10. Adică: 1 l = 10 dl = 100 cl = 1000 ml. După ce am învățat fracțiile zecimale, pot spune că: 1 l = 0,1 dal = 0,01 hl = 0,001 kl.



Andrei: Să facem câteva transformări: 4,25 l = 4250 ml, 186 dal = 1,86 kl, 16 dl = 1,6 l.

Probleme rezolvate

Andrei: Îți propun o problemă:

● *La un depozit sunt 7 butoaie mari cu câte 75,5 l de ulei și 7 butoaie mici care conțin 37,75 l de ulei. Uleiul trebuie repartizat în mod egal la 3 magazine, dar nu există nicio posibilitate de a-l măsura. Cum trebuie să se împartă butoaiele, fără a le deschide?*

Ana: Butoaiele mici au capacitatea egală cu jumătate din capacitatea butoaielor mari (75,5 l : 2 = 37,75 l). Atunci 7 butoaie mari echivalează cu 14 butoaie mici, ceea ce reprezintă 14 + 7 = 21 (butoaie mici cu ulei); 21 : 3 = 7 (butoaie mici) trebuie să primească fiecare magazin. Primul magazin primește 3 butoaie mari și un butoi mic. Al doilea magazin primește 3 butoaie mari și un butoi mic. Al treilea magazin primește 1 butoi mare și 5 butoaie mici. Fiecare primește aceeași cantitate.

Andrei: Ai rezolvat foarte bine. Îmi propui și tu mie o problemă?

● *Ana: O piscină are forma unui paralelipiped și are capacitatea de 4200 litri; ea este alimentată folosind trei robinete. Primul robinet ar putea să umple singur piscina în 60 de minute, al doilea robinet ar putea s-o umple singur în 70 de minute, iar al treilea ar putea s-o umple singur în 210 minute. Dacă ar curge împreună, în cât timp ar putea cele trei robinete să umple piscina?*

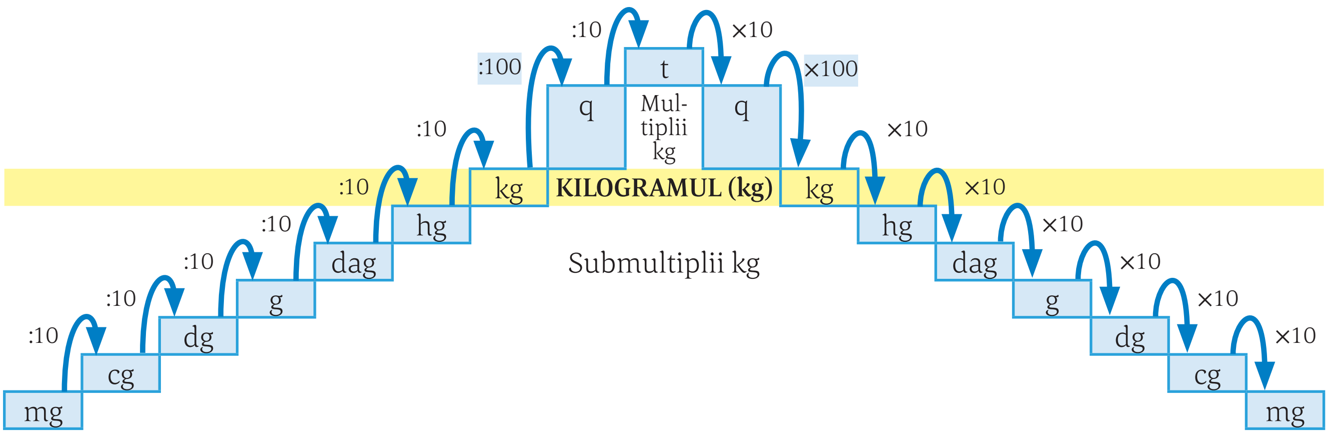
Andrei: Aflăm câți litri de apă curg într-un minut prin fiecare robinet:

Robinet 1	Robinet 2	Robinet 3
60 minute .... 4200 l 1 minut .... 4200 l : 60 = 70 l	70 minute .... 4200 l 1 minut .... 4200 l : 70 = 60 l	210 minute ..... 4200 l 1 minut .... 4200 l : 210 = 20 l

Prin cele trei robinete curg, într-un minut, 70 + 60 + 20 = 150 l de apă.
150 l ...... 1 minut
4200 l .... 4200 : 150 = 28 minute.

Ana: Andrei, tu ce îți amintești despre unitățile de măsură pentru măsurarea masei corpurilor?

Andrei: Unitatea de măsură pentru măsurarea masei este kilogramul. Adică: 16,5 kg = 16500 g, 0,15 t = 150 kg, 1,1 dag = 11 g.



Ana: Dacă tot vorbim despre kilograme și grame, eu cred că ne descurcăm să facem clătite. Avem rețeta în caietul mamei.

Andrei: Am găsit rețeta: 1000 ml de lapte, 4 ouă, 500 g de făină și 100 g de unt. Dar noi nu avem în frigider decât 250 ml de lapte.

Ana: Dacă avem 250 ml de lapte, înseamnă un sfert din cantitatea din rețetă. Împărțim toate celelalte ingrediente la 4 și obținem rețeta pentru cantitatea noastră de lapte.

Andrei: Eu pregătesc ingredientele și tu faci clătitele. Avem nevoie de 250 ml de lapte, un ou, 500 g : 4 = 125 g de făină și 100 g : 4 =25 g de unt. Am cântărit.

Probleme rezolvate

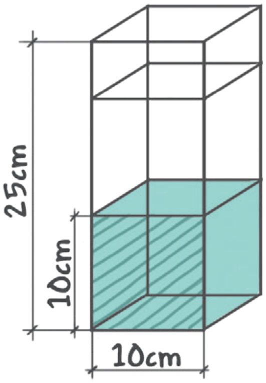
● Dacă din 34 l de lapte se obțin 5 kg de brânză, din câți litri de lapte se obțin 3 kg de brânză? Câte kilograme de brânză se obțin din 51 l de lapte?

Rezolvare.

5 kg brânză ..... 34 l lapte
1 kg brânză ..... 34 : 5 = 6,8 l lapte
3 kg brânză ..... 3 · 6,8 = 20,4 l lapte.

34 l lapte .... 5 kg brânză
6,8 l lapte ...... 1 kg brânză
51 l lapte ...... 51 : 6,8 = 7,5 kg brânză.

Proiect



Ana: Doamna profesoară ne-a spus să facem un experiment ca să ne convingem că un litru de apă încape într-un vas în formă de cub cu latura de 1 dm. Cum facem?

Andrei: M-am gândit și eu la experiment, dar nu am găsit prin casă un vas cu latura de 10 cm. Dar am găsit o vază de flori care are forma de paralelipiped dreptunghic cu latura bazei de 10 cm. Are însă înălțimea de 25 cm...

Ana: E foarte bună! Facem un semn la 10 cm de bază și apa trebuie să ajungă până la acel semn. Hai să încercăm.

Andrei: Într-adevăr, apa se ridică în vas până la semnul nostru. Doamna profesoară a spus că asta înseamnă că $1\ l = 1\ dm^3$. Încercați și voi să faceți experimentul!

Andrei: Ana, cât timp crezi că va dura să facem clătitele?

Ana: Dacă pentru rețeta întreagă scrie în caiet că timpul este de o oră, pentru un sfert de rețetă ne trebuie un sfert de oră, nu?

Andrei: Ai calculat așa: $\frac{1}{4} \cdot 1$ *oră* $= \frac{1}{4} \cdot 60$ min $= 15$ min. Vrei să vorbim despre unitățile de măsură pentru timp?

Ana: Unitatea principală pentru măsurarea timpului este secunda (s). Multiplii secundei sunt: minutul, care are 60 de secunde, ora, care are 60 de minute sau 3600 de secunde, ziua, care are 24 de ore, săptămâna, care are 7 zile.

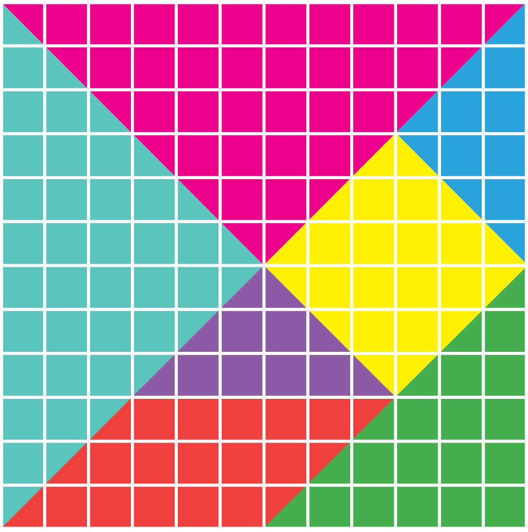
Andrei: Mai este luna, care poate să aibă 28, 29, 30 sau 31 de zile, anul, care are 12 luni (365 sau 366 de zile), deceniul, care are 10 ani, secolul, care are 100 de ani și mileniul, care are 1000 de ani.

Ana: Acum suntem în mileniul 3, secolul XXI.

Andrei: Câte zile sunt de la 1 februarie 2024 până la 2 martie 2024?

Ana: Vrei să vezi dacă sunt atentă? Anul 2024 este an bisect, iar luna februarie are 29 de zile, deci vor fi 29 + 2 = 31 de zile. Dar tu poți să-mi spui dacă o lună poate avea 5 zile de duminică?

Andrei: Dacă luna are 31 de zile și data de 1 este vineri, sâmbătă sau duminică, atunci vor fi 5 zile de duminică. Dacă luna are 30 de zile, data de 1 trebuie să fie sâmbătă sau duminică.



Ana: Andrei, acum, că am terminat clătitele, vrei să jucăm Tangram?

Andrei: Desigur, dar eu nu-mi găsesc piesele de la joc.

Ana: Nicio problemă, facem noi imediat niște piese. Desenăm un pătrat cu latura de 12 cm și îl împărțim ca în figură (fiecare pătrățel din figură are latura de 1 cm).

Andrei: Le și colorăm?

Ana: Ar fi bine. Și putem afla și aria fiecărei figuri geometrice pe care o decupăm.

Andrei: Unele pătrățele nu sunt întregi. Dar putem cupla câte două jumătăți și facem un pătrățel. Să vedem: triunghiurile mari (cel roșu și cel bleu) au câte 30 de pătrățele întregi și 12 jumătăți de pătrățel, deci încă 6 pătrățele de câte $1\ cm^2$, adică $36\ cm^2$; triunghiul mijlociu, cel verde, este format din 15 pătrățele și 6 jumătăți de pătrățel, care mai formează

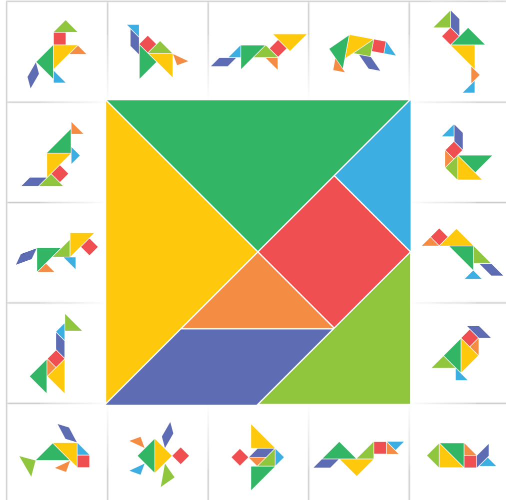
3 pătrățele, deci are 18 cm²; triunghiurile mici, cele albastre, sunt formate din câte 6 pătrățele și 6 jumătăți de pătrățel, deci ar forma un pătrat cu aria de 9 cm².

Ana: Pătratul galben este format din 12 pătrățele și 12 jumătăți de pătrățel, care mai formează 6 pătrățele de câte 1 cm², deci are aria de 18 cm². Iar paralelogramul cărămiziu este format din 15 pătrățele întregi și 6 jumătăți de pătrățel, deci are 18 cm².

Andrei: Să verificăm: 36 cm² + 36 cm² + 18 cm² + + 9 cm² + 9 cm² + 18 cm² + 18 cm² = 144 cm². Pătratul din care tăiem piesele este format din 144 de pătrățele cu aria de 1 cm², deci are aria de 144 cm². Așadar am calculat corect.

Ana: Acum să ne jucăm. Știai că din piesele de Tangram, așezate unele lângă altele, fără suprapuneri, se pot obține peste 1600 de figuri reprezentând animale, păsări, oameni, litere, cifre, obiecte etc.? Îți propun să facem figurile din imagine:

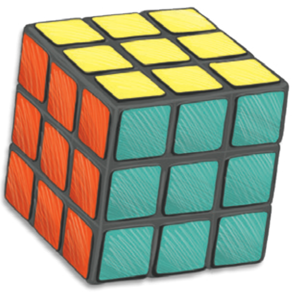
Să ne jucăm



Andrei: Ana, eu fac curățenie la jucăriile mele și nu găsesc toate cubulețele. Am găsit cutia pentru cuburi și am reușit să așez în ea două rânduri complete de câte 8 cuburi. Ar trebui să am, însă, 7 rânduri de cuburi.

Ana: Dacă ai 2 rânduri .... 16 cuburi
1 rând .... 16 : 2 = 8 cuburi
7 rânduri .... 8 • 7 = 56 cuburi.

Mai trebuie să găsim 40 de cuburi. Cred că sunt în camera mea.



Andrei: Am putea calcula volumul cutiei, dacă în cutie putem așeza 56 de cubulețe de latură egală cu 3 cm?

Ana: Am învățat anul trecut să calculăm volumul cubului Rubik, care este format din 27 de cubulețe cu latura egală cu 2 cm. Îți amintești cum făceam?

Andrei: Desigur. Am calculat întâi volumul unui cubuleț cu latura de 2 cm, $V = l \cdot l \cdot l = 8$ cm³. Așadar cubul Rubik are volumul egal cu 27 · 8 cm³ = 216 cm³.

Ana: Atunci, dacă un cubuleț are latura de 3 cm, înseamnă că volumul lui este $V = l \cdot l \cdot l = 27$ cm³. Cutia în care punem cubulețele are volumul de 56 · 27 cm³ = 1512 cm³.

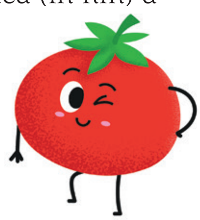
Probleme propuse

1. Transformați:

a) 12,6 cm = ... m; b) 0,21 hm = ... dm;
c) 8 dam = ... cm; d) 8,04 km = ... dam;
e) 42 l = ... dl; f) 405 cl = ... dal;
g) 0,001 hl = ... l; h) 5,72 ml = ... l;
i) 0,04 t = ... kg; j) 3,002 dag = ... mg;
k) 124 g = ... kg; l) 61 dc = ... hg;
m) 4 l = ... dl; n) 0,4 dal = ... cl;
o) 730 ml = ... l; p) 1005 dal = ... kl;
q) 4 ore = ... min; r) 7521 min = ... ore;
s) 4516 bani = ... lei; t) 1,79 lei = ... bani.

2. Un excursionist a mers într-o zi 10 km și 25 m, a doua zi cu 2 km, 1 hm și 93 m mai mult decât în prima zi, iar a treia zi cu 41 hm 5 dam și 8 m mai puțin ca în a doua zi. Care este lungimea (în hm) a drumului parcurs în cele trei zile?

3. Dacă 180 kg de roșii ocupă 30 de lădițe, câte lădițe sunt necesare pentru 360 kg de roșii? Câte tone de roșii pot fi ambalate în 200 de lădițe?



4. Dacă 4 gogoși și 4 brioșe cântăresc 800 g, cât cântăresc 3 gogoși și 3 brioșe?

5. Într-un depozit se află 1060 kg de mere, dintre care jumătate sunt mere ionatane și un sfert sunt mere delicios, restul fiind mere golden. Ce cantități de mere sunt din fiecare soi?

6. Maria cumpără din piață 2,5 kg de cartofi și 1,5 kg de ceapă. Știind că 1 kg de cartofi costă 2,25 lei, iar 1 kg de ceapă costă 1,75 lei, ce rest i-a rămas Mariei dacă a avut o bancnotă de 5 lei și patru bancnote de 1 leu?

7. Călin a vrut să cumpere o cămașă care costa la raft 125 lei, dar la casă a aflat că are o reducere de 14% din preț. Câți lei a plătit Călin pe cămașă?

8. Prețul unui stilou este de 24,50 lei. Determinați prețul stiloului după o scumpire cu 50%.

9. Dacă un bazin poate fi umplut cu ajutorul unui robinet în 15 ore, în câte ore va fi umplut bazinul de trei robinete cu același debit?

10. Ionel plătește pe o carte cinci șesimi din suma pe care o are și mai rămâne cu 2,50 lei. Ce sumă a avut Ionel?

••

11. Două cisterne conțin 3100 l de lapte. Dacă din prima se pun 4 hl de lapte în a doua, atunci ambele cisterne vor avea aceeași cantitate de lapte. Câți decalitri de lapte conținea inițial fiecare cisternă?

12. Sorin vrea să cumpere un penar cu prețul de 25 lei și o carte cu prețul de 40 lei. La librărie constată că prețul penarului a scăzut cu 20%, iar prețul cărții a crescut cu 12,5%. Care este diferența dintre suma de bani pe care trebuia să o plătească inițial și suma plătită de Sorin?

13. Teodor merge cu bicicleta la bunica lui, care stă la 8 km distanță de casa sa. El face prima oprire la prietenul lui, care stă față de casa lui la trei cincimi din distanța pe care o are de parcurs. A doua oprire o face la piață, care se află la jumătatea distanței pe care o mai are de parcurs. Care sunt lungimile celor trei părți din drumul lui Teodor până la bunica lui?

14. Câte roșii sunt într-o lădiță, dacă lădița plină cu roșii cântărește 3,5 kg, lădița goală cântărește 0,740 kg, iar o roșie cântărește 115 g?

15. Andra vrea să planteze lalele și crini în grădina sa. Ea cumpără 25 de bulbi și plătește 145 lei. Știind că un bulb de lalea costă 5 lei și unul de crin costă 7 lei, câți bulbi de fiecare fel a cumpărat Andra?

16. Pe laturile unei alei în formă de dreptunghi dintr-un parc, cu lungimea de 24 m și lățimea de 3 m, grădinarul vrea să planteze arbori care costă 32,50 lei bucata. Distanța dintre doi arbori alăturați trebuie să fie de 3 m, iar primul arbore este plantat în locul în care începe aleea. Cât vor costa aceștia?

17. O fermă agricolă a obținut o producție medie de 3 t de grâu la hectar. Șapte optimi din cantitate este depozitată și restul se distribuie celor 250 de asociați. Dacă suprafața însământață a fost de 648 ha, ce cantitate de grâu revine fiecărui asociat?

18. Într-o livadă se plantează 129 de pomi astfel: numărul perilor este jumătate din cel al merilor, prunii sunt cu șase mai mulți decât triplul perilor, iar caișii sunt jumătate din suma perilor și a prunilor.

a) Câți pomi de fiecare fel se vor planta în livadă?

b) Cât costă plantarea, dacă un puiet de măr costă 33,50 lei, puietul de păr costă 31,75 lei, cel de prun 29,25 lei și caisul 35 lei?

19. Cum putem aduce 6 l de apă de la râu, dacă dispunem de două vase: unul de 4 l și altul de 9 l?

20. În șapte cutii sunt batoane de ciocolată. Batoanele ar fi trebuit să aibă câte 100 g fiecare, dar una dintre cutii conține batoane de ciocolată de 90 g. Printr-o singură cântărire determinați această cutie, știind că toate batoanele sunt ambalate la fel.

Probleme de organizare a datelor; frecvență; date statistice organizate în tabele, grafice cu bare și/sau cu linii; media unui set de date statistice

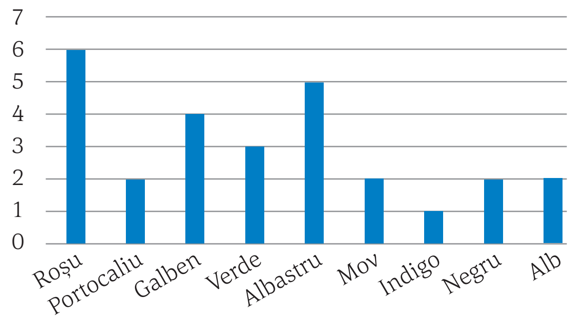
Ana: Andrei, doamna profesoară ne-a cerut să facem un sondaj între colegi, să strângem datele într-un tabel și să le analizăm.

Andrei: Mă gândesc să facem un formular în Google Classroom și să punem fiecare câte o întrebare, apoi îi rugăm pe toți colegii să răspundă. Eu mă gândesc să întreb: *Care este culoarea ta preferată?*. Tu ce vrei să întrebi?

Ana: *Care este desertul tău preferat?*

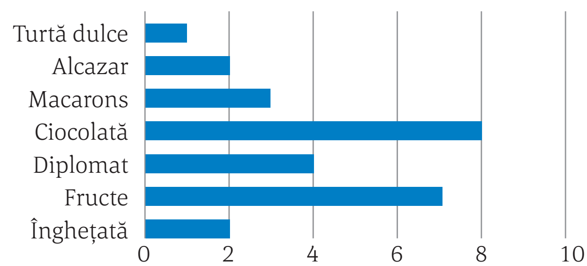
Andrei: Am primit răspunsuri de la 27 de colegi. Să organizăm datele în tabele și să facem și graficul cu bare verticale, așa cum apare și în interpretarea datelor în Classroom.

Culoarea preferată	Număr elevi
Roșu	6
Portocaliu	2
Galben	4
Verde	3
Albastru	5
Mov	2
Indigo	1
Negru	2
Alb	2



Ana: Observ că ai obținut culoarea roșie cu frecvența cea mai mare, 6, și culoarea indigo cu frecvența cea mai mică, 1. Eu am aranjat datele în tabel și am făcut un grafic cu bare orizontale.

Desertul preferat	Număr elevi
Înghețată	2
Fructe	7
Diplomat	4
Ciocolată	8
Macarons	3
Alcazar	2
Turtă dulce	1



Andrei: Se pare că ciocolata este desertul preferat al colegilor noștri, are frecvența egală cu 8, iar turta dulce are frecvența egală cu 1 și e desertul cel mai puțin preferat.

Reținem

✓ Atunci când colectăm informații, organizarea acestora în tabele sau reprezentarea prin grafice sau diagrame ajută în formularea concluziilor.

✓ Deși tabelele sunt foarte utile pentru că ele conțin datele colectate, înțelegerea și interpretarea acestora este mai ușoară când atașăm un grafic sau o diagramă.

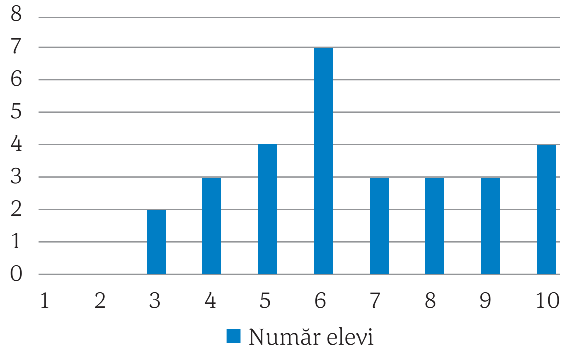
✓ *Frecvența* reprezintă numărul de înregistrări ale unei date în setul de date.

Ana: Doamna profesoară ne-a spus să analizăm notele obținute de elevii clasei noastre la testul de matematică. Notele obținute de cei 29 de elevi sunt: 3, 5, 6, 8, 5, 6, 7, 9, 10, 6, 10, 9, 3, 4, 7, 8, 6, 6, 6, 5, 4, 6, 4, 8, 5, 7, 10, 10, 9. Spunem că „am făcut culegerea datelor” și acum vrem să le interpretăm. Pentru aceasta ar fi mai ușor să grupăm datele și să le prezentăm sub forma unui tabel.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	0	0	2	3	4	7	3	3	3	4

Nota 3 a fost luată la test de către 2 elevi, așadar spunem că valoarea 3 are *frecvența* 2. Valoarea 6 are *frecvența* 7, adică 7 elevi au obținut nota 6. Care este frecvența valorilor 10, 8 și 4?

Reprezentarea datelor într-un grafic cu bare este aceasta:



Dacă analizăm graficul cu bare putem spune că: 2 elevi au nota 3, nota 6 a fost obținută de cei mai mulți elevi (7), nota 5 este obținută de 4 elevi.

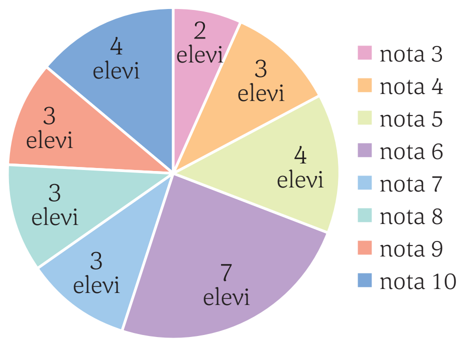
De obicei, la fiecare test calculăm și *media* notelor:

$$\frac{3+5+6+8+5+6+7+9+10+6+10+9+3+4+7+8+6+6+6+5+4+6+4+8+5+7+10+10+9}{29} = 6{,}62$$

(am considerat doar primele două zecimale).

Dacă vrem un calcul mai simplu pentru media aritmetică a celor 29 de note, le putem grupa astfel încât în loc să trecem nota 3 de 2 ori să trecem 3·2, în loc să trecem nota 6 de 7 ori să trecem 6·7 ș.a.m.d. Scriem astfel: $\frac{3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 7+7\cdot 3+8\cdot 3+9\cdot 3+10\cdot 4}{29} = 6{,}62$.

Putem realiza și un grafic circular pentru datele noastre, precum acesta:



Putem analiza datele și pe tranșe de note sau după o altă grupare. De exemplu:

Note între	1-5	6-8	9-10
Număr elevi	9	13	7

Reținem

✓ *Media unui set de date statistice* este media aritmetică a tuturor valorilor din setul de date analizat.

Ana: Vă propun un joc! Scrieți numerele de la 2 la 100 ca în tabelul de mai jos:

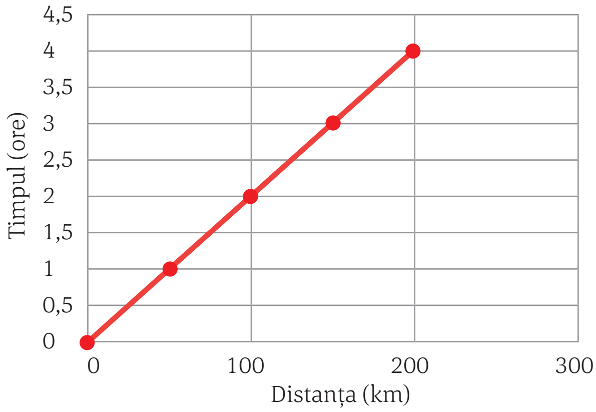
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Cerințe:
a) Colorează cu verde căsuțele cu numere pare, în afară de 2.
b) Colorează cu roșu căsuțele cu numere divizibile cu 3, în afară de 3.
c) Colorează cu albastru căsuțele cu numere divizibile cu 5, în afară de 5.
d) Colorează cu galben căsuțele cu numere divizibile cu 7, în afară de 7.
e) Colorează cu negru căsuțele cu numere divizibile cu 11, în afară de 11.
f) Colorează cu mov căsuțele cu numere divizibile cu 13, cu 17 sau cu 19, în afară de 13, 17 și 19.
g) Taie cu o linie oblică căsuțele cu numere divizibile cu 23, cu 29 sau cu 31, în afară de 23, 29 și 31.
h) Taie cu două linii oblice căsuțele cu numere divizibile cu 37, cu 41, cu 43 sau cu 47, în afară de 37, 41, 43 și 47.
i) Scrie ce numere au rămas. Ce poți spune despre acestea?

Observație. Numerele rămase sunt numerele prime până la 100.

Andrei: În graficul liniar alăturat am prezentat parcursul, în fiecare oră, al unui automobil care merge 4 ore. Observ că după o oră a parcurs 50 km, după două ore a parcurs 100 km, după 3 ore a parcurs 150 km și după patru ore a parcurs 200 km.

Ana: Eu cred că putem spune și că după jumătate de oră a parcurs 25 km, după o oră jumătate a parcurs 75 km. Cred că viteza lui este de 50 km/h.



Reținem

Organizarea datelor presupune:
✓ colectarea datelor;
✓ organizarea într-un tabel;
✓ reprezentarea cu ajutorul diagramelor sau a graficelor;
✓ formularea de concluzii.

Probleme propuse

1. Maria și-a făcut programul extrașcolar pentru luna mai:

Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
		1 Ora de pian	**2**	**3** Antrenament volei	**4**	**5** Muzeu cu familia
6 Antrenament volei	**7**	**8** Ora de pian	**9**	**10** Antrenament volei	**11** Teatru cu familia	**12**
13 Antrenament volei	**14**	**15** Ora de pian	**16**	**17** Antrenament volei	**18** Cumpărături cu mama	**19** Film cu familia
20 Antrenament volei	**21**	**22** Ora de pian	**23**	**24** Antrenament volei	**25** Aniversare Iulia	**26**
27 Antrenament volei	**28**	**29** Ora de pian	**30**	**31** Antrenament volei		

a) În câte zile din luna mai va merge la antrenamentul de volei?

b) Câte ore de pian are Maria în luna mai? Care este ziua în care merge la ora de pian?

c) Câte activități are Maria cu familia? Care sunt zilele în care are activități cu familia?

d) În câte zile din luna mai nu are activități extrașcolare?

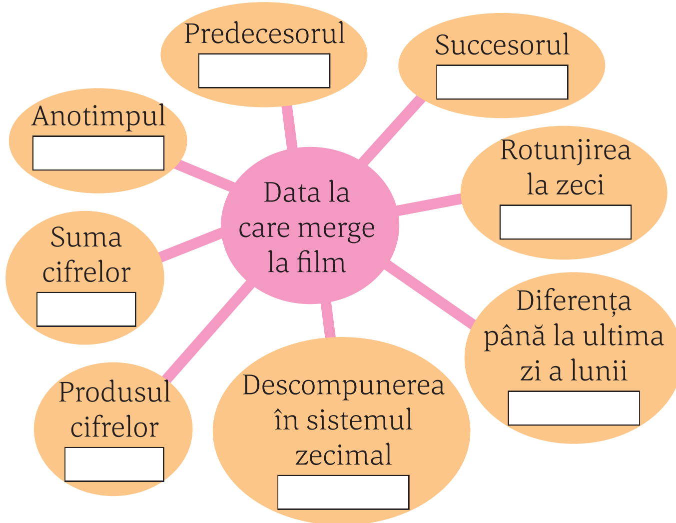
e) După câte zile de la vizita la muzeu merge la aniversarea Iuliei?

f) Care este activitatea cu frecvența cea mai mare a Mariei în luna mai?

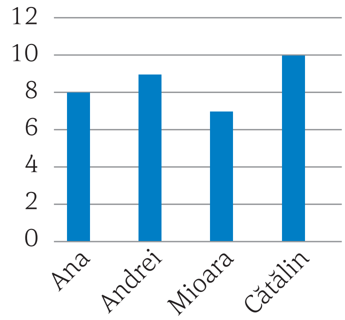
g) În ce dată merge Maria la cumpărături cu mama ei? Ce zi este?

h) Câte zile de sâmbătă are Maria libere?

i) Completați schema alăturată:



2. Ana, Andrei, Mioara și Cătălin au citit în vacanță o parte din cărțile din lectura suplimentară.



a) Care copil a citit cele mai multe cărți?

b) Care copil a citit cele mai puține cărți?

c) Câte cărți au citit fetele în total?

d) Cu câte cărți a citit mai multe Cătălin decât Mioara?

e) Care este diferența dintre numărul de cărți citite de Ana și al celor citite de Mioara?

f) Bifați în tabel rubrica din coloana corespunzătoare (A – adevărat și F – fals):

	A	F
Cătălin a citit mai mult decât Andrei.		
Ana a citit mai mult decât Cătălin.		
Mioara a citit cele mai puține cărți.		
Ana și Andrei au citit cât Mioara și Cătălin.		

3. Șase prieteni participă la un concus de matematică. Au avut de rezolvat 30 de exerciții și 20 de probleme. Fiecare rezolvare corectă a fost notată cu 5 puncte. Pentru o rezolvare greșită, pentru un exercițiu nerezolvat sau pentru o problemă nerezolvată se scad 2 puncte. Ajutați-l pe evaluator să completeze tabelul următor și stabiliți clasamentul:

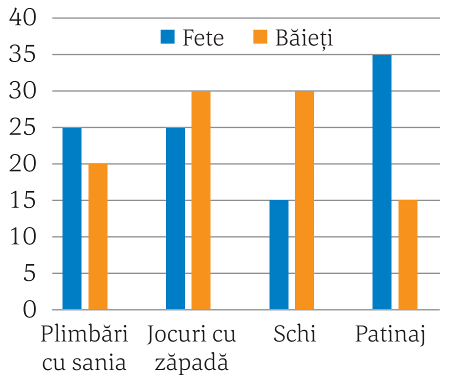
	Exerciții rezolvate corect	Exerciții nerezolvate sau greșite	Probleme rezolvate corect	Probleme nerezolvate sau greșite	Punctaj total
Pavel	25		13		
Sofia	26		15		
Carina	27		14		
Bogdan	28		16		
Ilinca	23		15		
Matei	24		14		

Locul I ....

Locul II ....

Locul III ....

4. Graficul alăturat indică numărul participanților la activitățile organizate într-o tabără. Citiți diagrama și rezolvați sarcinile date.



a) Completați textul următor cu informații extrase din grafic:

În tabăra de iarnă au fost organizate un număr de .... activități. Cei mai mulți copii, adică un număr de .... elevi au participat la .... Activitatea care a stârnit cel mai puțin interesul elevilor a fost .... Jocurile cu zăpadă au fost preferate de ...., care au fost în număr de .... La patinaj au participat cu .... mai multe fete decât băieți. Schiul a fost preferat de .... băieți și de .... fete.

b) Completați un tabel asemănător celui de mai jos, pe baza datelor oferite de diagramă:

	Plimbări cu sania	Jocuri cu zăpadă	Schi	Patinaj
Fete				
Băieți				

5. Mihnea a făcut stocul de animale existente în magazinul la care lucrează și a completat tabelul următor:

Pești	Păsări	Hamsteri	Pisici	Câini
75	32	16	8	7

a) Cu cât sunt mai mulți pești decât câini?
b) Cu cât sunt mai puține pisici decât păsări?
c) Care tipuri de animale sunt în același număr?
d) Ce tip de animale este majoritar în magazin?
e) Ce tip de animale este minoritar în magazin?
f) Câte animale sunt în total în magazin?
g) Realizați un grafic cu bare orizontale pentru datele din tabel.

6. Alexandru merge la librărie și face cumpărături. Ajuns acasă, completează următorul tabel în care notează ceea ce a cumpărat:

	Cantitatea	**Prețul/bucată**	**Costul**
Cărți	3	22,50 lei	
Albume de fotografii	5		45 lei
Pixuri		4 lei	16 lei
Creioane	10		9 lei
Caiete		2,50 lei	15 lei
Calendare	1	10,25 lei	
Penare	1	17,35 lei	
Cutii culori	2		11,80 lei
Seturi carioca	3		17,70 lei
TOTAL			

Ajutați-l pe Alexandru să completeze tot tabelul.

7. Realizați un studiu cu temperaturile zilnice înregistrate timp de o săptămână la orele 7, 14 și respectiv 20 (câte o linie în tabel pentru temperatura la fiecare oră).

a) Care este temperatura medie a săptămânii pentru fiecare oră studiată?
b) Care a fost cea mai călduroasă zi a săptămânii la ora 14?
c) Care este diferența cea mai mare dintre temperatura înregistrată în aceeași zi la ora 7 și la ora 20?
d) În care dintre zilele de luni și sâmbătă a fost mai cald la ora 7 și care a fost diferența dintre temperaturile înregistrate la acea oră?

Proiecte

Alegeți unul dintre proiectele de mai jos și pregătiți-l, în echipă, pentru a fi prezentat colegilor. Nu uitați să atașați proiectul în portofoliul personal.

1. Mergi la o fermă de animale și înregistrează într-un tabel câte animalele sunt din fiecare tip și, pentru fiecare dintre acestea, cantitatea de hrană zilnică. Realizează câte un grafic cu bare pentru fiecare rând din tabelul tău. Răspunde la următoarele întrebări:

a) Câte animale sunt în total?

b) Care este animalul cu frecvența cea mai mare? Dar cu frecvența cea mai mică?

c) Care este cantitatea de furaj consumată zilnic la fermă?

d) Care sunt produsele obținute zilnic de la animalele din fermă?

2. Realizează un studiu în școala ta și completează un tabel care pe prima linie să conțină fiecare tip de clasă (clasa pregătitoare, clasa I, ...), pe a doua linie numărul de elevi din fiecare nivel de clasă, iar pe liniile următoare numărul fetelor și numărul băieților din fiecare nivel de clasă. Realizează grafice care să reprezinte datele din tabel. Răspunde la următoarele întrebări:

a) Care este numărul total de elevi ai școlii?

b) Câți elevi sunt în ciclul primar? Dar în cel gimnazial?

c) Care este nivelul de clasă (toate clasele a V-a la un loc, de exemplu) cu frecvența cea mai mare?

d) Compară numărul fetelor cu cel al băieților, la nivelul școlii.

e) Care este valoarea medie a numărului de elevi pe an de studiu pentru elevii din ciclul primar? Dar din ciclul gimnazial?

3. Alege un oraș din țară pe care vrei să-l vizitezi. Caută pe internet 5 locuri de cazare în acest oraș și realizează un tabel în care să prezinți: numele hotelului, prețul unei camere de două persoane cu mic dejun, prețul unei camere de două persoane cu mic dejun și cină, prețul unei camere de trei persoane cu mic dejun, prețul unei camere de trei persoane cu mic dejun și cină, numărul de camere, numărul de camere cu frigider, parcare, acces cu animale. Realizează un grafic cu bare din care să se vadă numele hotelului și prețul unei camere de două persoane cu mic dejun. Răspunde la următoarele întrebări:

a) Care este cel mai ieftin hotel pentru cazare cu mic dejun?

b) Care este cel mai avantajos hotel pentru cazare cu mic dejun și cină?

c) Care hotel are toate camerele echipate cu frigider?

d) Dacă o familie cu trei membri dorește pentru 7 zile o cameră cu frigider și TV, ce hotel ar prefera? Ce sumă de bani ar trebui să pregătească pentru această vacanță?

4. Clasa a V-a vrea să organizeze o excursie pe traseul București – Sibiu (o noapte cazare) – Brașov (o noapte cazare) – București. Realizează o hartă a traseului.

a) După plecarea din București spre Sibiu, prima oprire pentru vizită va fi în orașul aflat la aproximativ trei șeptimi din traseul primei zile. Caută pe hartă orașul și prezintă colegilor ce se poate vizita în el.

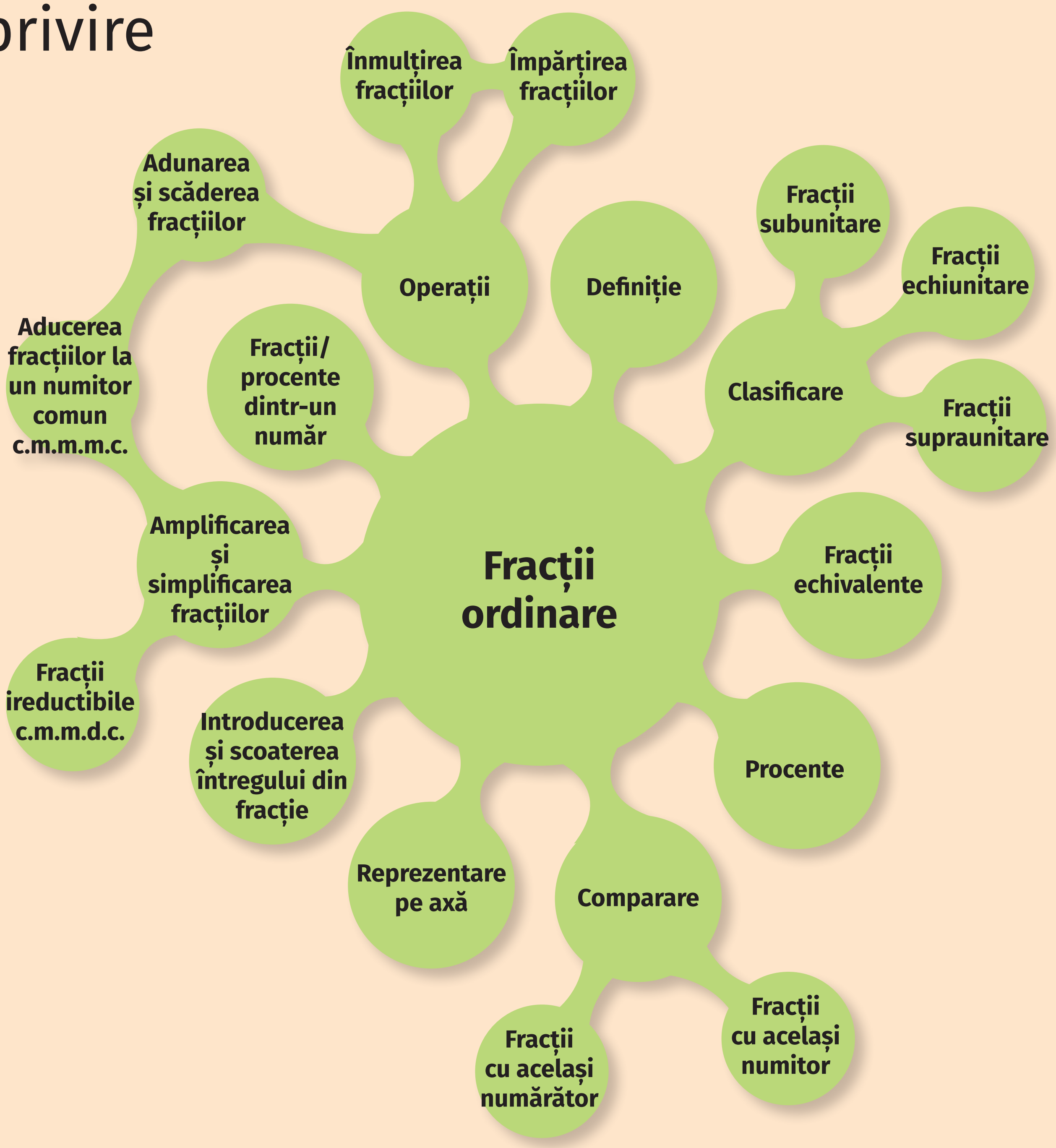
b) După aproximativ jumătate din numărul de kilometri deja parcurși va fi a doua oprire. Caută pe hartă și acest oraș și prezintă colegilor ce se poate vizita aici.

c) După ce calculezi câți kilometri mai sunt până la Sibiu, prezintă colegilor posibilitățile de cazare pentru prima noapte și programul de vizite din Sibiu (desigur, și locul unde vor lua cina).

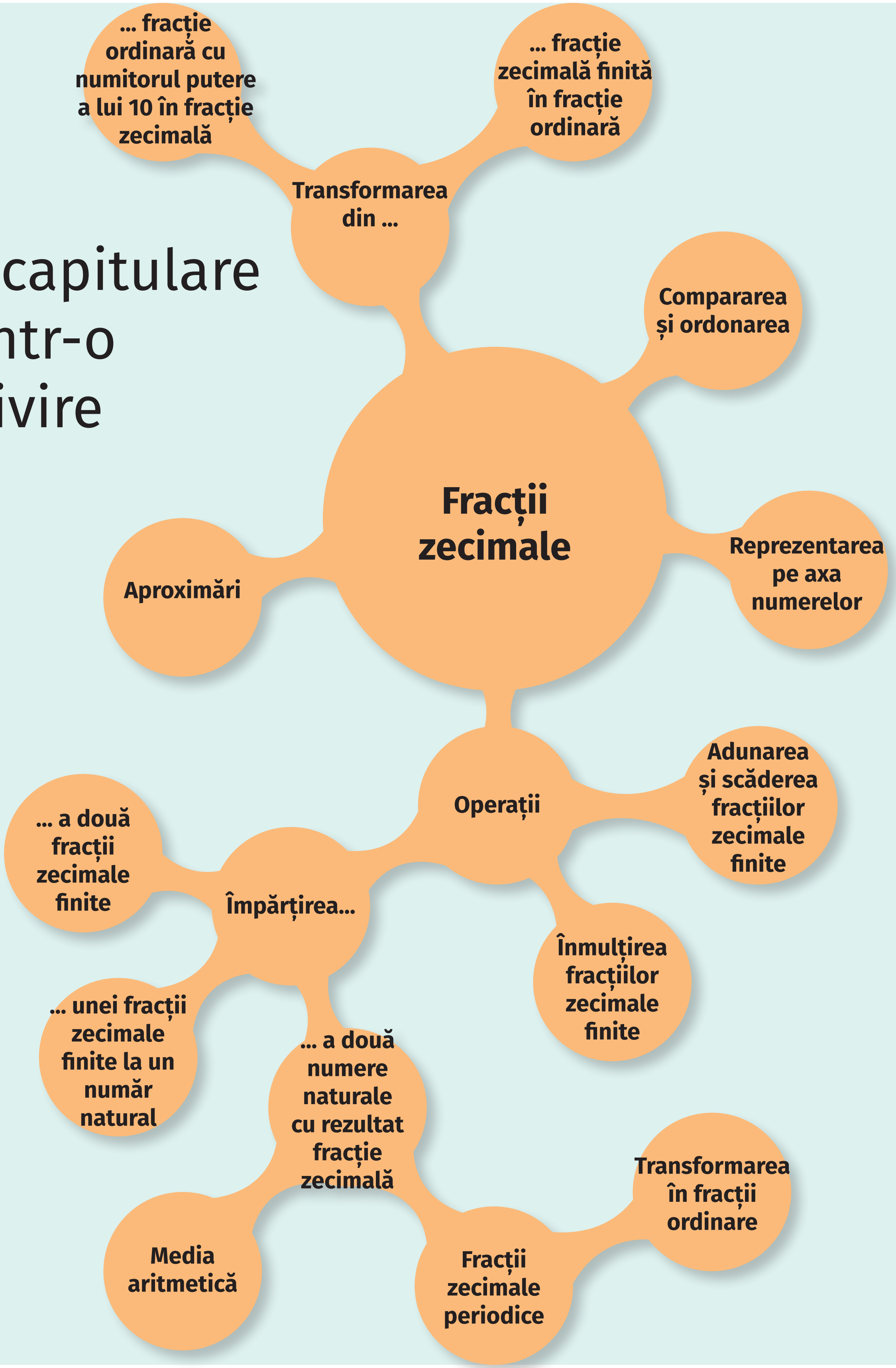
d) Organizează un program pentru dimineața celei de a doua zile de excursie până la ora 14, când va fi plecarea spre Brașov. Prezintă apoi posibilitățile de cazare la Brașov și programul de vizită.

e) În a treia zi veți mai opri în drum spre București, la aproximativ 60 km de Brașov. Prezintă colegilor ce veți vizita aici. În drumul spre București strânge impresiile de călătorie.

Recapitulare dintr-o privire



Recapitulare dintr-o privire



3

ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

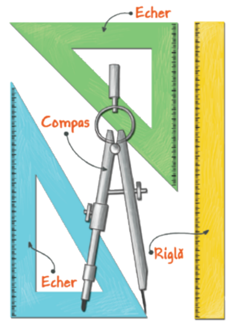
ELEMENTE DE GEOMETRIE

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Elemente de geometrie

Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment

Andrei: Ana, am găsit în cartea despre istoria matematicii că termenul *geometrie* provine din limba greacă: *geo* care înseamnă *pământ* și *metria* (*metron*) care înseamnă *măsură*. *Geometria* a apărut cu multe mii de ani în urmă. Egiptenii și caldeenii descoperiseră reguli practice pentru măsurarea ariilor și volumelor, iar în Grecia antică aceasta a fost dezvoltată foarte mult de către Thales, Pitagora și Euclid.



Ana: Seamănă oarecum cu ce ne-a spus domnul profesor la Geografie: cuvântul *geografie* provine de la *geo* – *pământ* și *grafie* – *a scrie*, sau, cum spunea dânsul, *a descrie pământul*.

Andrei: Știi că am învățat și în clasa a IV-a despre punct, dreaptă, plan, segment, am desenat triunghiuri, pătrate, cercuri...

Ana: Doamna învățătoare ne-a spus că se numesc *figuri geometrice* și că trebuie să le desenăm cu instrumente geometrice – riglă, echer, compas.

Reținem

Punctul, dreapta și planul sunt elementele fundamentale ale geometriei.

➔ *Punctul* poate fi descris ca fiind *urma lăsată pe hârtie de vârful unui creion foarte bine ascuțit* sau *ca înțepătura unui vârf de ac*.

✓ Nu are dimensiune – nu este mai mare sau mai mic, mai subțire sau mai gros.

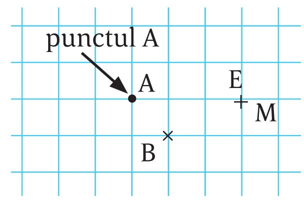
✓ Se reprezintă prin desen în diverse moduri (• sau × sau + ...).

✓ Se notează cu litere mari de tipar.

✓ *Toate figurile geometrice sunt formate din puncte.*

Cuvântul *punct* provine din limba latină: *punctum* – înțepătură, punct.

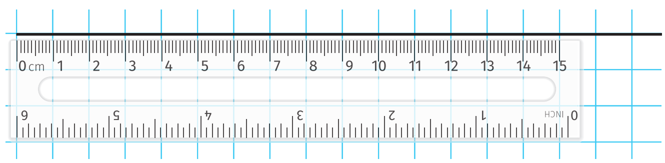
✓ În figură:



■ punctele A și B sunt diferite sau distincte: $A \neq B$.

■ punctele E și M sunt identice sau confundate (ocupă același loc, adică coincid): $E = M$.

Exemple. Priviți în jurul vostru și identificați puncte: colțul camerei, colțul tablei, cuiul în care este agățată stema sau harta, o piatră din curtea școlii privită de la fereastră...



➔ Despre *dreaptă* putem spune că este ca un fir de ață foarte subțire și foarte bine întins, nemărginit și într-o parte și în cealaltă.

✓ Nu are grosime.

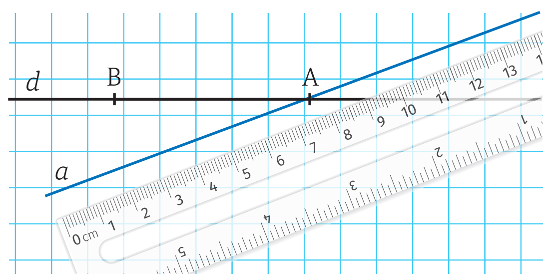
✓ Reprezentarea ei prin desen se face cu ajutorul riglei – reprezentăm o parte.

✓ Se notează cu o literă mică sau poate fi notată cu ajutorul a două puncte distincte de pe ea.

✓ În figura alăturată:

■ prin punctul A am desenat dreptele a și d;

■ dreapta d mai poate fi notată și dreapta AB sau BA (scriem $d = AB$).

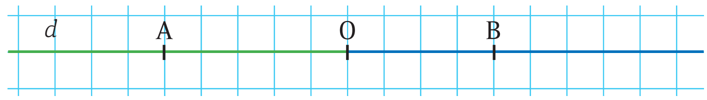


Exemple. Marginea trotuarului pe care veniți la școală, dunga care delimitează cele două direcții de mers ale străzii, șina de cale ferată – pot fi considerate reprezentări ale dreptei.

➔ *Semidreapta* este o porțiune dintr-o dreaptă, mărginită la un capăt și nelimitată la celălalt capăt. Capătul în care semidreapta este mărginită se numește *originea* semidreptei.

Două semidrepte care au aceeași origine, nu au puncte comune și sunt incluse în aceeași dreaptă (d) se numesc *semidrepte opuse*. Dreapta d se numește *dreapta suport a celor două semidrepte.*

✓ În figură:



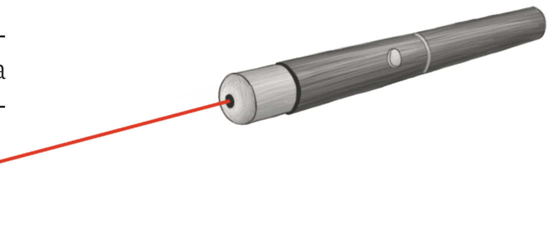
Punctul O determină pe dreapta d două semidrepte:

- semidreapta OA, cu originea în O și căreia îi aparține punctul A;
- semidreapta OB, cu originea în O și căreia îi aparține B.

Notăm OA sau (OA, paranteza rotundă având rolul de a evidenția originea semidreptei.

Semidreptele (OA și (OB sunt semidrepte opuse, iar dreapta d este dreapta suport a lor.

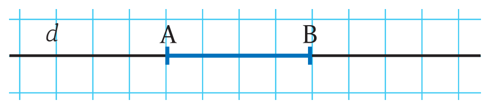
Exemple. Raza de lumină care *pleacă* dintr-o lanternă cu laser poate fi gândită ca o reprezentare a unei semidrepte (lanterna fiind *originea*). Umbra unui stâlp, unde baza stâlpului este originea, poate fi interpretată tot ca reprezentarea unei semidrepte.



➔ Fiind date două puncte distincte pe o dreaptă, porțiunea de pe dreaptă cuprinsă între ele se numește *segment de dreaptă* sau, pe scurt, *segment*.

Cele două puncte se numesc *extremitățile segmentului* sau *capetele segmentului*, iar d se numește *dreapta suport* a acestuia.

✓ În figură:



Punctele distincte A și B sunt situate pe dreapta d:

- notăm segmentul AB sau BA;
- A și B sunt extremitățile/capetele segmentului;
- d este dreapta suport a segmentului AB.

Cuvântul *segment* provine din limba latină: *segmentum* – parte tăiată.

Cuvântul *extremitate* provine din limba latină: *extremus* – margine.

Exemple. Marginea caietului, a băncii, a tablei, un creion, o scobitoare pot fi considerate reprezentări ale unui segment.

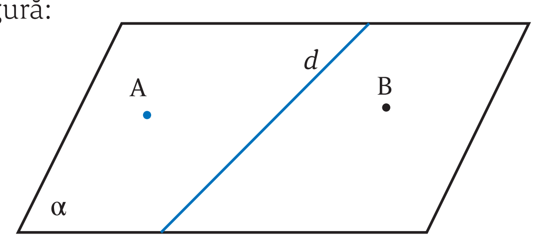
➔ *Planul* este altă noțiune fundamentală a geometriei. El este comparabil cu suprafața unui lac liniștit, cu suprafața unei foi de hârtie sau cu suprafața tablei din clasă, închipuindu-ne că acestea sunt prelungite la nesfârșit în toate părțile.

✓ Nu are grosime.

✓ Conține o infinitate de puncte dar, atunci când îl reprezentăm, desenăm doar o parte a lui.

✓ Se notează cu litere mici din alfabetul grecesc: α (alfa), β (beta), δ (delta), π (pi).

✓ În figură:



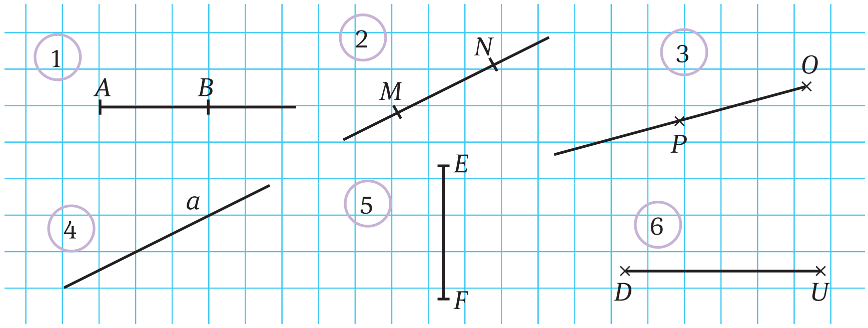
Dreapta d situată în planul α îl împarte în două regiuni numite *semiplane*:

- semiplanul din stânga dreptei d, notat (dA;
- semiplanul din dreapta dreptei d, notat (dB;
- dreapta d se numește *frontiera* semiplanelor.

Probleme propuse

•

1. Precizați care dintre desenele alăturate reprezintă:
a) o dreaptă;
b) o semidreaptă;
c) un segment.

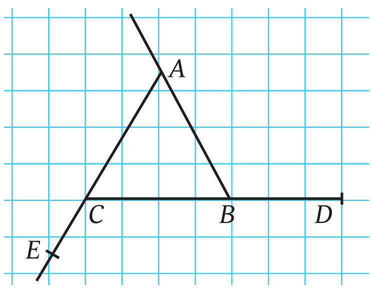


2. Desenați punctele *C* și *D* și dreapta *CD*.
a) Evidențiați pe desenul făcut, folosind o altă culoare, segmentul *CD*.
b) Desenați punctul *E*, pe dreapta *CD*, astfel încât *C* să fie situat pe semidreapta *DE*. Enumerați două semidrepte opuse de pe desen.

3. Desenați punctele *A* și *B* diferite. Desenați un punct *C*, $C \neq B$ în fiecare dintre următoarele situații:
a) $C \neq A$; b) $C = A$.

4. Pe o dreaptă *d* notați punctele *A*, *B* și *C*, în această ordine. Evidențiați pe desen, folosind culori diferite, semidreptele *BA* și *BC* și precizați ce fel de semidrepte sunt ele. Enumerați și alte semidrepte de pe desen.

5. Studiați desenul alăturat și completați tabelul. Dintre segmentele identificate precizați două cu aceeași dreaptă suport.

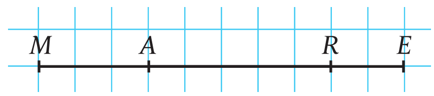


Puncte	Segmente	Semidrepte

••

6. Construiți și notați corespunzător următoarele figuri geometrice. Realizați desene diferite pentru fiecare dintre cerințe.
a) Segmentul *AB* și dreapta lui suport *a*.
b) Segmentele *AC* și *AD*, cu aceeași dreaptă suport.
c) Segmentele *BN* și *NT*, cu drepte suport diferite.
d) Semidreptele opuse (*VN* și (*VS*.
e) Semidreptele (*BC*, (*BT* și (*BV*.

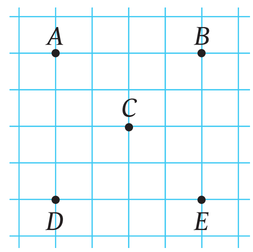
7. Numiți toate segmentele din figura următoare. Care dintre acestea conțin toate punctele situate între *A* și *R*?



Observație. Dacă numiți segmentul *MA*, nu-l mai precizați încă o dată numindu-l și *AM*!

8. Desenați un punct *O* și trei drepte care trec prin acesta. Câte semidrepte cu originea în *O* observați?

9. Reprezentați pe caiete punctele din desenul alăturat. Răspundeți la următoarele cerințe, folosind doar punctele desenate.



a) Identificați 10 segmente cu capete în câte 2 puncte din desen.
b) Enumerați 3 segmente cu aceeași dreaptă suport.
c) Enumerați 3 segmente care au un capăt comun. Puteți găsi 4 segmente cu un capăt comun?
d) Enumerați 2 semidrepte opuse și 2 semidrepte cu aceeași origine, dar care nu sunt opuse.
e) Precizați 2 semidrepte care să aibă partea comună un segment.
f) Precizați 2 segmente care nu au puncte comune.
g) Precizați 2 segmente care au un singur punct comun și acesta să nu fie o extremitate.

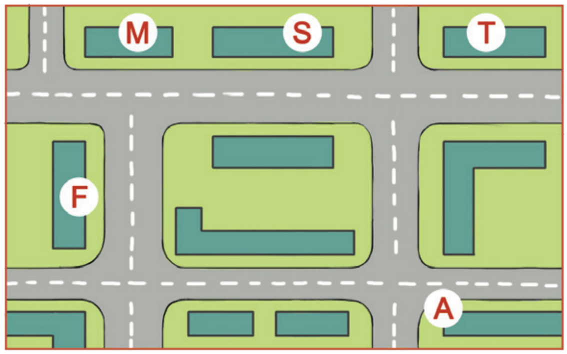
10. Desenați segmentele *AB*, *BC* și *CD* astfel încât punctele *A*, *B*, *C* și *D* să nu fie toate pe aceeași dreaptă, dar punctele *A*, *C* și *D* să fie pe aceeași dreaptă.

Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Pozițiile relative a două drepte

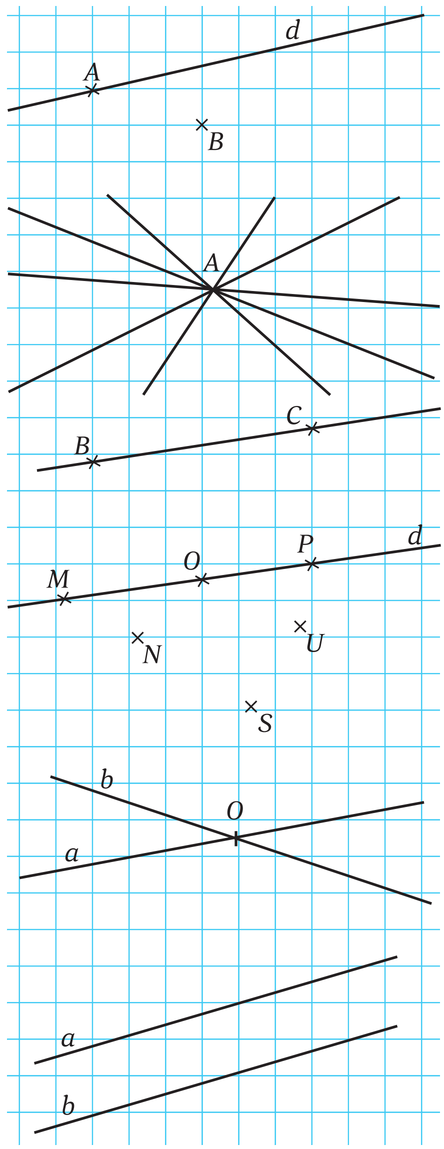
Ana și **A**ndrei au făcut o schiță a zonei în care locuiesc și au marcat pe ea locuințele colegilor care stau mai aproape de ei.

Ana: Noi stăm la o intersecție de două străzi, iar pe strada pe care stă **F**lorin nu mai stă alt coleg.

Andrei: **M**ihai, **S**orina și **T**eodora stau pe aceeași stradă. Și observi că una din străzile pe care stăm noi este paralelă cu strada pe care stau ei?



Reținem



➔ Dacă un punct se află pe o dreaptă, spunem că *punctul aparține dreptei*. Mai spunem și că *dreapta trece prin punct*.

✓ *Punctul A aparține dreptei d (dreapta d trece prin punctul A).*

Dacă un punct nu aparține unei drepte spunem că el este *exterior* dreptei.

✓ *Punctul B este exterior dreptei d.*

➔ Printr-un punct trec o infinitate de drepte.

✓ *Prin punctul A sunt construite mai multe drepte.*

Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

✓ *Prin punctele distincte B și C este construită o singură dreaptă. Despre punctele B și C spunem că determină dreapta BC.*

➔ Trei sau mai multe puncte situate pe aceeași dreaptă se numesc puncte coliniare.

✓ *Punctele M, O și P sunt coliniare, fiind situate pe dreapta d.*

➔ Despre trei puncte care nu sunt situate pe aceeași dreaptă spunem că sunt puncte necoliniare.

✓ *Punctele N, U și S nu sunt pe o aceeași dreaptă, deci sunt puncte necoliniare.*

➔ Două drepte care au un singur punct comun se numesc *drepte concurente*.

✓ *Dreptele a și b sunt concurete în punctul O. Mai spunem și că dreptele a și b se intersectează în punctul O, sau că dreapta a intersectează dreapta b în punctul O.*

➔ Două drepte care sunt în același plan și nu au niciun punct comun se numesc *drepte paralele*.

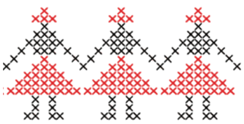
✓ *Dreptele a și b sunt paralele și notăm acest lucru* $a \parallel b$. *În clasele anterioare obișnuiați să spuneți că cele două drepte „nu se întâlnesc niciodată ...”.*

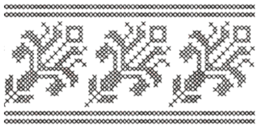
Proiect

Modele geometrice în tradiția populară

Formați echipe și căutați informații privind modelele geometrice folosite în tradiția populară a zonei în care locuiți. Puteți să faceți referire la modele întânite pe case, pe îmbrăcăminte sau pe vasele din ceramică.

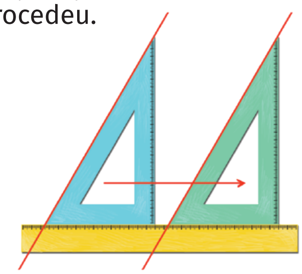
Pe o coală albă realizați un desen care să reproducă motivele tradiționale găsite. Puteți cere sprijinul profesorului de desen, al părinților sau al bunicilor voștri.





Activitate în echipe

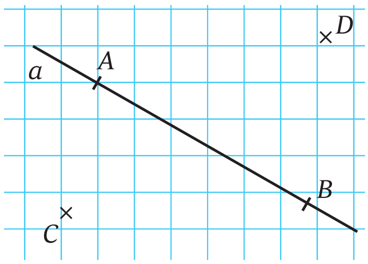
Observați imaginea de mai jos și discutați procedeul prin care au fost desenate cele două drepte paralele. Desenați și voi trei drepte paralele folosind acest procedeu.



Probleme propuse

•

1. Studiați desenul alăturat și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



a) Punctul A aparține dreptei a.

b) Punctul C aparține dreptei AB.

c) Punctul D este exterior dreptei a.

d) Există un punct care să aparțină și dreptei AB și dreptei CD.

2. Desenați trei puncte necoliniare și dreptele determinate de câte două dintre ele. Câte drepte ați obținut?

3. Desenați dreapta d, punctul A aparținând dreptei d și punctele B și C de o parte și de alta a acesteia.

a) Sunt dreptele d și BC concurente?

b) Realizați desenul astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare.

4. Desenați dreapta d, punctul A aparținând dreptei d și punctele B și C de aceeași parte a acesteia, în fiecare dintre următoarele situații:

a) Dreptele d și BC se intersectează într-un punct E, $E \neq A$.

b) Dreptele d și BC nu se intersectează.

b) Punctele A, B și C sunt coliniare.

5. Desenați punctele A, B, C și D astfel încât:

a) punctul A să aparțină dreptei BC;

b) punctele A, B și D să fie coliniare.

Ce puteți spune despre cele 4 puncte?

6. Completați, pe caiete, spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) Trei sau mai multe puncte situate pe aceeași dreaptă se numesc ....

b) Două drepte dintr-un plan care nu au niciun punct comun sunt ....

c) Două drepte cu un punct comun se numesc ......

d) Prin două puncte distincte trece ....

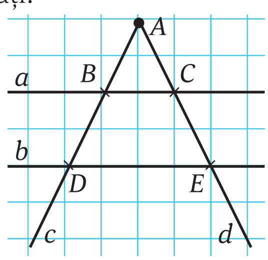
••

7. Punctele A, B și C sunt coliniare, iar B, C și D sunt necoliniare. Desenați și numiți toate dreptele diferite care se pot forma cu câte două dintre cele patru puncte.

8. Fiind date patru puncte, determinați numărul minim și numărul maxim de drepte determinate de câte două dintre ele.

Indicație. Studiați diverse posibilități de *așezare* a celor patru puncte (vedeți și problema anterioară).

9. Studiați desenul și precizați:



a) drepte paralele;

b) drepte concurente;

c) semidrepte concurente;

d) punctele de intersecție ale dreptei c cu dreptele a, respectiv b;

e) punctele de intersecție ale dreptei d cu dreptele a, b, respectiv c.

10. Andra a scris pe tablă următoarele litere:

EHMN

Marcați *liniile* paralele și *liniile* concurente din care sunt formate acestea.

Lungimea unui segment

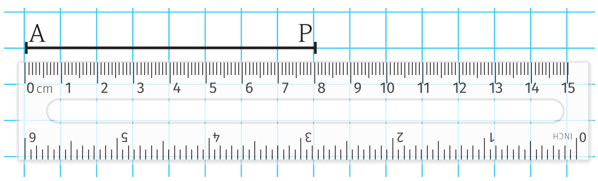
Andrei: Pentru a desena drepte, semidrepte, segmente folosim rigla. Doamna profesoară a spus că putem folosi rigla gradată sau rigla negradată când desenăm, dar atunci când vom măsura vom folosi doar rigla gradată.

Ana: Da, dar nu putem măsura decât segmente, pentru că dreapta este nemărginită în ambele părți, iar semidreapta este nemărginită în una dintre părți.

Reținem

✓ Distanța dintre două puncte reprezintă lungimea segmentului cu capetele în cele două puncte.

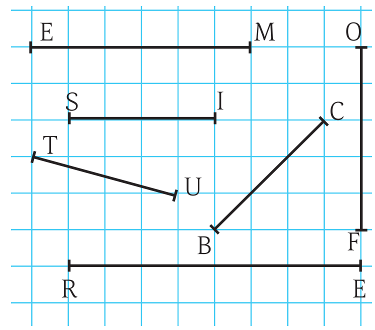
✓ Lungimea unui segment se determină prin măsurare și exprimarea rezultatului într-o unitate de măsură convenabilă.



Notăm AP = 8 cm și citim *segmentul AP are lungimea de 8 cm. Distanța dintre punctele A și P este de 8 cm.*

Activitate în echipe

Formați echipe și măsurați, cu o riglă gradată, fiecare dintre segmentele de mai jos, apoi completați tabelul. Ajutați colegii de echipă care nu-și amintesc cum se realizează aceste măsurători. Desenați apoi segmentele pe caiet, folosind lungimile măsurate.

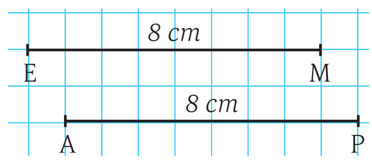


Segment	EM	SI	TU	BC	OF
Lungime (cm)					

Segmente congruente

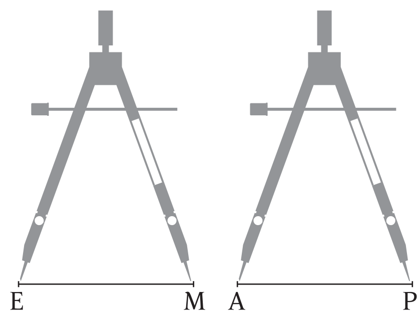
Două segmente care au aceeași lungime se numesc segmente *congruente*.

✓ *Segmentele AP și EM au aceeași lungime (8 cm), deci sunt congruente și notăm acest lucru AP* $\equiv$ *EM*.



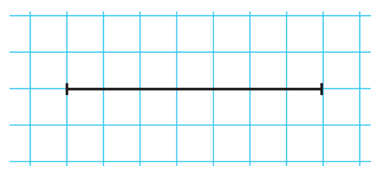
Probăm/justificăm congruența a două segmente:

- prin măsurarea lor *sau*
- cu un compas, cu ajutorul căruia putem *evalua* dacă au aceeași lungime: deschidem compasul astfel încât vârfurile sale să fie în capetele unuia dintre segmente și, păstrând neschimbată deschiderea, verificăm dacă celălalt segment „intră complet” în deschiderea compasului.

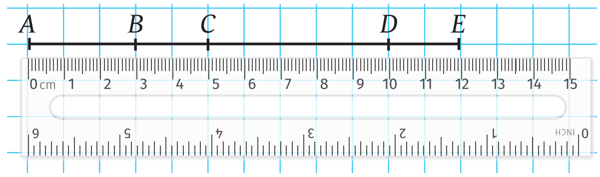


Activitate în echipe

Formați echipe de 4-5 elevi și discutați asupra celor două moduri prin care se poate justifica faptul că două segmente sunt congruente. Formulați metode prin care să construiți pe caiet un segment congruent cu segmentul alăturat. Discutați cu celelalte echipe și verificați dacă ați ajuns la aceleași concluzii.



Problemă rezolvată



Punctele A, B, C, D și E sunt situate pe dreapta d, de la stânga la dreapta, în această ordine. Se cunosc lungimile segmentelor: $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $CD = 5$ cm și $DE = 2$ cm.

a) Măsurați segmentele AC, BD și AE.

b) Justificați prin calcule lungimile segmentelor măsurate la punctul anterior.

c) Demonstrați congruențele: $AC \equiv CD$ și $BD \equiv CE$.

d) Ce puteți spune despre punctul C în contextul în care el aparține segmentului AD?

Rezolvare. a) $AC = 5$ cm, $BD = 7$ cm și $AE = 12$ cm;

b) Observăm că segmentul AC este format din segmentele AB și BC, deci putem calcula lungimea lui ca sumă a lungimilor celor două segmente: $AC = AB + BC = 3 + 2 = 5$ cm;
$BD = BC + CD = 2 + 5 = 7$ cm și $AE = AB + BC + CD + DE = 3 + 2 + 5 + 2 = 12$ cm;

c) $\left.\begin{array}{l} AC = 5\text{ cm} \\ CD = 5\text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow AC \equiv CD$ și $\left.\begin{array}{l} BD = 7\text{ cm} \\ CE = CD + DE = 5 + 2 = 7\text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow BD \equiv CE$;

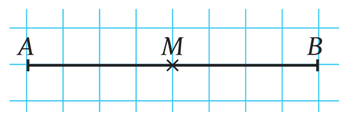
d) Punctul C formează cu capetele segmentului AD două segmente congruente ($AC \equiv CD$) sau, cu alte cuvinte, *punctul C împarte segmentul AD în două segmente congruente*.

Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

Reținem

✓ *Mijlocul* unui segment este punctul situat pe segment care formează cu capetele acestuia două segmente congruente.

M este mijlocul segmentului AB: $\begin{cases} M \text{ aparține segmentului} \\ AM \equiv MB \end{cases}$



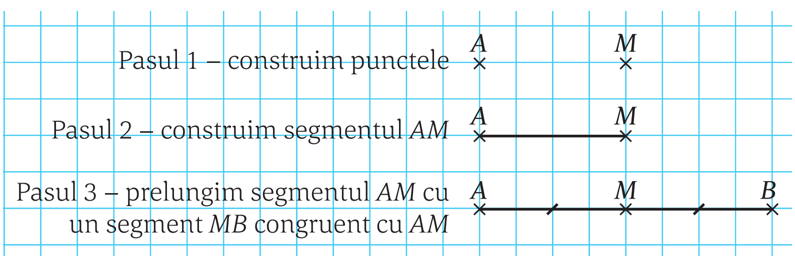
Spunem că M „împarte” segmentul în două segmente congruente.

Dacă M este mijlocul segmentului AB, spunem că *punctul B este simetricul punctului A față de punctul M*, dar și că *punctul A este simetricul punctului B față de punctul M*.

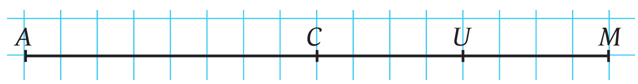
✓ *Simetricul* unui punct A față de un punct M este un punct B astfel încât M este mijlocul segmentului AB.

✓ Punctele A și B sunt *simetrice* față de punctul M.

Construcția simetricului punctului A față de punctul M urmează pașii alăturați:



Problemă rezolvată



Desenați punctele C și U astfel încât distanța dintre ele să fie de 4 cm. Construiți punctul M, simetricul punctului C față de punctul U, și punctul A, simetricul punctului M față de punctul C. Calculați lungimile segmentelor CM și AM

Rezolvare. C și M sunt simetrice față de punctul U, deci U este mijlocul segmentului CM;
$CU = UM = 4$ cm, deci $CM = 8$ cm.
C este mijlocul segmentului AM, deci $AC = CM = 8$ cm și $AM = 16$ cm.

Probleme propuse

●

1. Desenați trei segmente, notați-le și apoi măsurați-le.

2. Măsurați lungimea creionului pe care îl folosiți acum. Desenați un segment cu lungimea egală cu cea a creionului.

3. Desenați punctele A și B astfel încât distanța dintre ele să fie de 5 cm. Desenați punctul C, coliniar cu cele două puncte, situat la 5 cm de punctul A.

4. Punctele D, E și F sunt coliniare, în această ordine. Realizați câte un desen pentru fiecare dintre cerințele din tabelul următor și completați celulele necompletate ale acestuia.

	DE	EF	DF
a)	4 cm	5 cm	
b)	5 cm		12 cm
c)		4 cm	11 cm

5. Se consideră punctele coliniare M, N și P astfel încât $MN \equiv NP$ și $NP = 4,5$ cm. Calculați lungimea segmentului MP.

●●

6. Construiți segmentul CD, $CD = 7$ cm și segmentul CE, $CE \equiv CD$ în fiecare dintre situațiile:

a) punctele C, D și E sunt coliniare;

b) punctele C, D și E sunt necoliniare.

În care dintre cele două situații putem afirma că unul dintre puncte este mijlocul segmentului determinat de celelalte două?

7. Pe o dreaptă d considerăm punctele A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $CD = 3$ cm. Calculați lungimile segmentelor AC, AD și BD.

8. Punctele A, B și C sunt coliniare, $AB = 3,5$ cm și $BC = 6$ cm. Calculați AC, știind că ordinea punctelor pe dreaptă este: a) $A - B - C$; b) $B - A - C$.

9. Punctele M, N și P sunt situate pe dreapta d, astfel încât $MN = 5,8$ cm și $NP = 4,2$ cm. Calculați lungimea segmentului MP.

10. Punctul E este mijlocul segmentului MN. Calculați:

a) ME, știind că $MN = 13$ cm; b) MN, știind că $EN = 5$ cm; c) EN, știind că $ME = 8$ cm.

11. Punctele A și B sunt simetrice față de punctul O. Calculați lungimea segmentului AO, știind că $AB = 14,2$ cm.

●●●

12. Punctele O, A și B sunt situate pe o dreaptă a, în această ordine, astfel încât $OA = 6$ cm și $OB = 13$ cm. Calculați lungimea segmentului OM, unde M este mijlocul segmentului AB.

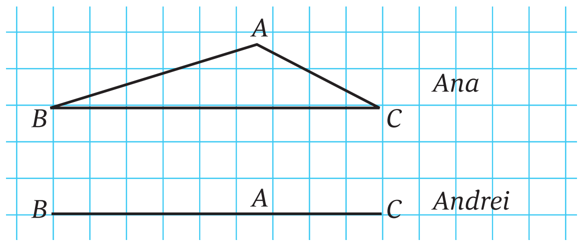
13. Considerăm punctele D și F astfel încât $DF = 3$ cm. Punctul A este simetricul punctului D față de punctul F, iar punctul B este simetricul punctului F față de punctul D.

a) Calculați lungimea segmentului AB.

b) Dacă E este mijlocul segmentului DF, arătați că punctele A și B sunt simetrice față de punctul E.

14. Punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, $AB = 4$ cm, $AC = 9$ cm și $AD = 13$ cm. Arătați că: a) $AC \equiv BD$; b) $AB = CD$.

Ana și Andrei au desenat punctele A, B și C și au măsurat segmentele determinate de acestea. Desenele lor sunt diferite: Ana a făcut punctele necoliniare, iar Andrei le-a făcut coliniare. Ana a constatat că $AB + AC > BC$, iar Andrei a obținut că $AB + AC = BC$.



În echipă cu un coleg din clasă verificați constatările lor.

Reținem

Punctele A, B și C sunt coliniare dacă are loc una dintre egalitățile: $AB + BC = AC$ sau $AB + AC = BC$ sau $AC + BC = AB$.

15. Punctele A, B și C sunt astfel încât $AB = 4,5$ cm, $BC = 5,3$ cm și $BC = 9,8$ cm. Arătați că cele 3 puncte sunt coliniare și stabiliți ordinea lor pe dreaptă.

16. Punctele M, N, O și P sunt astfel încât $MN = 3$ cm, $NO = 4$ cm, $MP = 2$ cm și $PO = 9$ cm. Arătați că cele 4 puncte sunt coliniare și stabiliți ordinea lor pe dreaptă.

Test de autoevaluare

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

Subiectul I. *Studiați desenul alăturat pentru a completa spațiile punctate:*

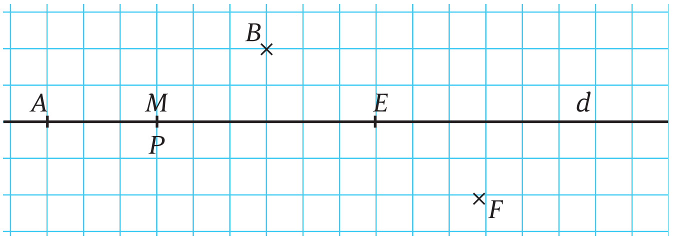
1. Punctele M și P sunt .... *5 puncte*

2. Punctele A și B sunt .... *5 puncte*

3. Punctele A, M și E sunt ...... *5 puncte*

4. Punctul B .... dreptei d. *5 puncte*

5. Punctul E......... dreptei d. *5 puncte*



6. Punctele B și F sunt în .... diferite. *5 puncte*

Subiectul al II-lea. *Alegeți răspunsul corect:*

7. Dacă M este mijlocul segmentului AB, iar $AB = 12$ cm, atunci lungimea segmentului AM este egală cu:

a) 6 cm; b) 12 cm; c) 24 cm; d) 0 cm. *10 puncte*

8. Dacă punctele E, H și L sunt pe dreapta a, E fiind între H și L, $HE = 3$ cm și $EL = 5,5$ cm, atunci lungimea segmentului HL este egală cu:

a) 2,5 cm; b) 3 cm; c) 5,5 cm; d) 8,5 cm. *10 puncte*

9. Punctele coliniare A, B și C sunt astfel încât $AB = 8$ cm, $BC = 3$ cm și $AC = 5$ cm. Ordinea lor este:

a) $A - B - C$; b) $A - C - B$; c) $B - A - C$; d) $C - B - A$. *10 puncte*

Subiectul al III-lea. *Scrieți rezolvările:*

10. Desenați trei puncte distincte și necoliniare A, B și C.
a) Construiți cu linie punctată segmentul AB și cu linie continuă semidreapta CB. *5 puncte*
b) Sunt CA și CB semidrepte opuse? Justificați răspunsul. *5 puncte*

11. Punctele coliniare B, C, D și E, în această ordine, sunt astfel încât $BC \equiv CD$, $BD \equiv DE$ și $BC = 3,5$ cm. Calculați lungimea segmentului BE. *10 puncte*

12. Desenați punctele coliniare M, N, P și R, în această ordine, știind că $MN = 3$ cm, $MP = 8$ cm și $MR = 11$ cm. Arătați că $MN \equiv PR$. *10 puncte*

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Mi-a plăcut în această unitate	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitit înainte și după test pentru a îmbunătăți

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Punctele diferite A și B împart dreapta a în trei părți. Colorați fiecare parte cu o altă culoare și precizați care este segment și care este semidreaptă.

2. Desenați dreptele a, b, c și d care se intersectează două câte două, dar nu se intersectează câte trei sau toate patru. Câte puncte de intersecție se obțin? Notați punctele de intersecție și precizați poziția lor față de dreapta a.

3. Desenați punctele coliniare M, N, S și T astfel încât M să fie între N și S, iar T între M și N.

4. Desenați punctele coliniare A, B, C și D, în această ordine, știind că $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AD = 13$ cm.
a) Calculați lungimile segmentelor CD, AC și BD.
b) Dacă O este mijlocul segmentului CD, arătați că $BC \equiv OD$.

5. Punctul A este situat pe segmentul BC. Calculați AB, știind că $AC = 2,5$ cm și $BC = 8$ cm.

6. Punctul A este situat pe dreapta BC, dar nu pe segmentul BC. Calculați AB știind că $AC = 2,5$ cm și $BC = 8$ cm.

7. Punctele coliniare A, D, M și P (în această ordine) sunt astfel încât $AP = 20$ cm, $AD \equiv DM$ și $AM \equiv MP$. Calculați lungimea segmentului AD.

8. Punctele A, B și C sunt coliniare, iar C este simetricul lui B față de A.
a) Stabiliți ordinea punctelor pe dreaptă.
b) Ce puteți spune despre punctul B?

9. Desenați segmentul CD, $CD = 4,4$ cm. Punctul E este simetricul lui C față de D, iar F este simetricul lui C față E. Calculați lungimea segmentului CF.

10. Punctul M este mijlocul segmentului AB, $AB = 8$ cm. Punctul C este situat pe semidreapta MA, iar D este situat pe semidreapta MB, dar niciunul dintre ele nu este pe segmentul AB. Știind că $AC = 2$ cm și $AD = 10$ cm, justificați faptul că M este mijlocul segmentului CD.

Să ne jucăm

Karting pe hârtie

Regulile jocului: Concurenții avansează pe rând, iar deplasarea se face dintr-un nod în altul astfel: căutăm simetricul penultimei poziții (A) față de ultima poziție (B). Găsim astfel punctul A' și putem să rămânem acolo sau putem alege oricare dintre cele 8 puncte care îl înconjoară (punctele negre din *Figura 2*). Nu putem să ne plasăm pe o poziție ocupată de un concurent. Dacă ieșim din traseu, trebuie reluată *cursa*. Câștigă primul care termină traseul. Putem începe cursa cu o pătrățică, două sau trei (depinde de mărimea traseului, dar aveți grijă să nu ***ieșiți în decor***). În *Figura 1* este un exemplu cu două ***kartinguri*** și cu modul în care au început ele cursa. Desenați și voi un traseu pe o foaie de ***matematică*** și ... ***cel mai bun să câștige!***

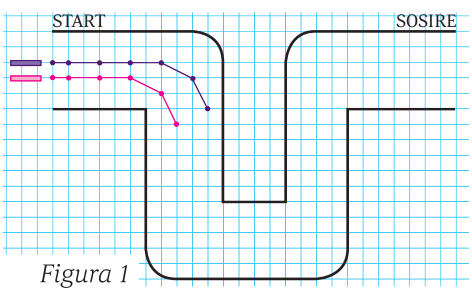


Figura 1

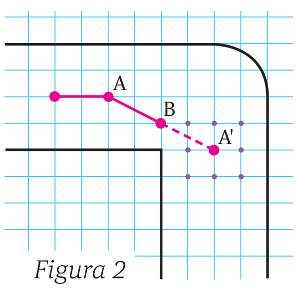


Figura 2

Unghiul

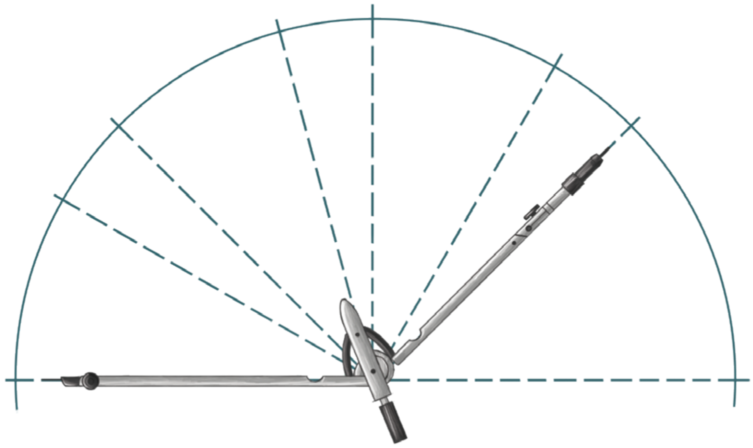
Ana și Andrei și-au terminat temele și fac ordine pe birou. În timp ce așează instrumentele geometrice utilizate la locul lor, observă compasul semideschis.

Ana: Andrei, uite, compasul așa deschis seamănă cu un unghi!

Andrei pune mâna pe brațele compasului și, cu o mișcare scurtă, îl închide.

Andrei: Acum mai seamănă cu un unghi? Pare cam mic.

Ana apucă și ea brațele compasului și-l deschide la maxim.



Ana: Și acesta pare cam mare, parcă laturile compasului au format o dreaptă.

Reținem

✓ Figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine se numește *unghi*. Cele două semidrepte care formează unghiul se numesc *laturile unghiului*, iar originea lor comună se numește *vârf*.

Exemplu.

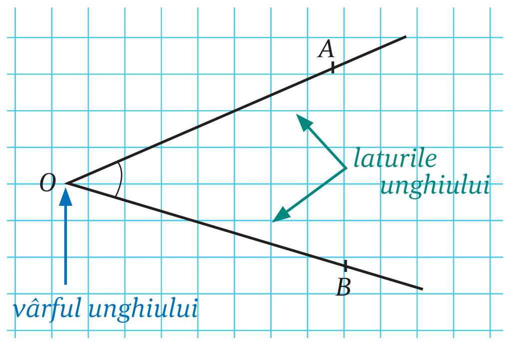
Pentru unghiul din figura alăturată:

• semidreptele OA și OB sunt laturile unghiului;

• O este vârful unghiului;

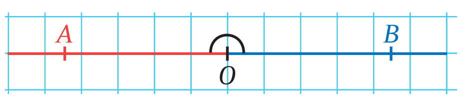
• notăm folosind simbolul ∢ urmat de una sau trei litere, sau ⌢ deasupra unei litere sau a trei litere:

- $\sphericalangle O$ sau $\widehat{O}$, folosind o singură literă – cea din vârf; citim *unghiul O*;
- $\sphericalangle AOB$ sau $\widehat{AOB}$, folosind trei litere – cea din mijloc este vârful (putem nota și $\sphericalangle BOA$ sau $\widehat{BOA}$); citim *unghiul AOB* sau *unghiul BOA*.



Reținem

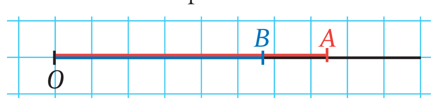
✓ Unghiul *alungit* este unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte opuse. Unghiul alungit se mai numește *unghi cu laturile în prelungire*.



• *$\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit*;

• semidreptele OA și OB formează dreapta AB.

✓ Unghiul *nul* este unghiul ale cărui laturi se suprapun. Cele două semidrepte care formează un unghi nul sunt semidrepte identice.



• *$\sphericalangle AOB$ este unghi nul*;

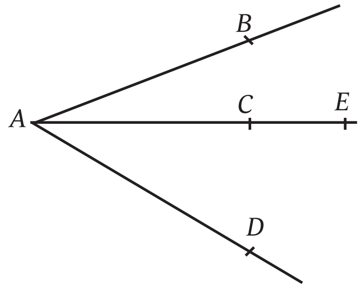
• semidreptele OA și OB sunt suprapuse sau identice.

✓ *Trei puncte A, O și B pentru care $\sphericalangle AOB$ este alungit sau nul sunt coliniare.*

✓ Un unghi care nu este nici nul și nici alungit se numește *unghi propriu*.

Exemplu.

- Figura alăturată conține mai multe unghiuri cu vârful A:
  - $\sphericalangle BAC$, cu laturile AB și AC;
  - $\sphericalangle CAD$, cu laturile AC și AD;
  - $\sphericalangle BAD$, cu laturile AB și AD;
  - $\sphericalangle CAE$, unghi nul, cu laturile AC și AE suprapuse.



Notația $\sphericalangle A$ poate crea confuzie, nefiind clar la care dintre unghiuri ne referim.

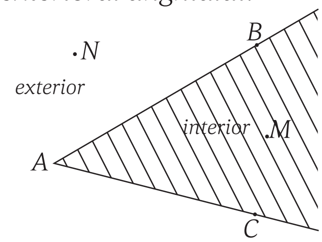
În figură se mai poate observa și un unghi alungit, $\sphericalangle ACE$, ale cărui laturi sunt semidreptele opuse CA și CE.

Reținem

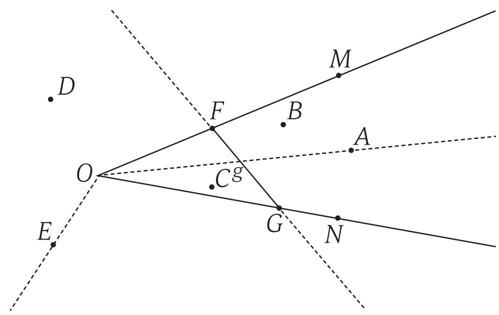
✓ Un unghi delimitează două regiuni ale planului, *interiorul unghiului* și *exteriorul unghiului*.

Exemple.

- Pentru $\sphericalangle BAC$ din figura alăturată:
  - punctele B și C se află pe laturile unghiului;
  - punctul M este în *interiorul unghiului*;
  - punctul N este în *exteriorul unghiului*.



- Relativ la $\sphericalangle MON$ din figura alăturată avem:
  - punctele A, B, C se află în interiorul acestuia;
  - punctele D, E se află în exteriorul unghiului;
  - punctele F și G sunt pe laturile acestuia;
  - semidreapta OA se află în interiorul unghiului;
  - semidreapta OE se află în exteriorul unghiului;
  - dreapta FG are o parte conținută în interiorul unghiului, segmentul FG;
  - $\sphericalangle MON$ mai poate fi numit/notat $\sphericalangle FOG$ sau $\sphericalangle MOG$ sau $\sphericalangle FON$.



Probleme propuse

1. Completați, pe caiete, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

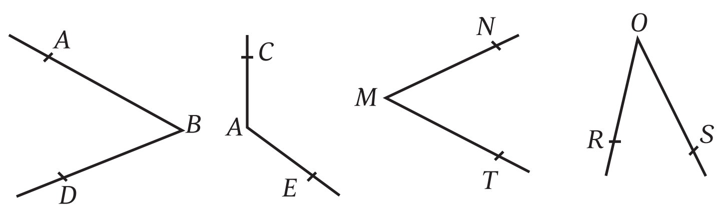
a) Unghiul este format din două ...... care au aceeași ....

b) Laturile unui unghi sunt ....

c) Vârful unghiului este ...... a celor două .... care formează unghiul.

2. Completați, pe caiet, tabelul următor, cu unghiurile și elementele acestora (conform modelului):

Unghi	Vârf	Laturi
$\sphericalangle ABD$	B	BA, BD



3. Considerăm semidreptele diferite *OA*, *OB* și *OC* astfel încât oricare două dintre ele să nu fie semidrepte opuse.

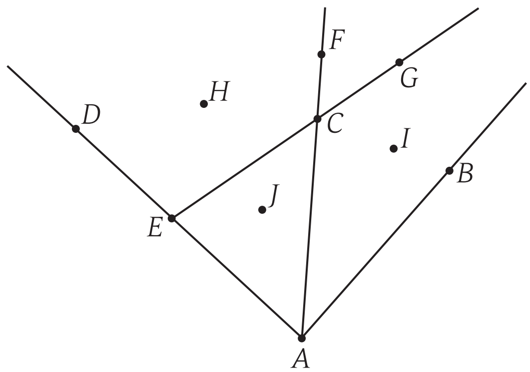
a) Câte unghiuri se pot forma având ca laturi aceste semidrepte?

b) Realizați un desen astfel încât interioarele unghiurilor formate (oricare două am considera) să nu aibă puncte comune.

c) Realizați un desen astfel încât unghiurile să aibă puncte interioare comune.

4. Studiați figura alăturată și identificați și numiți unghiurile nule și unghiurile alungite. Pentru unghiurile proprii din desen, completați (conform exemplului) tabelul următor pe caiet:

Unghiul	Puncte din interiorul unghiului	Puncte din exteriorul unghiului
∢*ECA*	*J*	*D, H, F, G, I, B*



5. Realizați câte un desen în fiecare dintre următoarele situații:

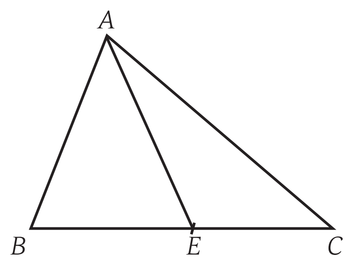
a) ∢*MNS*, punctele *A*, *E* și *X* în interiorul unghiului, punctele *B*, *C* și *T* în exteriorul unghiului, iar punctele *D* și *F* pe laturile unghiului;

b) unghiurile ∢*CBD* și ∢*FBE*, astfel încât ∢*CBD* să fie situat în întregime în interiorul ∢*FBE*;

c) unghiurile ∢*CBD* și ∢*FBE*, astfel încât ∢*CBD* să fie situat în întregime în exteriorul ∢*FBE*;

d) unghiurile ∢*CBD* și ∢*FBE*, astfel încât latura *BF* să fie în interiorul ∢*CBD*, iar latura *BE* să fie în exteriorul ∢*CBD*;

e) unghiurile ∢*CBD* și ∢*FBE*, astfel încât punctele *B*, *C* și *F* să fie coliniare.



6. Studiați figura alăturată și numiți:

a) trei unghiuri cu vârful în *A*;

b) un unghi nul cu vârful în *B*;

c) un unghi alungit;

d) unghiurile proprii cu vârful în *E*.

7. Desenați dreptele ***a*** și ***b*** care se intersectează în punctul ***O***. Pe dreapta ***a*** notați punctele ***A*** și ***B*** astfel încât ***O*** să fie între ele, iar pe dreapta ***b*** notați punctele ***M*** și ***N***, de o parte și de alta a punctului ***O***.

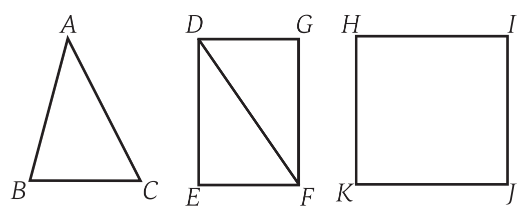
a) Numiți cinci unghiuri cu vârful în ***O***. Este printre ele și un unghi alungit?

b) Numiți un unghi cu vârful în ***A***. Ce fel de unghi este?

c) Numiți două unghiuri care să aibă latura ***OA*** comună.

d) Numiți două unghiuri care să aibă doar vârful ***O*** punct comun.

8. Identificați unghiurile din figurile alăturate, notați-le pe caiet și precizați în dreptul fiecăruia elementele.



Știați că?

- Cuvântul *unghi* provine din limba latină: *angulus* – *unghi* (anguli – colț).
- Cuvântul *latură* provine din limba latină: *latora, latus* – *margine*.

Măsura unui unghi

Andrei: Anul trecut spuneam la școală despre deschiderea unui unghi, adică despre deschiderea dintre laturile unghiului (cele două semidrepte care formează unghiul). Mă gândesc că, dacă am vrea să măsurăm ceva la un unghi, ar trebui să măsurăm această deschidere...

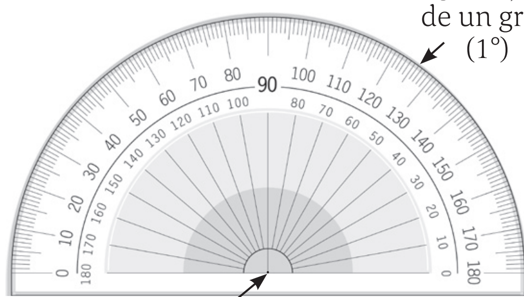
Ana: Și eu cred la fel, gândindu-mă că laturile unghiului sunt niște semidrepte, pe care nu le putem măsura, iar vârful nu are dimensiune. Dar cum măsurăm acea deschidere?

Reținem

✓ Unitatea de măsură folosită la măsurarea unghiurilor este *unghiul de un grad* – scriem 1° și citim *un grad*.

✓ Măsura unui unghi se determină cu ajutorul unui instrument geometric numit *raportor*. Acesta reprezintă un semicerc (jumătate dintr-un cerc) al cărui contur rotund a fost împărțit în 180 de părți egale, fiecare reprezentând 1°.

✓ Unghiul de un grad (1°) se poate împărți în 60 de diviziuni (părți egale), numite *minute* (sau *minute de arc*). Notăm 1' și citim *un minut*.



- 1°= 60'
- *Gradul* are ca submultiplu *minutul*.
- Datorită acestei împărțiri a gradului în 60 de minute, gradul se numește *grad sexagesimal*, dar, de obicei, i se spune, simplu, *grad*.

Știați că?

- *Sexagesimal* provine din latinescul *sexagesimus* – *al șaizecilea,* termen care se referă la împărțirea unui întreg în 60 de părți egale.

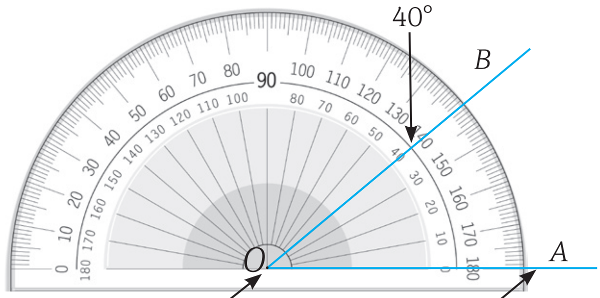
Măsurarea unui unghi cu ajutorul raportorului

Pentru a măsura ∢*AOB* procedăm astfel:

✓ așezăm raportorul astfel încât centrul acestuia să fie în vârful *O* al unghiului, iar una dintre laturi, în cazul nostru latura *OA*, să fie în dreptul diviziunii 0° a raportorului;

✓ citim pe gradațiile raportorului numărul de grade care se află în dreptul celeilalte laturi a unghiului, în cazul nostru în dreptul laturii *OB*;

✓ numărul citit reprezintă măsura unghiului.



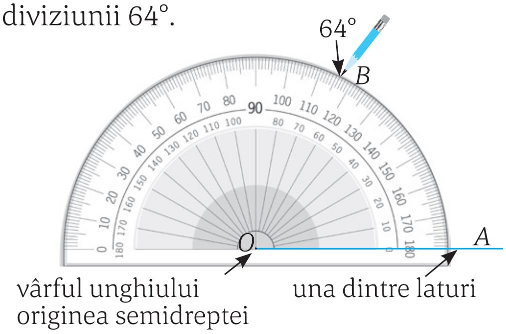
Notăm ∢*AOB* = 40° și citim *măsura unghiului AOB este egală cu* 40°.

Nu orice unghi are măsura un număr natural de grade sau un număr natural de grade și minute. Mai mult, datorită împărțirii gradului în 60 de diviziuni, este greu să măsurăm exact orice unghi. Din acest motiv, vom considera valorile determinate prin măsurare ca fiind aproximative.

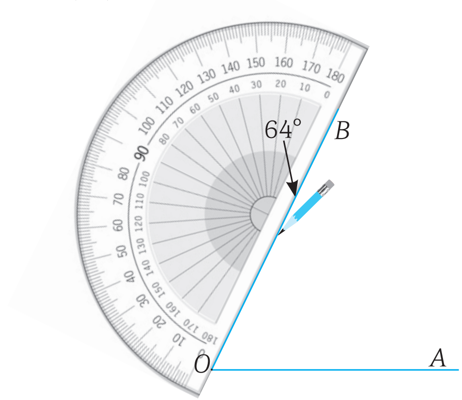
Construcția unui unghi cu măsura dată

Pentru a desena $\sphericalangle AOB$, știind că $\sphericalangle AOB = 64°$ (măsura unghiului AOB este de $64°$):

✓ începem prin a desena semidreapta OA;
✓ așezăm raportorul cu centrul în O și cu diviziunea $0°$ pe semidreapta desenată;
✓ cu ajutorul unui creion, marcăm punctul B în dreptul diviziunii $64°$.



✓ unim punctul O cu punctul B, punând astfel în evidență și latura OB a unghiului.



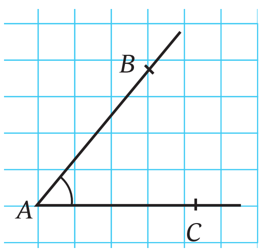
Atenție, se citește de la diviziunea $0°$ *spre* $64°$ *(pe acest desen, pe diviziunile din interior)*

Clasificarea unghiurilor

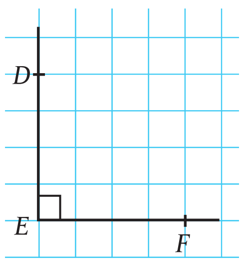
Andrei: Anul trecut am învățat că pentru a recunoaște un unghi drept folosim echerul. Dacă cele două laturi scurte ale echerului se suprapun peste laturile unghiului, acesta este un unghi drept.

Ana: Iar dacă un unghi are *deschiderea* mai mică decât a unui unghi drept, atunci este unghi ascuțit. Atunci când unghiul are *deschiderea* mai mare, este unghi obtuz.

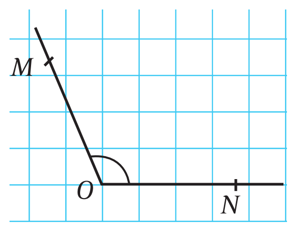
Reținem



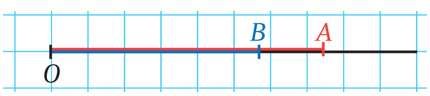
✓ Unghiul *ascuțit* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între $0°$ și $90°$; $0° < \sphericalangle BAC < 90°$.



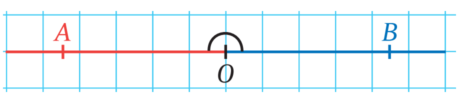
✓ Unghiul *drept* este unghiul a cărui măsură este egală cu $90°$; $\sphericalangle DEF = 90°$.



✓ Unghiul *obtuz* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între $90°$ și $180°$; $90° < \sphericalangle MON < 180°$.



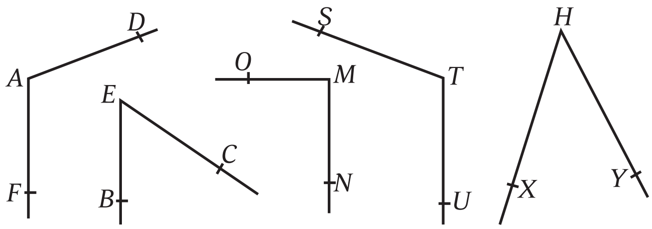
✓ Unghiul nul are măsura de $0°$; $\sphericalangle AOB = 0°$.



✓ Unghiul alungit are măsura de $180°$; $\sphericalangle AOB = 180°$.

Probleme propuse

1. Măsurați unghiurile alăturate și scrieți pe caiete măsurile lor. Scrieți în dreptul fiecărui unghi dacă este ascuțit, drept sau obtuz.



2. Desenați pe caiet două unghiuri, măsurați-le și scrieți în dreptul lor măsura.

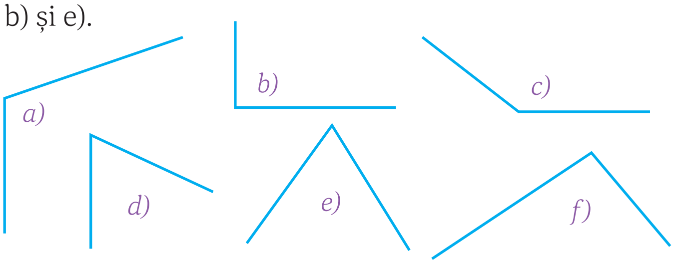
3. Desenați, cu ajutorul raportorului, unghiurile:
a) $\sphericalangle ABC = 30°$; b) $\sphericalangle OMS = 45°$;
c) $\sphericalangle STE$ unghi drept; d) $\sphericalangle UDN = 120°$;
e) $\sphericalangle VFP = 145°$; f) $\sphericalangle HIR$ unghi alungit.

4. $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle CBD$ au același vârf și latura comună $(BC$. Desenați cele două unghiuri și măsurați $\sphericalangle ABD$ în fiecare dintre cazurile:
a) $\sphericalangle ABC = 40°$, $\sphericalangle CBD = 80°$ și semidreapta BA este în interiorul $\sphericalangle DBC$.
b) $\sphericalangle ABC = 40°$, $\sphericalangle CBD = 80°$ și semidreapta BA este în exteriorul $\sphericalangle DBC$.
c) $\sphericalangle ABC = 150°$, $\sphericalangle CBD$ este unghi drept și $(BD$ este în interiorul $\sphericalangle ABC$.
d) $\sphericalangle ABC = 150°$, $\sphericalangle CBD$ este unghi drept și $(BD$ este în exteriorul $\sphericalangle ABC$.

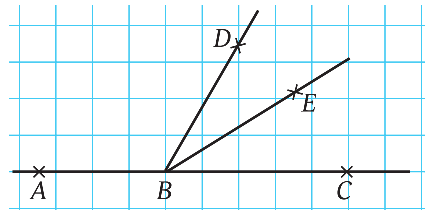
5. Considerăm unghiurile cu măsuri date: $\sphericalangle A = 28°$, $\sphericalangle C = 47°$, $\sphericalangle E = 90°$, $\sphericalangle F = 104°$, $\sphericalangle G = 0°$, $\sphericalangle H = 75°$, $\sphericalangle K = 8°15'$, $\sphericalangle M = 125°25'$, $\sphericalangle A_1 = 163°$, $\sphericalangle O = 180°$ și $\sphericalangle C_3 = 59°60'$. Completați pe caiet tabelul:

unghiuri nule	unghiuri ascuțite	unghiuri drepte	unghiuri obtuze	unghiuri alungite

6. Precizați ce fel de unghi este fiecare dintre următoarele. Desenați pe caiet câte un unghi care să aibă măsura egală cu măsurile unghiurilor de la a), b) și e).



7. Studiați figura de mai jos și asociați elementele din prima coloană cu elementele corespunzătoare din a doua coloană:



$\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle ABE$	unghi alungit
$\sphericalangle DBE$ și $\sphericalangle EBC$	unghiuri obtuze
$\sphericalangle ABC$	unghi nul
$\sphericalangle BCA$	unghiuri ascuțite

8. Desenați un unghi obtuz $\sphericalangle ABC$ și o semidreaptă BD astfel încât $\sphericalangle ABD$ să fie unghi drept. Realizați desenul și precizați ce fel de unghi este $\sphericalangle CBD$ în fiecare dintre cazurile:
a) semidreapta BD este situată în interiorul $\sphericalangle ABC$;
b) semidreapta BD este situată în exteriorul $\sphericalangle ABC$.

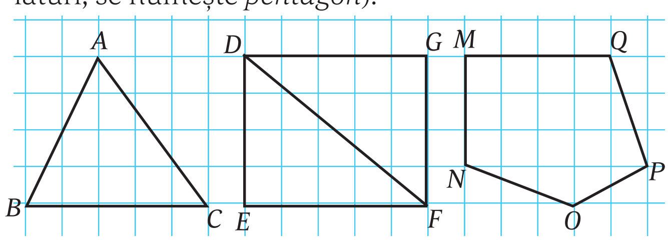
9. Desenați unghiul drept $\sphericalangle MNP$ și semidreapta NR astfel încât $\sphericalangle MNR = 30°$. Ce fel de unghi este $\sphericalangle PNR$?

10. Desenați $\sphericalangle EFG$ cu măsura de 50° și o semidreaptă FH astfel încât măsura $\sphericalangle EFH$ să fie de 40°. Ce fel de unghi este $\sphericalangle GFH$?

11. Desenați trei puncte coliniare A, B și C, în această ordine, și o semidreaptă BD. Precizați ce fel de unghi este $\sphericalangle ABD$ dacă $\sphericalangle DBC$ este ascuțit. Dar dacă $\sphericalangle DBC$ este obtuz sau drept?

12. Desenați un triunghi, măsurați unghiurile lui și adunați măsurile obținute. Comparați rezultatul cu cel al unui coleg. Verificați dacă rezultatul obținut se păstrează dacă desenați alt triunghi și repetați etapele problemei.

13. Identificați și măsurați unghiurile din figurile următoare (ultima figură din dreapta, cea cu cinci laturi, se numește *pentagon*).



Activitate practică

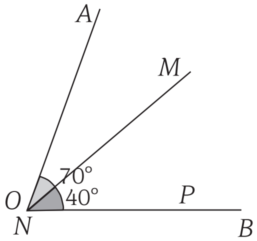
Pentru ora următoare desenați pe un carton și decupați două unghiuri: $\sphericalangle AOB = 70°$ și $\sphericalangle MNP = 40°$.

Calcule cu măsuri de unghiuri

Ana și Andrei au decupat cele două unghiuri cerute la finalul lecției anterioare și acum se joacă cu ele:

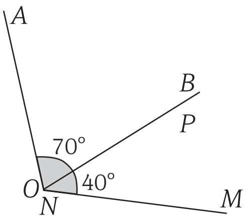
Ana: Am așezat unghiul cu măsura mai mică peste celălalt, astfel încât latura *NP* să coincidă cu latura *OB*. Aș putea acum să măsor ∢*AOM*, dar cred că pot să obțin măsura și efectuând scăderea 70° − 40° = 30°.

Verific totuși și prin măsurare.



Andrei: Eu am să așez cele două unghiuri unul lângă altul, dar tot ca la tine, latura *NP* să coincidă cu latura *OB*. La mine ∢*AOM* este obtuz și este egal cu suma 70° + 40° = 110°.

Se verifică și prin măsurare.



Reținem

✓ Cu măsurile unghiurilor se pot face operații de adunare și de scădere.

✓ Dacă măsurile unghiurilor sunt exprimate prin grade și minute, se adună (scad) între ele doar unități de același ordin: grade cu grade, respectiv minute cu minute, începând cu ordinul cel mai mic.

✓ Dacă la însumarea minutelor se depășesc 60 de unități, se transformă grupele de câte 60 de unități în grade, care se adună la gradele deja existente în sumă.

✓ La o scădere, dacă numărul de minute de la descăzut este mai mic decât cel de la scăzător se împrumută un grad din gradele de la descăzut, care se transformă în minute, acestea adăugându-se la cele existente, apoi se efectuează scăderea.

Exemple:

35° + 42° 77°	28°24' + 17°31' 45°55'	Adunăm minutele: 24' + 31' = 55' Adunăm gradele: 28° + 17° = 45°	58°47' + 24°32' 83°19'	În 47' + 32' = 79' transformăm 60' în 1° și mai rămân 79' – 60' = 19', pe care le scriem: *ținem minte* 1°. 58° + 24° = 82°, iar 82° + 1° (ținut minte) = 83°.
75° – 31° 44°	98°54' – 45°23' 53°31'	Scădem minutele: 54' – 23' = 31' Scădem gradele: 98° – 45° = 53°	108°38' – 72°54' 35°44'	Cele 38' de la descăzut sunt mai puține decât cele 54' de la scăzător. Împrumutăm un grad de la 108°; 1° = 60', 60' + 38' = 98'; 98' – 54' = 44'; 108° – 1° (împrumutat) = 107°; 107° – 72° = 35°.

Înmulțirea unei măsuri de unghi cu un număr natural:

32°14' · 4 = 128°56'	Înmulțim minutele cu 4: 14' · 4 = 56'. Înmulțim gradele cu 4: 32° · 4 = 128°.
22°31' · 5 = 112°35'	Înmulțind minutele cu 5 obținem 31' · 5 = 155' care depășesc 60', deci vom *extrage* 2° = 120' din ele: 155' – 120' = 35' și 120' = 2°. Înmulțim gradele cu 5 și obținem 22° · 5 = 110°, la care adăugăm cele 2° (ținute minte), adică 110° + 2° = 112°.

Împărțirea unei măsuri de unghi la un număr natural:

85°35’ : 5 = 17°5’	La împărțire începem din stânga, de la grade și obținem 85° : 5 = 17° Continuăm cu împărțirea minutelor, 35’ : 5 = 7’.
73° : 3 = 24°20’	73° : 3 = 24° rest 1°; transformăm gradul în minute 1° = 60’ și împărțim minutele obținute, 60’ : 3 = 20’.
107°10’ : 5 = 21°26’	107° : 5 = 21° rest 2°, 2° = 120’; 120’ + 10’ = 130’ și împărțim 130’ : 5 = 26’.

Probleme propuse

1. Calculați:

a) 40° + 50°; 108° + 72°; 90° – 30°; 180° – 50°;

b) 24°38’ + 17°18’; 44°30’ + 16°20’; 57°35’ + + 42°25’; 60°40’ + 50°50’;

c) 56°43’ – 21°18’; 70°52’ – 20°12’; 88°30’ – 43°50’; 90° – 32°30’;

d) 25° · 4; 30°20’ · 3; 90° : 3; 90° : 4.

2. Calculați din câte minute sunt formate:

a) 15°; b) 28°; c) 35°10’; d) 90°.

3. Calculați câte grade și minute formează:

a) 3600’; b) 1020’; c) 89°60’; d) 1530’.

4. Considerăm un unghi cu măsura de 160° pe care îl împărțim în 4 unghiuri congruente. Calculați măsurile acestora. Realizați desenul și determinați măsurile tuturor unghiurilor care se formează.

5. Suma măsurilor a două unghiuri este egală cu 75°, iar unul dintre ele are măsura dublă măsurii celuilalt. Calculați măsurile celor două unghiuri.

6. Calculați:

a) dublul unghiului cu măsura de 48°54’.

b) triplul unghiului cu măsura de 18°34’.

c) sfertul unghiului cu măsura de 158°32’.

d) 40% din unghiul cu măsura de 146°35’.

7. Fie unghiul *AOB* și (*OC* o semidreaptă interioară acestuia, astfel încât măsura unghiului *AOC* să fie de 3 ori mai mare decât cea a unghiului *BOC*. Dacă măsura unghiului *AOB* este de 60°, calculați măsurile unghiurilor *AOC* și *BOC*. Desenați unghiurile *AOC* și *BOC* și verificați pe desen măsura unghiului *AOB*.

8. Decupați din carton unghiuri cu măsurile de 10°, 20°, 30°, 40°, 50° și 60°, câte două de fiecare tip.

a) Formați cu ajutorul lor unghiuri cu măsura de 70°, 90°, 120°, 150°, 180°.

b) Puneți în evidență, cu ajutorul cartoanelor decupate, adunarea 10° + 40° = 50°. Realizați același lucru pentru alte grupe de câte trei cartoane.

Să ne jucăm

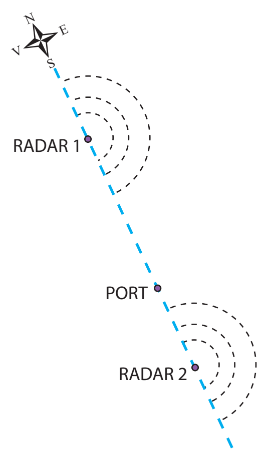
Ajută vaporul să ajungă în port

Un vapor este în derivă şi nu poate ajunge în port. Fiecare dintre cele două radare din desenul alăturat poate determina ***direcţia*** vaporului, adică poate măsura unghiul format de dreapta ce uneşte poziţia radarului cu poziţia vaporului cu dreapta imaginară care reprezintă direcţia N-S (Nord-Sud). Cele două radare fac câte două măsurători astfel:

• La prima măsurare, Radarul 1 ***vede*** vaporul sub un unghi cu măsura de 100°, iar Radarul 2 îl vede sub un unghi cu măsura de 40°.

• La a doua măsurare, după 5 minute, primul radar ***vede*** vaporul sub un unghi cu 30° mai mare, iar al doilea, cu 10° mai mare.

Realizaţi desenul pe caiet, folosind următoarele date: distanţa Radar 1 – Port este de 5 cm (5 km în realitate), distanţa Radar 2 – Port este de 3 cm (3 km în realitate). Folosind unghiurile determinate mai sus, găsiţi cele 2 poziţii ale vaporului şi spuneţi-i cum să-şi modifice deplasarea pentru a ajunge în port.

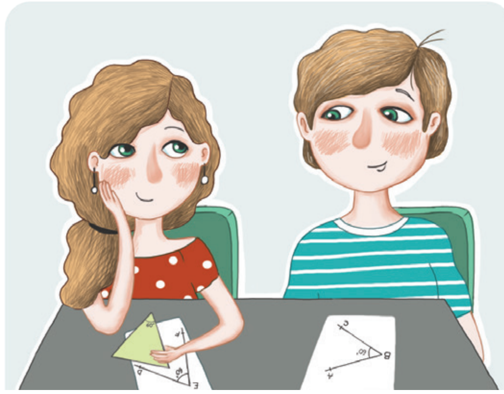


Unghiuri congruente

Andrei a desenat pe caiet un unghi cu măsura de 60° și l-a notat $\sphericalangle ABC$, iar Ana a desenat unghiul *DEF*, tot cu măsura de 60°.

Andrei: Ana, am suprapus peste unghiul meu cartonul tăiat în formă de unghi cu măsura de 60° pe care l-am făcut ora trecută. Observ că a intrat perfect în interiorul unghiului meu, iar conturul lui se suprapune cu laturile unghiului *ABC* desenat de mine.

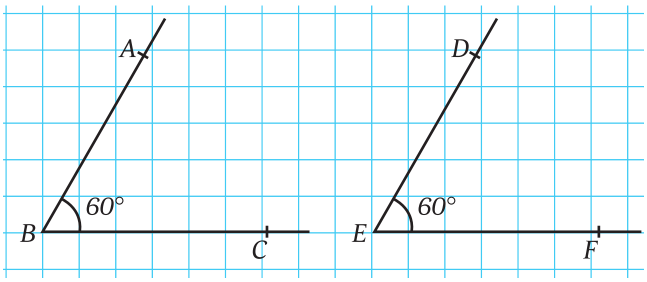
Ana: Dacă fac la fel pentru unghiul meu, *DEF*, se întâmplă același lucru. Deci, dacă am putea să o facem, unghiul meu s-ar suprapune perfect peste unghiul tau. Acest lucru pare normal să se întâmple pentru că, având aceeași măsură, au clar aceeași deschidere. Oare putem să spunem, ca la segmente, că sunt congruente?



Reținem

✓ Despre două figuri geometrice se spune că sunt *congruente* dacă pot fi făcute să coincidă una cu alta printr-o deplasare. Este ca și cum am suprapune cele două figuri și ele ar coincide.

✓ Două unghiuri sunt *congruente* dacă *au măsurile egale*.



$\sphericalangle ABC = 60° = \sphericalangle DEF$

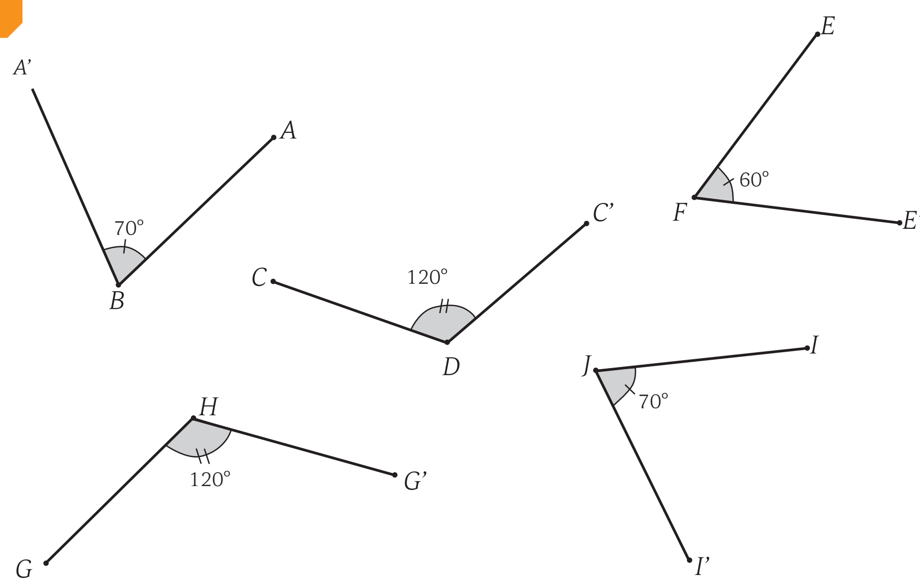
$\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DEF$ *au aceeași măsură*

$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$

citim *unghiul ABC este congruent cu unghiul DEF*

Probleme rezolvate

În figura alăturată sunt desenate 6 unghiuri, pe care sunt trecute și măsurile. Verificați dacă valorile măsurate sunt corecte. Identificați unghiurile congruente.

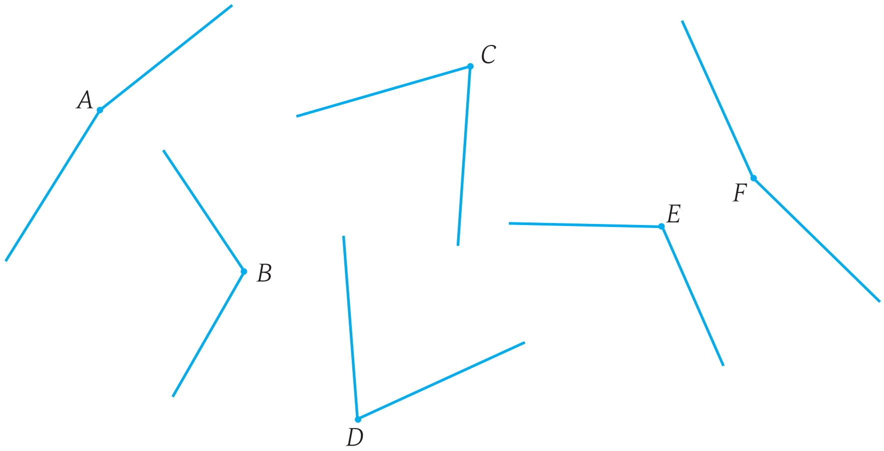


Rezolvare.

$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle J$; ambele au măsura de 70°; am evidențiat pe desen faptul că sunt congruente marcând arcele cu o liniuță.

$\sphericalangle D \equiv \sphericalangle H$; ambele au măsura de 120°; am evidențiat pe desen faptul că sunt congruente marcând arcele cu 2 liniuțe.

Probleme propuse

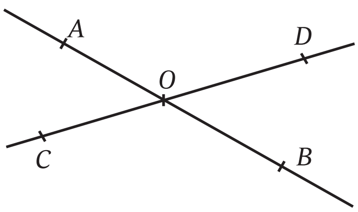


1. Identificați unghiurile congruente din figura alăturată. Scrieți, folosind simbolul de congruență, perechile de unghiuri congruente.

2. Folosind unghiurile din figura anterioară, construiți pe caiete unghiurile M, N și P astfel încât $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle C$.

3. Este adevărat că orice două unghiuri drepte sunt congruente? Justificați răspunsul.

4. În figura alăturată, punctele A, O și B sunt coliniare, respectiv C, O și D sunt coliniare. Măsurați unghiurile ascuțite din desen. Ce constatați? Puteți constata același lucru și pentru unghiurile obtuze?



5. Considerăm unghiul drept AOB și semidreapta OC, situată în interiorul unghiului, astfel încât $\sphericalangle AOC = 45°$. Demonstrați că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB$.

6. În interiorul unghiului MAN, cu măsura de $120°$, desenați semidreptele $(AB$ și $(AC$ astfel încât $\sphericalangle MAB = 30°$ și $\sphericalangle NAC = 30°$. Calculați măsura unghiului BAC și identificați unghiurile congruente din desen.

7. Desenați două segmente congruente AB și AC astfel încât $AB = 8$ cm și $\sphericalangle BAC = 70°$. Măsurați unghiurile ABC și ACB. Ce constatați?

8. Pe o foaie de hârtie desenați două segmente, AB și AC, astfel încât $AB = AC = 12$ cm, iar unghiul BAC să aibă măsura de $110°$. Construiți segmentul BC și decupați triunghiul ABC obținut. Îndoiți/pliați hârtia (adică triunghiul) astfel încât punctele B și C să se suprapună.

a) Ce constatați referitor la segmentele AB și AC? Justificați răspunsul.

b) Ce constatați referitor la unghiurile ABC și ACB?

c) Notăm cu M punctul de pe latura BC a triunghiului unde este îndoită hârtia.

i. Ce constatați referitor la segmentele BM și CM?

ii. Dar referitor la unghiurile BAM și CAM?

iii. Ce fel de unghiuri sunt $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle AMC$?

9. Desenați un dreptunghi $DEFG$ și segmentul DF (*diagonală* a dreptunghiului). Măsurați toate unghiurile formate și precizați perechile de unghiuri congruente.

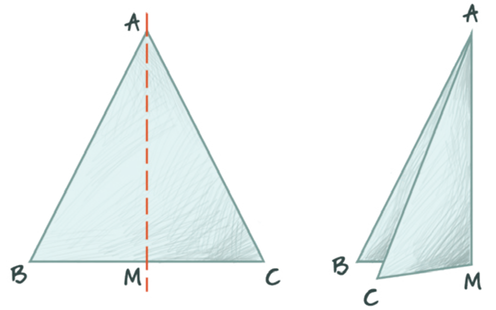
10. Pe o foaie de hârtie desenați un pătrat $BCDE$ cu latura de 15 cm, segmentele BD și CE (*diagonalele* pătratului) și notați cu O punctul lor de intersecție. Decupați pătratul și îndoiți-l după diagonala BD. Ce puteți spune despre punctele C și E și despre unghiurile C și E?

Desfaceți hârtia îndoită și mai îndoiți-o o dată după cealaltă diagonală, CE. Comparați cele 4 unghiuri care se formează în jurul punctului O.

Figuri congruente; axe de simetrie

Ana: Andrei, când am rezolvat problema 8 din tema de la lecția trecută și am îndoit acea hârtie în formă de triunghi am observat că segmentele *AB* și *AC* s-au suprapus perfect. Era de așteptat acest lucru, pentru că știam deja că au aceeași lungime, deci sunt congruente.

Andrei: La fel s-a întâmplat și pentru $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$ și țin minte că le-am și măsurat și aveau aceeași măsură, adică și ele erau congruente. Dacă ne uităm mai atent, observăm că, dacă îndoim foaia, triunghiul *AMB* se suprapune perfect peste triunghiul *AMC*.



Reținem

✓ Două figuri geometrice sunt *congruente* dacă, atunci când le suprapunem, ele coincid.

Atunci când două figuri sunt congruente am putea spune că fiecare dintre ele este copia celeilalte, doar că se află în locuri diferite.

✓ Spunem că o figură admite *axă de simetrie* dacă există o dreaptă ce împarte figura în două părți astfel încât, dacă îndoim/pliem figura după dreapta respectivă, cele două părți să se suprapună perfect.

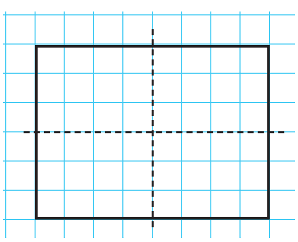
Dreapta după care se face îndoirea este *axa de simetrie* a figurii.

Cele două părți ale figurii sunt congruente și spunem despre ele că *sunt simetrice* una față de cealaltă în raport cu dreapta care este axa de simetrie.

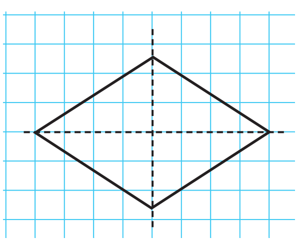
Simetria poate fi întâlnită în foarte multe lucruri din jurul nostru. Să ne gândim la simetria unei frunze, a unui fluture, a unei mașini, a unui avion sau chiar la simetria unei broderii din frumosul nostru port popular.

Probleme rezolvate

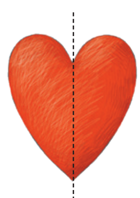
- Folosind pătratul din hârtie decupat pentru problema 10 din lecția anterioară, observați că cele două diagonale sunt axe de simetrie ale acestuia. Ce alte plieri puteți face pentru a obține și alte axe de simetrie? Ar trebui să găsiți patru axe de simetrie.
- Figuri/imagini cu axe de simetrie:



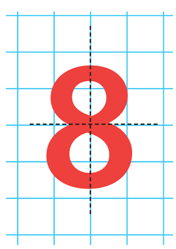
dreptunghiul are 2 axe de simetrie

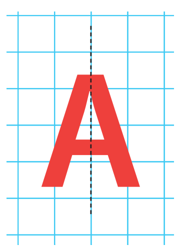


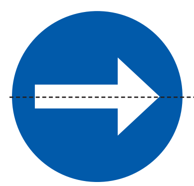
rombul are 2 axe de simetrie



o axă de simetrie







Activitate practică

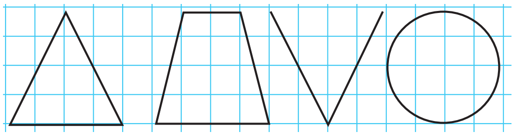
Luăm o foaie de hârtie pe care o împăturim în două și decupăm din ea un triunghi dreptunghic, așa cum arată figura. Să observăm ce se obține când o desfacem.

Luăm o altă foaie de hârtie pe care o împăturim în două și încă o dată în două și decupăm iar triunghiul.

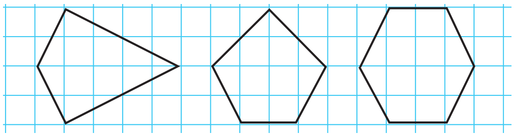
Repetăm procedeul cu încă o îndoire.

Probleme propuse

1. Construiți axele de simetrie pentru figurile:



2. Construiți axele de simetrie pentru figurile:



3. Alegeți dintre literele mari de tipar pe cele care au axe de simetrie și indicați care sunt acestea:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M,
N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

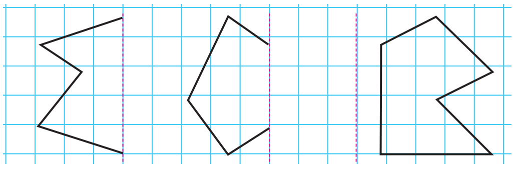
4. Scrieți cifrele care au axă de simetrie și desenați axele acestora. Scrieți două numere de două cifre astfel încât unul dintre ele să admită o axă de simetrie, iar celălalt să aibă două axe de simetrie.

5. Realizați activitatea practică cu foaia îndoită pentru a obține, atunci când o desfacem, 1 pătrat, 2 pătrate, 4 pătrate, 8 pătrate. Explicați de ce nu puteți obține 6 pătrate.

Confecționați ornamente folosind aceeași metodă.

6. În urma realizării activității de la problema anterioară ați rămas cu bucățile de hârtie decupate. Putem afirma despre ele că sunt congruente? Desenați axele lor de simetrie.

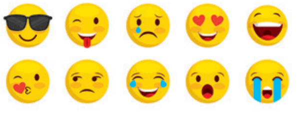
7. Desenați pe caiete imaginile alăturate și simetricele lor față de liniile punctate (folosiți rețeaua de pătrățele a caietului pentru a vă ghida).



8. Citiți cuvintele: AXA, POTOP, AERISIREA, MIM, CAZAC, COJOC, TIVIT, TOT de la coadă la cap! Ce legătură găsiți între aceste cuvinte și simetrie? Care dintre aceste cuvinte admit axă de simetrie?

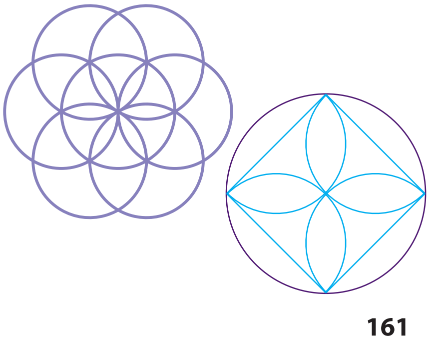
Observație. Palindrom – grup de cuvinte sau cuvânt care poate fi citit de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga fără să-și piardă sensul.

9. Care dintre emoticoanele alăturate admit o axă de simetrie?



Să ne jucăm

Vă place să desenați? Haideți să învățăm să desenăm mandale. Mandala este o diagramă alcătuită din mai multe cercuri, triunghiuri și pătrate combinate în fel și chip. După ce le desenați, colorați desenele cum vreți voi. Vă arătăm câteva desene și vă propunem să le colorați.



Test de autoevaluare

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru 35 de minute.

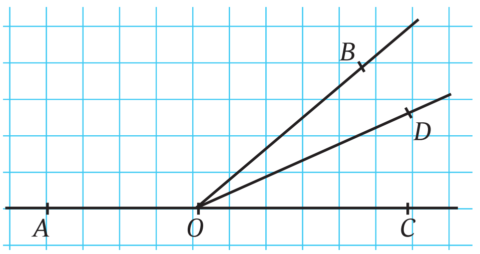
Problemele 1-4 se referă la desenul alăturat. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. $\sphericalangle AOB$ este un unghi:
a) nul; b) ascuțit; c) drept; d) obtuz. *1 punct*

2. Măsura $\sphericalangle BOC$ este egală cu:
a) 30°; b) 35°; c) 40°; d) 45°. *1 punct*

3. Punctul *D* este situat în interiorul unghiului:
a) $\sphericalangle DOC$; b) $\sphericalangle BOC$; c) $\sphericalangle AOB$; d) $\sphericalangle AOD$. *1 punct*

4. Numărul de unghiuri ascuțite din desen este egal cu:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4. *1 punct*



Scrieți rezolvările complete.

5. Calculați:

a) 45°25' + 30°30'; *0,5 puncte*

b) 90° − 25°30'. *0,5 puncte*

6. Desenați semidreptele *CM*, *CN* și *CL* astfel încât $\sphericalangle MCN = 120°$ și $\sphericalangle LCN = 30°$. Determinați ce fel de unghi este $\sphericalangle MCL$ (ascuțit, drept, obtuz), ținând cont de faptul că se pot realiza două desene diferite. *2 puncte*

7. Unghiurile $\sphericalangle FOG$, $\sphericalangle GOH$ și $\sphericalangle HOI$ sunt unghiuri congruente desenate astfel încât oricare două dintre ele să nu aibă puncte interioare comune și $\sphericalangle FOG = 30°$.

a) Justificați de ce este unghiul *FOI* unghi drept. *1 punct*

b) Arătați că $\sphericalangle FOH \equiv \sphericalangle GOI$. *1 punct*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Desenați și notați un unghi ascuțit, unul drept și unul obtuz. Măsurați și notați pe caiete măsurile lor.

2. Desenați unghiuri cu măsuri de: 40°, 70°, 100°, 135°.

3. Desenați $\sphericalangle AOB$ cu măsura de 120° și o semidreaptă *OC* în interiorul unghiului astfel încât $\sphericalangle BOC = 40°$. Determinați, prin măsurare și calcul, măsura unghiului $\sphericalangle AOC$. Rezolvați aceeași problemă în cazul în care semidreapta *OC* este în exteriorul unghiului.

4. Desenați trei semidrepte *AM*, *AN* și *AP* astfel încât $\sphericalangle MAN = 50°$ și $\sphericalangle NAP = 30°$. Determinați, prin măsurare și calcul, măsura $\sphericalangle MAP$.

5. Copiați și completați pe caiete tabelul:

$\sphericalangle A$	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle A + \sphericalangle B$	$\sphericalangle A - \sphericalangle B$	$3 \cdot \sphericalangle A$	$2 \cdot \sphericalangle B$	$3 \cdot \sphericalangle A - 2 \cdot \sphericalangle B$
35°	25°					
50°	40°					
30°40’	20°10’					

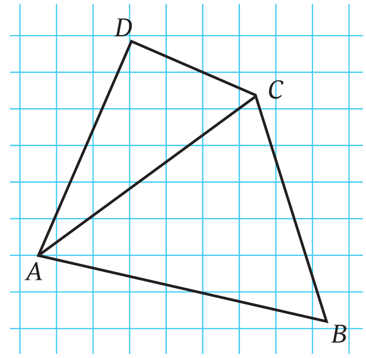
6. Desenați două unghiuri, $\sphericalangle AMB = 80°$ și $\sphericalangle AMC = 50°$, astfel încât să nu aibă puncte interioare comune. Deteminați măsura $\sphericalangle BMC$.

7. Rezolvați problema anterioară în cazul în care cele două unghiuri au puncte interioare comune.

8. Calculați măsurile a două unghiuri congruente știind că:

a) suma măsurilor lor este 48°;

b) suma dintre măsura unuia dintre unghiuri și dublul măsurii celuilalt este egală cu 120°.



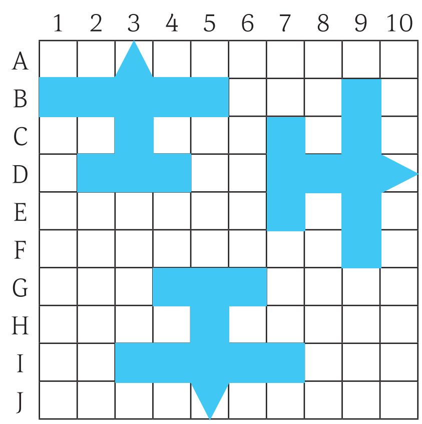
9. Unghiul BAC are măsura de 160°, iar M este un punct din interiorul acestuia astfel încât $\sphericalangle BAM = 20°$. Punctul N este în interiorul $\sphericalangle CAM$ astfel încât $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAC$. Arătați că $\sphericalangle BAN$ este un unghi drept.

10. Măsurați unghiurile din patrulaterul alăturat și din cele două triunghiuri din figura alăturată. Calculați suma măsurilor unghiurilor din fiecare dintre cele 3 figuri. Desenați pe caiet figura dublând lungimile laturilor măsurate din carte, folosind măsurile unghiurilor găsite.

Să ne jucăm

Avioane

Avioane este un joc la care pot participa doi sau mai mulți copii. Fiecare copil trasează pe o foaie de matematică (ce nu trebuie văzută de adversari) atâtea pătrate de 10 x 10 căsuțe câți participanți sunt la joc. Coloanele se notează cu cifre de la 1 la 10, iar liniile cu litere de la A la J (sau invers). În primul careu de pe foaia lui, fiecare copil desenează 3 avioane asemănătoare cu cele din figura alăturată, situate în diverse poziții. Avioanele au un cap (un triunghi), aripi cu lățimea totală de 5 căsuțe, apoi un corp de 1 căsuță și o coadă lată de 3 căsuțe. Cele 3 avioane nu trebuie să se suprapună și nici să depășească limita careului. Fiecare copil va avea un careu cu avioanele sale (pe care trebuie să le ghicească adversarii) și careuri goale (în care va încerca să ghicească cum sunt așezate avioanele fiecărui adversar). Scopul jocului este să identifici primul poziția avioanelor adversarilor. Pe rând, fiecare copil îl întreabă pe altul despre o căsuță (B5 să zicem). În funcție de ceea ce are la B5, adversarul îi răspunde: „Cap” – dacă a nimerit capul vreunui avion, „Corp” – dacă a nimerit restul avionului, „Aer” – dacă nu a nimerit niciun avion. Apoi rolurile se schimbă și tot așa. Pentru a descoperi avioanele adversarului, fiecare copil desenează în careul gol al acestuia ceea ce răspunde, până când găsește cele trei avioane.



UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări ale unităților de măsură

În 1875 s-a încheiat un acord numit „Convenția metrului” prin care s-a hotărât să se folosească metrul (m) ca unitate de măsură pentru lungime.

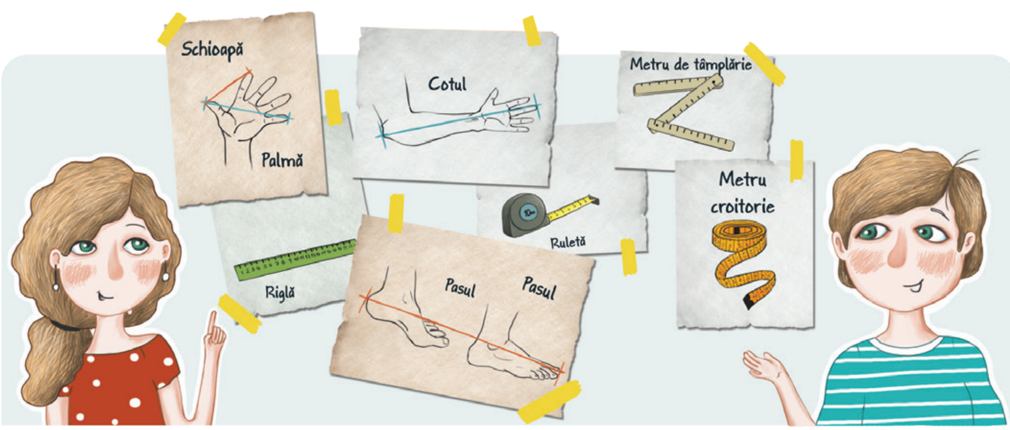
Submultiplii metrului		
Factor	Nume	Simbol
10^{-1}	decimetru	dm
10^{-2}	centimetru	cm
10^{-3}	milimetru	mm
10^{-6}	micrometru (micron)	µm
10^{-9}	nanometru	nm
10^{-12}	picometru	pm
10^{-15}	femtometru (fermi)	fm
10^{-18}	attometru	am
10^{-21}	zeptometru	zm
10^{-24}	yoctometru	ym

Multiplii metrului		
Factor	Nume	Simbol
10^{1}	decametru	dam
10^{2}	hectometru	hm
10^{3}	kilometru	km
10^{6}	megametru	Mm
10^{9}	gigametru	Gm
10^{12}	terametru	Tm
10^{15}	petametru	Pm
10^{18}	exametru	Em
10^{21}	zettametru	Zm
10^{24}	yottametru	Ym

Ana: Am învățat despre metru, multiplii și submultiplii lui, despre cum măsurăm segmente și cum calculăm perimetrul unor figuri geometrice.

Andrei: Am mai învățat și despre instrumente care ne ajută la măsurarea lungimilor. Pentru dimensiuni mici putem folosi rigla, șublerul, metrul de croitorie, metrul de tâmplărie, iar pentru dimensiuni mai mari, ruleta, lanțul (pentru distanțe foarte mari). Pentru măsurători cu precizie mare, am văzut la tata că folosește un telemetru cu laser.

Ana: Am găsit, căutând pe internet, că mai sunt și instrumente de măsură neconvenționale: degetul, cotul, palma, pasul, talpa, creionul. Dacă măsor lungimea caietului meu cu palma obțin două palme, dar văd că dacă măsori și tu, obții o palmă și trei sferturi. Asta pentru că palma ta este mai mare decât a mea. Pentru o măsurătoare exactă trebuie să ne măsurăm și palmele și vom găsi lungimea caietului.



Activitate practică

Măsurați și apoi completați, pe caiete, tabelul următor:

Obiectul	Lungimea unui creion	Lungimea băncii	Lățimea băncii	Înălțimea băncii	Lungimea manualului	Lățimea manualului	Distanța între prima bancă și catedră
Măsura							

După completarea tabelului, comparați măsurătorile cu cele ale colegilor. Calculați împreună perimetrul băncii.

Probleme rezolvate

- Transformați după model:

11,8 dam = 1180 dm	7112 dm = 0,7112 km	3000 mm = 0,3 dam	4823 cm = ... m
2,511 km = ... dam	0,01hm = ... m	2,18 dam = ... m	49 dm = ... m
1500 mm = ... m	0,151 km = ... m	321 dm = ... dam	170 m = ... dam

- Calculați, după model:

a) 0,271 m + 140 mm + 0,051 dam = 2,71 dm + 1,4 dm + 5,1 dm = 9,21 dm;
b) 4,23 km + 0,45 hm + 2710 dm = ... dam;
c) 1,034 hm + 452 cm + 0,21 dam = ... m.

Reținem

Pentru a ne face o imagine a multiplilor și submultiplilor metrului putem spune că:

✓ în kilometri se măsoară distanțele dintre localități;

✓ în hectometri și decametri se măsoară dimensiuni ale unor loturi de pământ, în agricultură;

✓ în decimetri și centimetri se măsoară obiecte din gospodărie, lungimi ale părților corpului uman;

✓ în milimetri se exprimă dimensiuni ale unor obiecte foarte mici (lungimi de șuruburi, de plăci, de jucării etc.)

Problemă rezolvată

Bunicul îl trimite pe Rareș să măsoare gardul curții, pentru că trebuie făcut unul nou. Curtea are forma de pătrat cu latura de 16 m. După măsurătoare, Rareș descoperă că lungimea gardului este de 64 m și că ar fi calculat mai ușor dacă s-ar fi gândit că fiecare latură a pătratului este de 16 m, așadar 16 m + 16 m + 16 m + 16 m = 64 m.

Activitate în perechi

Formați perechi și rezolvați cerința următoare. Comparați apoi răspunsurile cu cele ale celorlalte echipe.

Precizați care dintre enunțurile următoare este adevărat și care este fals:

- *Lungimea unei cărți se poate măsura în centimetri.*
- *Centimetrul este unitatea de măsură mai mare de 100 de ori decât metrul.*
- *Înălțimea unui munte se măsoară în decimetri.*
- *Înălțimea băncii se poate măsura cu ajutorul riglei.*
- *Decimetrul este unitatea de măsură mai mare de 10 ori decât metrul.*
- *Pentru a transforma o unitate de măsură mai mică în una mai mare se folosește operația de înmulțire.*
- *Pentru a măsura o bucată de pânză folosim metrul de croitorie.*

Reținem

✓ Suma lungimilor laturilor unui poligon se numește *perimetru*.

✓ Perimetrul pătratului de latură l se calculează cu formula $P_{pătrat} = 4 \cdot l$.

✓ Perimetrul dreptunghiului cu lungimea L și lățimea l se calculează cu formula $P_{dreptunghi} = 2 \cdot (L + l)$.

Probleme rezolvate

- Calculați latura pătratului cu perimetrul de 36 cm și apoi desenați-l.

Rezolvare. $l = P : 4 = 9$ cm.

- Un triunghi are laturile egale cu 18 cm, 19 cm și 20 cm. Calculați perimetrul acestuia.

Rezolvare. P = 18 cm + 19 cm + 20 cm = 57 cm.

- Un dreptunghi are lungimea egală cu 10 cm și lățimea egală cu jumătate din lungime. Determinați perimetrul dreptunghiului.

Rezolvare. Lățimea dreptunghiului este egală cu 10 : 2 = 5 cm, $P = 2(L + l) = 2(10 + 5) = 30$ cm.

Probleme propuse

●

1. Alege răspunsul corect:

● Distanța dintre două orașe se măsoară în:
a) centimetri; b) metri; c) decametri; d) kilometri.

● Unitatea de măsură de 10 ori mai mică decât centimetrul este: a) milimetrul; b) centimetrul; c) decimetrul; d) hectometrul.

● Distanța dintre doi pomi din livadă se măsoară cu ajutorul: a) riglei; b) metrului de croitorie; c) metrului de tâmplărie; d) ruletei.

● Croitoreasa măsoară dimensiunile pentru a realiza o fustă cu ajutorul: a) riglei; b) metrului de croitorie; c) metrului de tâmplărie; d) ruletei.

2. Enunțurile de mai jos exprimă lucruri posibile? Notați cu A dacă enunțul este posibil să fie adevărat și cu F dacă enunțul este posibil să fie fals.
- Înălțimea fratelui meu este de 1 km.
- Părul Andreei are lungimea de 5 m.
- Caietul de matematică are lungimea de 10 cm.
- Grosimea carnetului de note este de 5 mm.

3. Alege numărul care arată măsura cea mai apropiată de realitate:
- Lățimea băncii de la școală este de: 10 m, 1 m, 3 m;
- Înălțimea casei în care locuiești este de: 10 m, 6 m, 100 m;
- Lungimea unui creion este egală cu: 15 cm, 2 m, 3 km, 15 lei.

4. Transformați în metri:
a) 0,471 hm; b) 360 dm; c) 7,12 km;
d) 451 mm; e) 0,01 dam; f) 150 m.

5. Efectuați, exprimând rezultatul în metri:
a) 3 km + 15 hm; b) 0,1 hm – 1 dam;
c) 2,56 dam + 1800 mm + 0,235 km;
d) 11 dm – 4 cm; e) 13 dm – 110 cm.

6. Ana are de parcurs până la școală 500 m, iar Ionel are de parcurs 0,7 km. Care copil stă mai aproape de școală?

7. Calculați perimetrul:
a) unui pătrat cu latura de 15 cm;
b) unui dreptunghi cu laturile de 25 cm și 30 cm;
c) unui triunghi cu laturile de 14 cm, 1,5 dm, 210 mm;
d) unui pătrat cu latura de $\frac{9}{5}$cm.

●●

8. Un teren în formă de dreptunghi are lungimea cu 3 m mai mare decât lățimea și perimetrul de 8,6 dam. Determinați lungimile laturilor terenului.

9. Perimetrul unui triunghi este de 99 m. Determinați lungimile laturilor, dacă ele sunt exprimate prin trei numere naturale impare consecutive.

10. Determinați perimetrul unui pătrat a cărui latură este egală cu semiperimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile de 3 cm și 5 cm.

11. Un triunghi are perimetrul de 153 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că ele sunt exprimate prin 3 numere consecutive.

12. Determinați laturile unui triunghi care are perimetrul de 93 m, știind că a doua latură este cu 50 dm mai mare decât prima și a treia este cu 0,02 hm mai mare ca a doua.

●●●

13. Pe marginea străzii bunicii mele, pe o lungime de 120 m, de o parte și de alta, s-au plantat pomi la distanța de 5 m unul de altul. Câți pomi s-au plantat? (Atenție! S-au pus pomi și la capetele străzii.)

14. Perimetrul unui dreptunghi este de 60 cm. Mărind lungimea și lățimea cu același număr de centimetri, obținem un alt dreptunghi cu perimetrul de 140 cm. Cu câți centimetri a fost mărită fiecare dimensiune?

15. Un dreptunghi are dimensiunile egale cu 800 cm și 50 dm. Dacă mărim lungimea dreptunghiului cu 26% din măsura sa și lățimea cu 30% din măsura sa, calculați perimetrul noului dreptunghi (în m).

16. Un dreptunghi are dimensiunile egale cu 7 m și 40 dm. Dacă micșorăm lungimea dreptunghiului cu 25% din măsura sa și mărim lățimea cu 31,25% din măsura sa, calculați perimetrul patrulaterului obținut (în m).

17. Lățimea unui dreptunghi este egală cu un sfert din lungimea sa, iar perimetrul dreptunghiului este mai mare cu 36 m decât dublul diferenței dintre lungime și lățime. Calculați dimensiunile dreptunghiului.

18. Un sătean, măsurând un lot dreptunghiular, a obținut 112 pași în lungime și 104 pași în lățime. Care este perimetrul lotului, știind că 8 pași măsoară 7 m?

19. Un melc urcă în timpul zilei pe un copac 3 m și alunecă noaptea 2 m. După câte zile ajunge în vârful copacului înalt de 10 m?

Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului. Aria dreptunghiului. Transformări ale unităților de măsură

Andrei: Ana, știi care este diferența dintre figura din stânga și cea din dreapta pe fiecare dintre rândurile cu desenele alăturate?

Ana: Desigur:

- în partea stângă a fig.1 este reprezentat un triunghi, iar în dreapta o suprafață triunghiulară;
- în fig.2, în partea stângă, observăm un pătrat, iar în dreapta o suprafață pătrată;
- în fig.3, în partea stângă, este reprezentat un dreptunghi, iar în dreapta o suprafață dreptunghiulară.

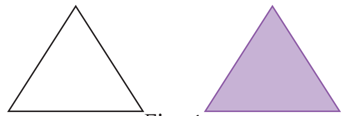


Fig. 1

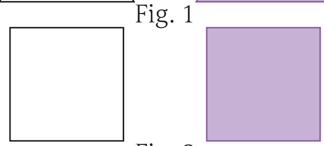


Fig. 2

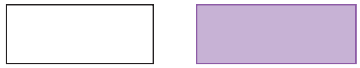
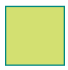


Fig. 3

Reținem

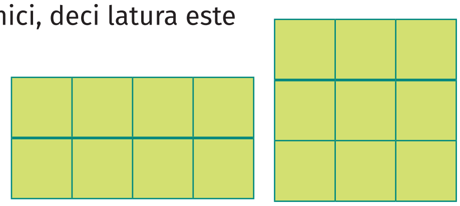
✓ Suprafața unui poligon este formată din toate punctele interioare și toate punctele ce aparțin laturilor poligonului.

✓ Aria reprezintă o măsură a suprafeței, adică arată de câte ori se cuprinde o anumită unitate de măsură în acea suprafață.

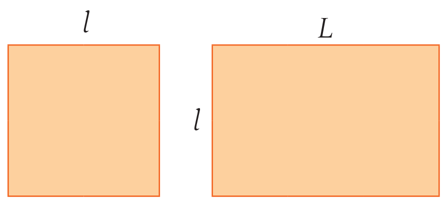
Ana: Andrei, considerăm ca unitate de măsură pătrățelul  și vrem să aflăm aria pătratului și aria dreptunghiului din imaginea alăturată. Cum vom face?

Andrei: Vedem câte pătrățele acoperă pătratul mare: aria pătratului mare este egală cu 9 unități de măsură pentru arie. Pe fiecare latură a pătratului mare au intrat 3 (l = 3) pătrățele mici, deci latura este egală cu 3. Aria pătratului mare este egală cu 3·3 ($A = l^2$).

Apoi vedem câte pătrățele acoperă dreptunghiul: aria dreptunghiului este egală cu 12 unități de măsură pentru arie. Pe lungimea dreptunghiului au intrat 4 (L = 4) pătrățele mici, iar pe lățimea lui au intrat 3 (l = 3) pătrățele mici. Aria dreptunghiului este egală cu 4·3 ($A = L \cdot l$).



Reținem



✓ *Aria pătratului*: $A_{pătrat} = l^2$, unde l este latura pătratului.

✓ *Aria dreptunghiului*: $A_{dreptunghi} = L \cdot l$, unde L și l sunt dimensiunile dreptunghiului (lungimea și lățimea).

✓ Unitatea de măsură pentru arie este: m^2.

✓ Multiplii și submultiplii metrului pătrat sunt:

$$1mm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{:100} 1cm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{:100} 1dm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{:100} 1\,m^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{:100} 1dam^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{:100} 1hm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{:100} 1km^2.$$

Alți multipli des folosiți ai metrului pătrat sunt *unitățile agrare*:

1 hectar = 1 ha = 1 hm² = 10000 m²;

1 ar = 1 dam² = 100 m²;

1 pogon = 0,5 ha = 0,5 hm² = 5000 m².

✓ Transformarea unităților de măsură pentru arie se realizează astfel:

- din unități mari în unități mici, prin înmulțire (cu 100, 10000, 1000000);
- din unități mici în unități mari, prin împărțire (la 100, 10000, 1000000).

Probleme rezolvate

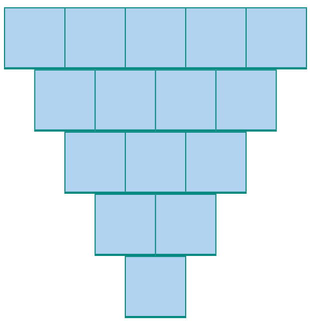
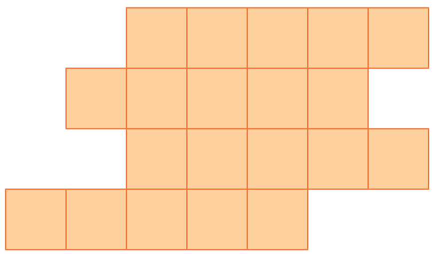
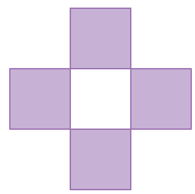
- Transformați după model:

1,8 dam^2 = 18000 dm^2	7112 dam^2 = 0,7112 km^2	3000 mm^2 = 0,3 dm^2	4823 cm^2 = ... m^2
2,511 km^2 = ... dam^2	0,01hm^2 = ... m^2	2,18 dam^2 = ... m^2	49 dm^2 = ... m^2
1500 cm^2 = ... m^2	0,151 km^2 = ... hm^2	321 dm^2 = ... dam^2	170 m^2 = ... dam^2

- Calculați după model:

a) 0,271 m^2 + 14000 mm^2 + 0,0001 dam^2 = 27,1 dm^2 + 1,4 dm^2 + 1 dm^2 = 29,5 dm^2;
b) 0,0423 km^2 + 0,45 hm^2 + 2710 dm^2 =........ dam^2;
c) 1,034 hm^2 + 452 cm^2 + 0,21 dam^2 =...... m^2.

- Știind că fiecare pătrat măsoară 1 cm^2, precizați cât este aria pentru fiecare dintre figurile de mai jos:

- Calculând aria unui dreptunghi care are dimensiunile:

a) 19 hm și 7700 dm, obținem $A = L \cdot l = 190 \cdot 77 = 14630$ dam^2;
b) 90 cm și 0,81 m, obținem .... dm^2.

- Calculați (în m^2) aria unui pătrat cu latura egală cu:

a) 12 cm; b) 7 dam; c) 0,05 km.
Rezolvare. a) $A = l^2 = 0,12^2 = 0,0144\text{m}^2$.

Activitate practică

Raluca are 16 cartonașe în formă de pătrat cu latura de 3 cm și vrea să construiască cu ele dreptunghiuri, prin alăturare, fără suprapunere.

a. Câte moduri de aranjare în dreptunghiuri a cartonașelor descoperă?

b. Pentru fiecare dreptunghi calculează aria și perimetrul. Ce observă?

Activitate în echipe

Alcătuiți trei echipe și rezolvați cerințele de mai jos:
Completați tabelul, pe caiet, cu date despre dimensiunile unor dreptunghiuri:

Echipa I: coloanele albastre
Echipa a II-a: coloanele roz
Echipa a III-a: coloanele verzi

Lungimea (în m)	14	13	12	11	10	13
Lățimea (în m)	6	7	8	9	10	7
Perimetrul (în m)						
Aria (în m^2)						

Ce puteți spune despre perimetru? Care sunt dimensiunile dreptunghiului care are cea mai mare arie? Ce particularitate are acest dreptunghi?

Probleme propuse

●

1. Transformați:

$21\ m^2 =$ ..... dm^2	$123\ cm^2 =$ ..... m^2	$11\ ha =$ ..... m^2	$5700\ m^2 =$ ...... ha	$52{,}5\ dm^2 =$ ..... cm^2
$1{,}2\ km^2 =$ ..... hm^2	$347\ dm^2 =$ ..... ari	$0{,}15\ dam^2 =$ ..... m^2	$0{,}032\ hm^2 =$ ..... m^2	$253{,}2\ mm^2 =$ ..... cm^2
$2{,}07 dam^2 =$ ..... hm^2	$5{,}2\ m^2 =$ ..... cm^2	$5{,}032\ m^2 =$ ..... cm^2	$1{,}032\ m^2 =$ ..... dam^2	$0{,}032\ m^2 =$ ..... dm^2

2. Calculați:
$1{,}2\ ha - 45{,}5\ dam^2 =$ ..... m^2;
$0{,}12\ km^2 + 42{,}5\ hm^2 =$ ..... dam^2;
$1{,}25\ km^2 + 0{,}14\ dam^2 - 143{,}5\ m^2 - 1243\ cm^2 =$
$=$ ..... cm^2;
$24\ dam^2 + 36{,}15\ hm^2 + 267225\ cm^2 =$ ..... m^2;
$5\ dam^2 + 4320\ cm^2 - 2{,}4\ m^2 + 0{,}12\ hm^2 =$ ..... dm^2.

3. Calculând aria unui dreptunghi care are dimensiunile:
a) 60 cm și 8,5 m, obținem ..... dm^2;
b) 9,1dam și 91 dm, obținem ..... m^2.

4. Calculând aria unui pătrat care are latura egală cu:
a) 1,8 m, obținem ... dm^2;
b) 9,2 dam, obținem ... m^2.

5. Calculați perimetrul și aria unui pătrat cu latura de 2,5 cm.

6. Calculați perimetrul și aria unui dreptunghi cu lungimea de 0,42 m și lățimea de 15 cm.

7. Desenați un dreptunghi. Calculați aria dreptunghiului, știind că are $L = 3{,}5$ m și $l = 2{,}1$ dm.

●●

8. Un dreptunghi are perimetrul egal cu 130 cm și lungimea cu 15 cm mai mare decât lățimea.
a) Determinați aria dreptunghiului.
b) Dreptunghiul se împarte în pătrate cu latura de 5 cm. Câte pătrate se obțin?

9. O curte are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m și lățimea de 7,5 m.
a) Câți metri de gard sunt necesari pentru împrejmuirea curții?
b) Curtea se pavează cu dale în formă de pătrat cu latura de 25 cm. Determinați numărul de dale necesare.

10. Un teren dreptunghiular care este împrejmuit cu un gard de 300 m, are lungimea de patru ori mai mare decât lățimea. Câte tone de cartofi se culeg de pe întreaga suprafață, știind că de pe fiecare ar se obțin 220 kg de cartofi?

11. O baie are lungimea de 3,5 m și lățimea de 2,5 m. De câte plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 50 cm este nevoie pentru a acoperi podeaua?

12. Un pătrat are latura, exprimată în cm, de lungime egală cu media aritmetică a numerelor 1,52 și 4,28. Calculați perimetrul și aria pătratului.

13. Un apartament are trei camere dreptunghiulare cu dimensiunile de $2{,}6\ m \times 3{,}2\ m$, $2{,}4\ m \times 2{,}8\ m$, $3\ m \times 2{,}9\ m$. Cât costă mochetarea celor trei camere, știind că $1\ m^2$ de mochetă costă 24,89 lei?

14. O alee în formă de dreptunghi se pavează cu plăci pătratice de mozaic cu suprafața de $225\ cm^2$, așezate în 42 de rânduri a câte 9 plăci fiecare. Determinați dimensiunile și aria aleii.

15. O vie de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 1000 m și 300 m, se stropește cu sulfat de cupru pentru a elimina dăunătorii. Ce cantitate de sulfat de cupru este necesară, dacă la un hectar se folosesc 100 kg de sulfat?

16. Câte plăci de beton de formă pătratică cu latura de 50 cm sunt necesare pentru a pava curtea unei școli care are formă de dreptunghi cu dimensiunile de 48 m și 27 m?

17. Grădina Alinei are formă dreptunghiulară cu lungimea de 52 m și lățimea de 25 m. Ea a cultivat ardei pe $375\ m^2$, cartofi pe $418{,}5\ m^2$ și roșii pe restul suprafeței. Câți m^2 cu roșii a cultivat?

●●●

18. Calculați perimetrul unui dreptunghi care are aria $135\ cm^2$, iar lățimea egală cu 3/5 din lungime.

19. Aria unei grădini dreptunghiulare este de 2914,5 m^2, iar lungimea grădinii este de 72,5 m. Determinați câți metri de gard sunt necesari pentru a împrejmui grădina.

20. La acoperirea unui acoperiș de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 5 m și 4 m s-au folosit 960 de țigle. Câte țigle se vor folosi la acoperirea unui acoperiș de aceeași formă, cu dimensiunile 6 m și 5 m?

21. Marcu are figuri geometrice sub formă de pătrate și dreptunghiuri. Dacă 4 dreptunghiuri și 3 pătrate au împreună aria de 75 cm^2, iar 2 dreptunghiuri și 4 pătrate au împreună aria de 60 cm^2, ajutați-l pe Marcu să afle dimensiunile dreptunghiului și latura pătratului, știind că lățimea dreptunghiului este egală cu latura pătratului.

22. Un pătrat și un dreptunghi au perimetrele egale. Dacă aria pătratului este 144 cm^2 și o dimensiune a dreptunghiului este 3 cm, determinați aria dreptunghiului.

23. Determinați aria unui dreptunghi cu perimetrul de 56 m și lungimea egală cu două treimi din dublul lățimii.

24. Comparați aria pătratului cu latura de 1,5 dm cu cea a unui dreptunghi cu lățimea de 12 cm și lungimea de 1,25 ori mai mare decât latura pătratului.

25. Un teren de joacă are forma dreptunghiulară cu lățimea egală cu o șesime din perimetru. Dacă diferența dintre lungimea și lățimea dreptunghiului este de 24 m, determinați ce suprafață are terenul de joacă.

Proiect

Scara la care se va lucra este 1 : 200 (0,5 cm pe machetă reprezintă 1 m în realitate)

I. Proprietarul unei case decide să-și reamenajeze curtea și grădina. Pe terenul din fața casei, în formă de pătrat cu latura de 40 m, dorește să semene gazon. Știind că la fiecare metru pătrat de gazon se folosesc 1,5 kg de semințe, calculați:

a) aria terenului cu gazon (calculați și în ari);

b) câte kilograme de semințe sunt necesare.

II. Lângă curte, proprietarul deține un teren în formă de dreptunghi, cu lățimea de 40 m și lungimea de 80 m, pe care îl împarte în două părți egale delimitate de o alee cu lățimea de 4 m, pavată cu dale de ciment. Pe terenul din stânga aleii va fi o livadă, iar pe terenul din dreapta, grădina de legume și cea de flori, despărțite de o cărare lată de 1 m. Grădina de flori are mărimea egală cu un sfert din cea a grădinii de legume. Calculați:

a) aria și perimetrul livezii.

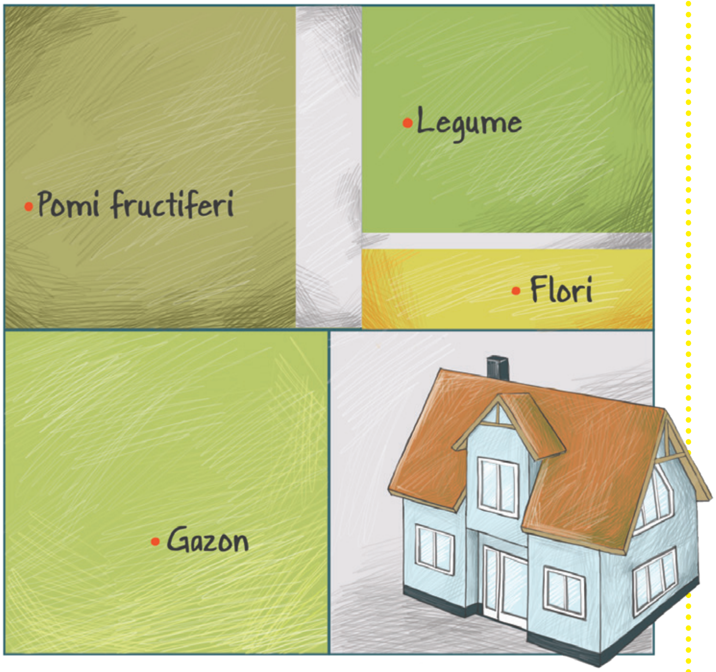
b) aria și perimetrul aleii;

c) câte dale sunt necesare, dacă dalele puse pe alee au formă de pătrat cu latura de 50 cm;

d) prețul dalelor, dacă 1 m^2 costă 10 lei;

e) aria grădinii de flori și cea a grădinii de legume (calculați și ca diferență de arii).

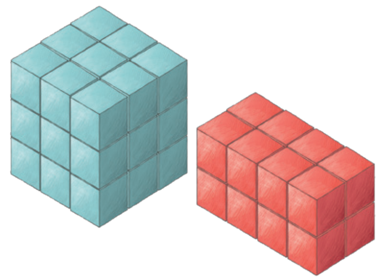
Grădina cu legume se împrejmuiește cu gard viu. Care este prețul necesar achiziționării acestuia, știind că un metru de gard viu costă 21,5 lei?



Realizați și voi macheta, la scara dată.

Unități de măsură pentru volum.
Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic.
Transformări ale unităților de măsură

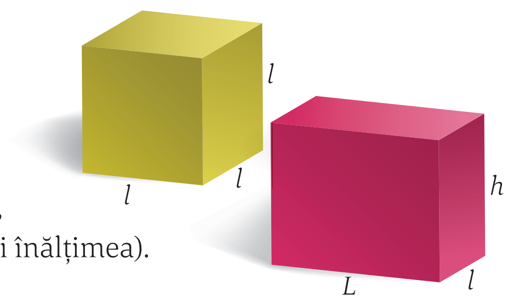
Andrei: Ana, mâine, la școală, trebuie să ducem jocul de cuburi pentru că vom face construcții din acestea. Dacă fac cubul din imagine voi folosi 27 de cubulețe. Anul trecut spuneam că volumul cubului mare este egal cu 27 de unități de măsură pentru volum. Pe fiecare latură a cubului mare au intrat 3 (l = 3) cuburi mici, deci latura este egală cu 3. Volumul cubului mare este egal cu 3·3·3 ($V = l^3$).



Ana: Eu folosesc 16 cuburi pentru a construi paralelipipedul din imagine, adică volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu 16 unități de măsură pentru volum. Pe lungimea paralelipipedului dreptunghic au intrat 4 (L = 4) cuburi mici, pe lățimea sa au intrat 2 (l = 2) cuburi mici, iar pe înălțimea acestuia au intrat 2 (h = 2) cuburi mici. Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu 4·2·2 ($V = L \cdot l \cdot h$).

Andrei: Observăm că fiecare construcție ocupă un spațiu egal cu cel ocupat de numărul de cuburi din care este format.

Reținem



✓ Volumul reprezintă mărimea spațiului ocupat de un corp.

Volumul cubului: $V_{cub} = l^3$, unde l este latura cubului.

Volumul paralelipipedului dreptunghic: $V_{paralelipiped} = L \cdot l \cdot h$, unde L, l și h sunt dimensiunile paralelipipedului (lungimea, lățimea și înălțimea).

✓ Unitatea de măsură pentru volum este: m³.

✓ Multiplii și submultiplii metrului cub sunt:

$$1mm^3 \underset{\cdot\,1000}{\overset{:\,1000}{\rightleftarrows}} 1cm^3 \underset{\cdot\,1000}{\overset{:\,1000}{\rightleftarrows}} 1dm^3 \underset{\cdot\,1000}{\overset{:\,1000}{\rightleftarrows}} 1m^3 \underset{\cdot\,1000}{\overset{:\,1000}{\rightleftarrows}} 1dam^3 \underset{\cdot\,1000}{\overset{:\,1000}{\rightleftarrows}} 1hm^3 \underset{\cdot\,1000}{\overset{:\,1000}{\rightleftarrows}} 1km^3.$$

Transformarea unităților de măsură pentru volum se realizează astfel:

- *din unități mari în unități mici, prin înmulțire (cu 1000, 1000000, 1000000000);*
- *din unități mici în unități mari, prin împărțire (la 1000, 1000000, 1000000000).*

Probleme rezolvate

- Astăzi este ziua lui Rareș și fiecare elev a primit o ciocolată în formă de paralelipiped dreptunghic cu laturile de 7 cm, 5 cm și 1 cm. Care este volumul ciocolatei?

Rezolvare. $V_{paralelipiped} = L \cdot l \cdot h$, $V = 35$ cm³.

- Transformați:

$1{,}03127\ dm^3 = 1031{,}27\ cm^3$; $11{,}07\ dam^3 = 11070\ hm^3$; $0{,}001\ m^3 = 1\ dm^3$;

$0{,}2\ km^3 = 200\ hm^3$; $1230{,}05\ mm^3 = 1{,}23005\ cm^3 = 0{,}00123005\ dm^3$.

- Calculați în m³:

$3{,}8142\ dam^3 + 2117{,}41\ dm^3 = 3814{,}2\ m^3 + 2{,}11741\ m^3 = 3816{,}31741\ m^3$;

$0{,}01\ hm^3 + 2{,}1\ dam^3 - 12{,}005\ dm^3 = 10000\ m^3 + 2100\ m^3 - 0{,}012005\ m^3 = 12100\ m^3 - 0{,}012005\ m^3 = 12099{,}987995\ m^3$;

$82195{,}01\ cm^3 + 521{,}3\ dm^3 - 0{,}00021\ dam^3 = 0{,}08219501\ m^3 + 0{,}5213\ m^3 - 0{,}21\ m^3 = 0{,}60349501\ m^3 - 0{,}21\ m^3 = 0{,}39349501\ m^3$.

Probleme propuse

•

1. Transformați în metri cubi:
a) 5 dam^3; b) 201 dam^3;
c) 4,03 dam^3; d) 2,4132 dam^3;
e) 21 hm^3; f) 2,1058 hm^3;
g) 0,00211 hm^3; h) 0,1 hm^3;
i) 4 km^3; j) 3,0508 km^3;
k) 0,0000027 km^3; l) 0,005 km^3.

2. Transformați în decametri cubi:
a) 1 hm^3; b) 1,1 hm^3;
c) 3 km^3; d) 7,022 km^3;
e) 301,2 m^3; f) 20 m^3;
g) 102000 dm^3; h) 12,1507 dm^3.

3. Transformați în centimetri cubi:
a) 241 dm^3; b) 0,03 dm^3;
c) 14,3 m^3; d) 1,27 m^3;
e) 0,00035 dam^3; f) 0,07 dam^3.

4. Stabiliți unitatea de măsură:
a) 41,3 dam^3 = 41300000...;
b) 0,00137 km^3 = 1370...;
c) 7,301 cm^3 = 7301...;
d) 405,32 m^3 = 405320000...;
e) 971000 mm^3 = 0,971...;
f) 0,00394 hm^3 = 3940000... .

5. Calculați:
a) 0,3 m^3 + 0,315 hm^3 + 211000 km^3 = ... dam^3;
b) 0,0123 dm^3 + 0,00047 dam^3 + 181000 cm^3 = ... m^3;
c) 2010 mm^3 + 0,0071 m^3 + 0,0125 dm^3 = ... cm^3;
d) 12000 m^3 + 1500 dam^3 + 0,0137 km^3 = ... hm^3;
e) 0,5971 m^3 + 12130 cm^3 + 521000 mm^3 = ... dm^3;
f) 7125 dam^3 + 0,02711 km^3 + 352600000 m^3 = = ... hm^3.

6. Dulapul de materiale din clasa noastră are dimensiunile de 2 m, 14 dm și 60 cm. Calculați volumul dulapului în m^3.

7. Un paralelipiped dreptunghic cu lățimea de 4 dm și înălțimea de 11 dm are volumul V = 242 dm^3. Calculați lungimea paralelipipedului dreptunghic.

8. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 18 cm, lățimea de 12 cm și înălțimea de 6 cm. Câte cuburi cu latura de 3 cm vor putea fi aranjate în cutia respectivă?

9. O sală de clasă are lungimea de 15 m, lățimea de 8 m și înălțimea de 2,5 m. Dacă în clasă sunt 30 de elevi, câți metrii cubi din spațiul clasei revin fiecărui elev?

••

10. Lungimea laturii unui cub, exprimată în metri, este un număr prim, par. Determinați volumul cubului.

11. Determinați volumul unui paralelipiped dreptunghic, dacă dimensiunile lui, exprimate în cm, sunt trei numere naturale consecutive și media lor aritmetică este 15.

12. Părinții lui Mihai vor să construiască o casă și Mihai îi ajută să facă calculele. Pentru construcție decid să cumpere cărămizi cu dimensiunile de 375 mm, 250 mm și 236 mm, care costă 12,35 lei bucata.
a) Care este volumul unei cărămizi?
b) Câte cărămizi sunt necesare pentru un metru cub de zidărie?
c) Cât costă un metru cub de cărămizi?

13. Avem două vase, unul în formă de cub cu muchia de 3 dm, plin cu apă, și unul în formă de paralelipiped cu dimensiunile de 7 dm, 2 dm și 2 dm, care este gol. Stabiliți dacă se poate turna toată apa din vasul în formă de cub în vasul în formă de paralelipiped. Câtă apă este în vas?
Indicație. Amintim că 1 dm^3 = 1 litru.

14. Un șanț are lungimea de 3 m, lățimea de 1,4 m și adâncimea de 6 dm. Câte găleți de apă sunt necesare pentru umplerea șanțului, dacă într-o găleată încap 14 l de apă?

15. Un vas în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea egală cu 3,2 dm, lățimea egală cu jumătate din lungime, iar capacitatea vasului este de 57,6 litri. Determinați înălțimea vasului.

●●●

16. Câți litri de suc avem într-o cutie cu dimensiunile de 10 cm, 16 cm și 12,5 cm?

17. Un rezervor în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 3 m, 2 m, 7 m este plin cu apă. Pentru câte zile ajunge apa din rezervor, dacă se consumă zilnic 280 litri?

18. Un cub cu latura de 4 cm este vopsit roșu și apoi din el se taie cuburi cu latura de 1 cm.

a) Câte cuburi se formează?
b) Câte cuburi au trei fețe vopsite în roșu?
c) Câte cuburi au două fețe vopsite în roșu?
d) Câte cuburi au o față vopsită în roșu?
e) Câte cuburi nu au nicio față vopsită în roșu?

19. Într-un vas cu apă în formă de paralelipiped dreptunghic cu $L = 45$ cm și $l = 40$ cm se scufundă un cub. Nivelul apei se ridică cu 15 cm. Determinați latura cubului.

20. Latura unui cub este de 5 cm. Cu câți centimetri cubi se mărește volumul cubului, dacă latura sa se mărește cu 10%?

21. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $L = 2{,}5$ dm, $l = 15$ cm și $h = 300$ mm. Cu cât va fi mai mic volumul unui alt paralelipiped, dacă acesta are dimensiunile mai mici cu 40% decât cel inițial?

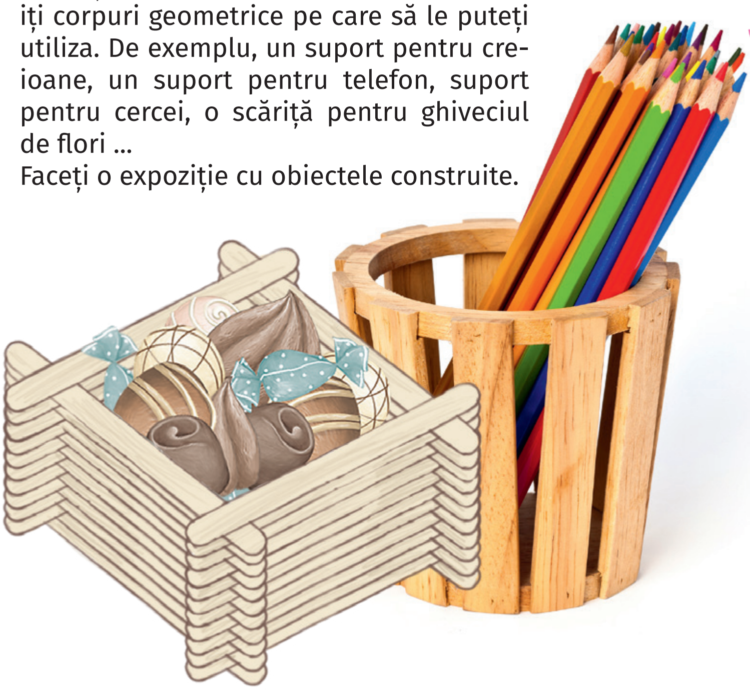
22. Un paralelipiped dreptunghic are lungimea L, lățimea l și înălțimea h. Determinați volumul paralelipipedului, dacă $L + l = 19$ m, $L + h = 18$ m și $l + h = 17$ m.

23. Un paralelipiped dreptunghic are suma tuturor muchiilor de 64 m. Determinați volumul paralelipipedului, dacă lățimea este jumătate din lungime și cu 4 m mai mare decât înălțimea.

24. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, exprimate în cm, sunt trei numere naturale distincte mai mici ca 30, divizibile cu 5. Dacă lungimea este cu 10 cm mai mare ca lățimea și înălțimea este 5/3 din lungime, determinați volumul paralelipipedului.

Activitate practică

Folosind bețișoare de chibrituri, scobitori, bețișoare de la înghețată sau bucăți de lemn și un adeziv pentru lemn, construiți corpuri geometrice pe care să le puteți utiliza. De exemplu, un suport pentru creioane, un suport pentru telefon, suport pentru cercei, o scăriță pentru ghiveciul de flori ...
Faceți o expoziție cu obiectele construite.

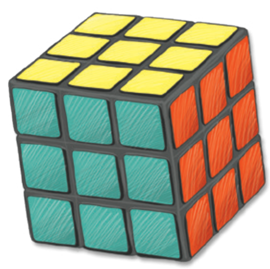


Să ne jucăm

Cubul lui Rubik este un joc problemă de tip puzzle inventat în 1974 de către sculptorul și profesorul de arhitectură maghiar Ernő Rubik. A câștigat premiul special *Cel mai bun joc problemă* la Jocul Anului în Germania, devenind rapid cel mai bine vândut din lume.

Pe un cub Rubik, fiecare dintre cele șase fețe este colorată, iar un mecanism permite rotirea independentă a fiecărei fețe astfel încât culorile să se poată amesteca. Pentru rezolvare, fiecare față trebuie readusă la o singură culoare.

Căutați pe internet metode de rezolvare rapidă a cubului Rubik!



Test de autoevaluare

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 50 minute.

1. Completați spațiile punctate:
a) 1,327 hm = ... dm ; b) 102 m^3 = ... dam^3 ; c) 0,198 hm^2 = ... m^2 ; d) 0,01 dm^3 = ... mm^3. *10 puncte*

2. Calculați și completați spațiile punctate:
a) 1,7 ari – 150 m^2 + 10200 dm^2 = ... dam^2; b) 10200 dm^3 + 0,0071 dam^3 – 1300000 cm^3 = ... m^3. *10 puncte*

3. Comparați:
a) 25 hm^3 cu 2500 dam^3 ; b) 140,1 mm cu 1,41 dm. *10 puncte*

4. Perimetrul unui dreptunghi este 17,3 m. Determinați aria dreptunghiului, știind că lungimea este cu 1 m mai mare decât dublul lățimii. *15 puncte*

5. Calculați latura cubului cu volumul de 27 dm^3. Câți litri de apă sunt necesari pentru umplerea cubului, dacă în el sunt deja 7000 cm^3 de apă? *15 puncte*

6. O cameră are lățimea de 2,7 m și lungimea de 3,9 m. Aceasta se pardosește cu plăci de gresie de formă pătrată, cu latura de 30 cm. Câte plăci sunt necesare? *15 puncte*

7. Determinați volumul unui paralelipiped dreptunghic, dacă media aritmetică a dimensiunilor sale este de 20 cm, media aritmetică dintre lungime și lățime este de 25 cm, iar înălțimea este jumătate din lățime. *15 puncte*

Consolidare/remediere/stimularea performanței

1. Transformați în m: 2 km; 120 cm; 8,75 dam; 0,7 dm; 30 mm; 2,25 hm; $\frac{3}{4}$ km; $\frac{1}{5}$ cm; $\frac{173}{10}$ mm.

2. Transformați în m^2: 26 dm^2; 0,03 km^2; 8 dam^2; 1,5 dm^2; 3001 mm^2; 0,25 hm^2; $\frac{1}{8}$ km^2; 3,1 ha; 5 ari.

3. Transformați în m^3: 0,02 dam^3; 10,8 dm^3; 4 cm^3; 0,0009 km^3; $3\cdot10^7 mm^3$; 0,01 hm^3; 340 l; $\frac{1937}{2}$ml.

4. Efectuați:
a) exprimând rezultatul în metri: 1300 cm + 2000 mm + 11,3 dam;
b) exprimând rezultatul în cm^2: 0,0054 m^2 – 0,12 dm^2 – 1200 mm^2;
c) exprimând rezultatul în m^3: 25 m^3 + 1,8 dam^3 + 1025 dm^3.

5. Calculați:
a) $\frac{1}{2}$ m + $\frac{3}{5}$ dm + $\frac{1}{25}$ dam = ? cm; b) 87 m^2 + 0,28 dam^2 + 88 dm^2 = ? dm^2; c) 2,8 dam^3 + 800 dm^3 = ? m^3.

6. Un pătrat are latura egală cu 12 cm, iar un dreptunghi are lungimea egală cu 1,8 dm și lățimea egală cu o treime din lungime. Care figură geometrică are perimetrul mai mare?

7. Un triunghi are laturile cu lungimile egale cu 1,4 dm, 7 cm și 100 mm. Ce lungime are latura unui pătrat care are perimetrul egal cu perimetrul triunghiului?

8. Un pătrat cu latura egală cu 21 cm are perimetrul egal cu al unui triunghi care are două laturi egale cu 2,7 dm și 280 mm. Ce lungime are a treia latură a triunghiului (în m)?

9. Calculați și exprimați în centimetri perimetrul unui:
a) pătrat cu latura de $\frac{7}{8}$ dm;
b) dreptunghi cu lungimea de $\frac{9}{2}$ m și lățimea de 36 dm;
c) dreptunghi cu lungimea egală cu 16 mm și lățimea egală cu jumătate din lungime;

d) triunghi cu laturile (exprimate în cm) trei numere consecutive, dintre care cel mai mare este cel mai mic număr natural de două cifre;

e) pătrat cu latura egală cu 25% din 14 cm.

10. Un triunghi cu laturile cu lungimile egale cu 24 cm, 0,32 m și 150 mm are perimetrul egal cu perimetrul unui dreptunghi cu lungimea egală cu 3 dm. Ce măsură are lățimea dreptunghiului?

11. O grădină are forma unui pătrat cu perimetrul $\frac{48}{5}$ m. Determinați aria grădinii, în m^2, ari, ha.

12. Determinați volumul unui paralelipiped dreptunghic care are lungimea de 0,15 dm, lățimea de 3 mm și înălțimea de 0,024 m.

13. Un dreptunghi este format din trei pătrate lipite. Dacă o latură a unui pătrat este egală cu 12 cm, calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

14. Un dreptunghi, cu lățimea egală cu jumătate din lungimea sa, are perimetrul egal cu 45 cm. Calculați aria pătratului care are perimetrul egal cu perimetrul dreptunghiului. Comparați aria pătratului cu aria dreptunghiului.

15. Teodor a desenat un dreptunghi cu o latură de 5 cm. El constată că poate împărți dreptunghiul în 5 pătrate identice. Determinați aria și perimetrul dreptunghiului în fiecare din cele 2 cazuri posibile.

16. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile egale cu 2 cm, 1,2 dm și 9 cm. Care este măsura laturii unui cub cu volumul egal cu volumul paralelipipedului?

17. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic are măsurile egale cu 4 cm, 5 cm și 6 cm. Câte cubulețe cu latura de 1 cm sunt necesare pentru a umple cutia fără a rămâne spații libere?

18. Un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 dm, 60 cm și 400 m este plin până la trei sferturi cu apă. Câți litri de apă sunt în acvariu?

19. Ana are o sticlă de 2 *l* de apă minerală și vrea să le servească pe Ioana, Catinca și Anca cu apă. Ea are pahare în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 7 cm, 7 cm și 10 cm. Câtă apă rămâne în sticlă?

20. Calculați câți litri de apă sunt necesari pentru umplerea unui acvariu cu dimensiunile de 4 dm, 3 dm și 8 dm, știind că apa trebuie să ocupe 80% din acvariu.

21. Calculați:

a) aria și perimetrul unui pătrat cu latura de 11 cm;

b) perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 25 m și lățimea un sfert din lungime;

c) volumul unui cub cu muchia de 0,4 cm;

d) latura unui pătrat cu perimetrul de 45 dam;

e) lungimea unui paralelipiped dreptunghic cu $l = 4$ dm, $h = 13$ dm și volumul $V = 390$ dm^3.

22. De câte ori se mărește aria unui dreptunghi dacă:

a) lungimea se mareste de trei ori;

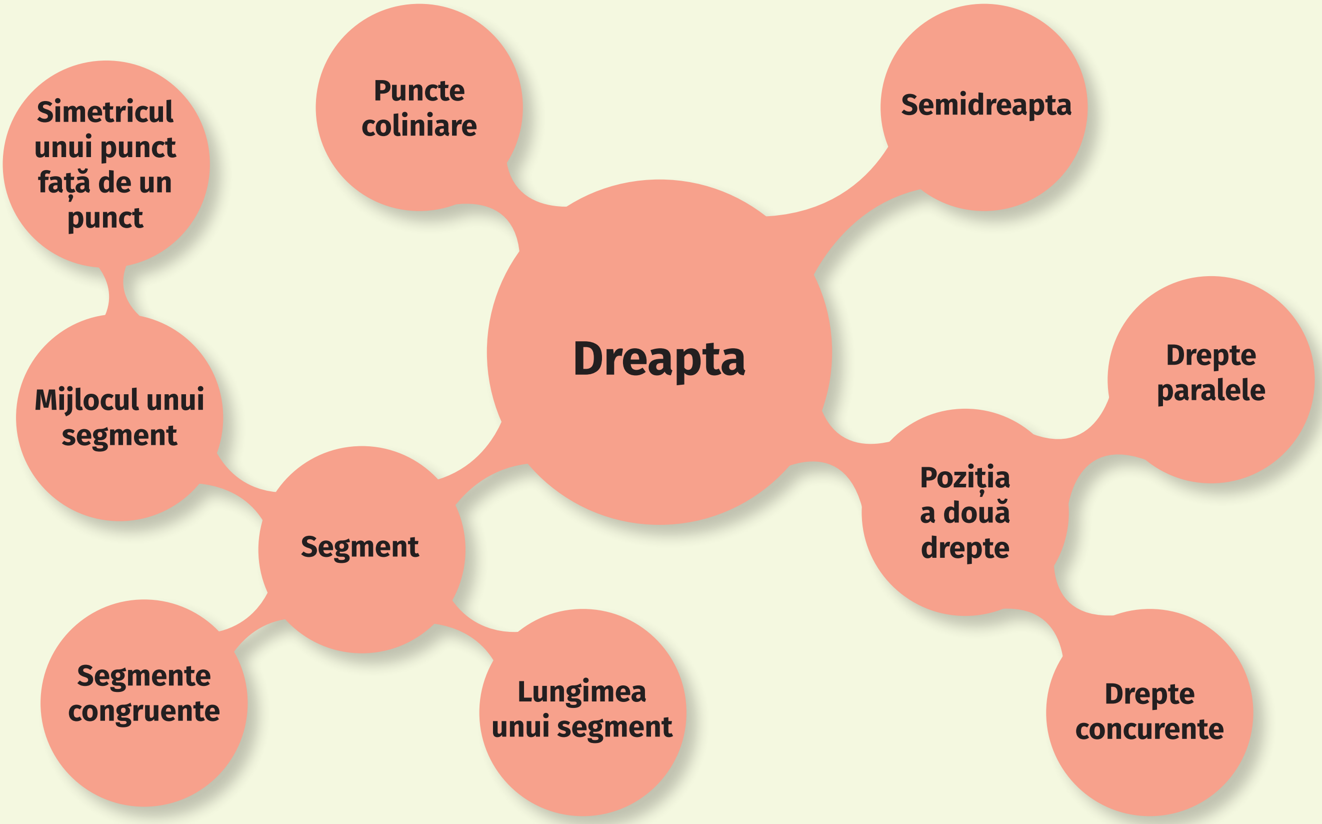
b) lățimea se mărește de patru ori;

c) lungimea se mărește de trei ori, iar lățimea de două ori.

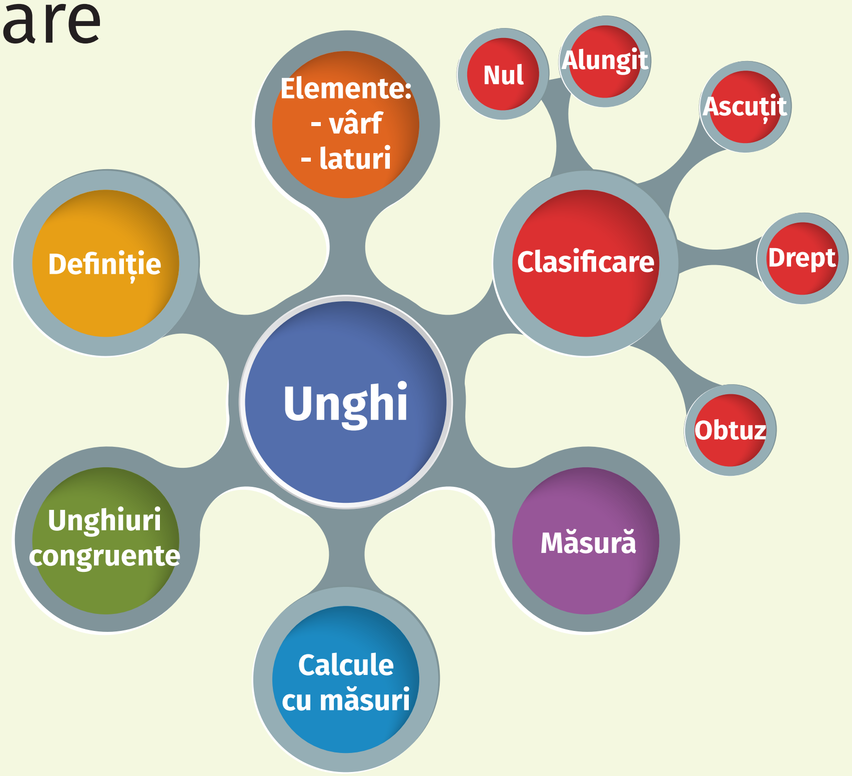
23. Un perete trebuie acoperit cu faianță pe o lungime de 2,55 m și o înălțime de 1,8 m. Dacă o placă de faianță are formă de pătrat cu latura de 15 cm, câte plăci sunt necesare pentru acoperirea peretelui?

24. Un șanț în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $L = 5$ m, $l = 50$ cm, $h = 75$ cm. El trebuie umplut cu pământ cu ajutorul unei roabe, în care încap 60 dam^3 de pământ. Câte roabe de pământ sunt necesare pentru a umple șanțul ?

25. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt exprimate prin 3 numere naturale impare consecutive a căror medie aritmetică este cel mai mic număr prim de două cifre distincte. Determinați volumul paralelipipedului.



Recapitulare dintr-o privire



Test final

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 120 de minute.

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. *30 de puncte*

1. *(5p)* Rezultatul calculului $16 - 16 : 4 + 16^0$ este:
a) 0; b) 1; c) 12; d) 13.

2. *(5p)* Un multiplu par al numerelor 3 și 11, mai mare decât 50, este: a) 55; b) 66; c) 33; d) 88.

3. *(5p)* Rezultatul calculului $\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{12} : \frac{1}{4}$ este:
a) $\frac{7}{12}$; b) $\frac{50}{12}$; c) $4\frac{1}{12}$; d) 4.

4. *(5p)* Suma divizorilor proprii ai numărului 24 este egală cu: a) 35; b) 36; c) 59 ; d) 60.

5. *(5p)* Leo are de parcurs cu bicicleta 55 km. După ce parcurge 25% din tot drumul, el face o pauză. Numărul de kilometri pe care îi mai are de parcurs este:
a) 42,25 km; b) 41,75 km; c) 41,25 km; d) 42 km.

6. *(5p)* Roșu-Împărat are nevoie de 320 de oșteni pentru a se lupta cu 8 zmei. Dacă ar fi cu 25% mai puțini zmei, atunci numărul oștenilor necesari pentru a lupta ar fi egal cu: a) 240; b) 80; c) 400; d) 6.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. *30 de puncte*

1. *(5p)* Fiind date 3 puncte necoliniare, numărul maxim de drepte determinate de câte două dintre acestea este egal cu: a) 1; b) 2; c) 3; d) 6.

2. *(5p)* Rezultatul calculului 32°29’ – 16°42’ + + 65°55’ este: a) 81°2’; b) 80°2’; c) 81°42’; d) 80°42’.

3. *(5p)* Fie segmentul *AB* = 20 cm, punctul *M* mijlocul segmentului *AB* și punctul *N* mijlocul segmentului *AM*. Lungimea segmentului *BN* este egală cu:
a) 15 cm; b) 5 cm; c) 10 cm; d) 17,5 cm.

4. *(5p)* Câte axe de simetrie are pătratul?
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

5. *(5p)* Fie punctele coliniare *A*, *B*, *C* și *D*, în această ordine, astfel încât *AB* = 5 cm, *AC* = 8 cm și *AD* = = 15 cm. Leo afirmă: „Segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD*.” Afirmația lui este:
a) adevărată; b) falsă.

6. *(5p)* Dublul lungimii unui segment *AB* este mai mare cu 3 m decât jumătatea lui. Lungimea segmentului *AB* este egală cu:
a) 3 cm; b) 0,5 cm; c) 4 cm; d) 2cm.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. *30 de puncte*

1. Fie numerele: $a = 3{,}92 - (4{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}196 : 1{,}4) :$ $: 102$ și $b = 1{,}9 \cdot 2{,}2 - (2{,}88 : 2{,}4 + 0{,}62 - 1{,}3) : 1{,}3$.
(2p) **a)** Arătați că $a = 3{,}91$.
(3p) **b)** Comparați numerele a și b.

2. La un concurs participă 50 de fete și 75 de băieți. Toți participanții sunt grupați în echipe care au același număr de copii, iar fiecare echipă are același număr de băieți.
(2p) **a)** Se pot forma 15 echipe? Justificați răspunsul.
(3p) **b)** Care este numărul maxim de echipe care se pot forma?

3. În 12 vase, unele cu capacitatea de 1,5 litri, iar altele cu capacitatea de 3,5 litri, sunt 34 litri de apă.
(2p) **a)** Pot fi 7 vase de 1,5 litri? Justificați răspunsul.
(3p) **b)** Câte vase de fiecare fel sunt?

4. Unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOE$ sunt unghiuri congruente, desenate astfel încât oricare două dintre ele să nu aibă puncte interioare comune și $\sphericalangle AOB = 30°$.
(2p) **a)** Este adevărat că $\sphericalangle AOE$ este unghi obtuz? Justificați răspunsul.
(3p) **b)** Arătați că $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle EOB$.

5. Considerăm $\sphericalangle AOB$, unghi drept, semidreapta *OC* situată în exteriorul unghiului, astfel încât $\sphericalangle BOC = 135°$, și semidreapta *OD* situată în interiorul $\sphericalangle AOB$, astfel încât $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle DOB$.
(2p) **a)** Arătați că $\sphericalangle AOD = 45°$.
(3p) **b)** Justificați faptul că semidreptele *OC* și *OD* formează ori unghi alungit, ori unghi drept.

6. Media aritmetică a dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 12 cm, media aritmetică dintre lățime și înălțime este egală cu 8 cm, iar lungimea este de 8 ori mai mare ca lățimea.
(2p) **a)** Calculați lungimea paralelipipedului.
(3p) **b)** Calculați volumul paralelipipedului.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. NUMERE NATURALE

Scrierea și citirea numerelor naturale. **2.** 10003, 1234567, 492, 30405. **3.** $\overline{62} = 6 \cdot 10 + 2$. **4.** a) 7 este pe poziția unităților, 5 la zeci, 3 la sute și 1 la mii. **5.** De exemplu: 951, 915, 1953, 2915, 3159. **6.** 10, 98, 111, 9876. **7.** 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39. **8.** 108, 118, 128, 138, 148, 158, 168, 178, 198. **9.** 351, 98280, 6005023. **10.** a) 193, 293, 393, 493, 593, 693, 793, 893, 993. **11.** a) 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96; b) 290, 292, 294, 296, 298; d) nu există. **12.** 6354. **13.** 56, 46, 36, 26, 16. **14.** 1881, 2882, 3883, 4884, 5885, 6886, 7887, 8888, 9889. **15.** 800, 710, 701, 170, 107, 620, 602, 260, 206, 611, 161, 116, 530, 503, 350, 305, 521, 512, 125, 152, 215, 251, 440, 404, 431, 413, 314, 341, 143, 134. **16.** De 19 ori apare cifra 6. **17.** Numere de forma $\overline{33a}$ sunt 10, de forma $\overline{3a3}$ sunt 10 și de forma $\overline{a33}$ sunt 9, total 29 numere. **18.** Numerele sunt de forma $\overline{a4b}$. Cifra a poate fi 1, 2, 3, ..., 9 (9 cazuri) și cifra b poate fi 0, 1, 2, ..., 9 (10 cazuri). Avem 90 numere. **19.** 312, 313, 314. **20.** 527.

Reprezentarea pe axa numerelor. **3**. ii. M(6); iii. N(7); iv. P(5).

Compararea și ordonarea numerelor naturale. **1.** a) 85 > 58; b) 69 = 69; c) 185 > 158; d) 352 < 3521; e) 1920 < 1930; f) 3751 > 3571; g) 99 > 29; h) 65 > 56; i) 281 < 2813; j) 1111 > 111; k) 6134 < 6143; l) 7894 > > 7893. **2.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 26, 27, 28, 29, 30. **3.** 987 < 999. **4.** 54, 79, 345, 357, 452, 991, 1230, 2018, 9510. **5.** 8520, 6248, 4510, 3016, 953, 751, 349, 29. **6.** 65 < 66 < 67, 58 < 59 < 60, 79 < 80 < 81, 99 < 100 < 101, 98 < 99 < < 100. **7.** 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99. **8.** 161, 163, 165, 167. **9.** 94, 93, 92, 91. **10.** 72, 73, 74, 75, 76. **11.** 42, 44, 46, 48, 50. **12.** 95, 97, 99, 101, 103. **13.** Dacă $x = 4$, y poate fi 5, 6, 7, 8, 9. Dacă x este 0 sau 1 sau 2 sau 3, y poate fi orice cifră. **14.** Dacă $x = 4$, y poate fi 0, 1, 2, 3, 4. Dacă $x > 4$, y poate fi orice cifră.

Aproximări. Probleme de estimare. **1**. 450, 400. **2**. 730, 800. **3**. 30. **4.** 22 de bancnote. **5.** 10. **7.** 6 sau 7 obiecte. **8.** 16 corecte și 4 greșite.

Probleme recapitulative. **1.** a) 0 la unități, 4 la zeci și 9 la sute. **3.** 41526, 24356. **5.** 102, 377, 378, 405, 444, 601, 970, 1000. **6.** 1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991. **7.** A) 1203, 4203, 5203, 6203. **8.** d) nu există. **9.** 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789. **10.** 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124. **11.** 51, 49, 47, 45. **13.** 33, 31, 29, 27. **14.** 18. **15.** 1551, 2552, 3553, 4554, 5555, 6556, 7557, 8558, 9559. **16.** 40120, 31120, 30121, 13120, 10123, 22120, 20122, 21121. **18.** Pentru paginile de la 1 la 9 se folosesc 9 cifre. Pentru paginile de la 10 la 56 (47 de numere de două cifre) se folosesc 94 de cifre. Total 103 cifre. **20.** Pentru paginile de la 1 la 9 se folosesc 9 cifre, rămân de folosit 216 – 9 = 207 cifre. Pentru paginile cu numere de la 10 la 99 (90 de numere de câte două cifre) se folosesc 180 de cifre; rămân 207 – 180 = 27 de cifre. Cele 27 de cifre sunt pentru numerele de trei cifre; 27:3 = 9 pagini, 99 + 9 = 108 pagini.

Test de autoevaluare. **1.** 348, 4007. **2.** a) 45 < 69; b) 120 > 36; c) 4325 < 4352; d) 11025 < 11125; e) 678902 > > 67890. **3.** 49, 89, 100, 134, 403, 752. **4.** 1230 < 1235 < **1240**, **1200** < 1235 < 1300, **1000** < 1235 < 2000. **5.** 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73. **6.** 9103, 9113, 9123, 9133, 9143, 9153, 9163, 9173, 9183, 9193, $\overline{9193} = 9 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 3$.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **1.** a) 1278 < 3210; b) 4510 < 4610; c) 7823 < 7832; d) 5103 < 5104. **2.** 1099, 1187, 1239, 1278, 1378, 10105. **3.** 7990 < 7998 < **8000**, 7900 < 7998 < **8000**, 7000 < < 7998 < **8000**. **4.** 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122. **5.** 128 < 129 < 130, 299 < 300 < 301, 426 < 427 < 428, 1012 < 1013 < 1014. **6.** a) 113, 213, 313, 413, 513, 613, 713, 813, 913 sunt impare. **7.** 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. **8.** Pentru cifra a avem 9 posibilități (cifrele de la 1 la 9), iar pentru cifra b avem 10 posibilități, total 90 de numere. **9.** 869, 870, 871.

Adunarea și scăderea numerelor naturale. **1.** 24 + 76 = 100; 58 + 87 = 145; 76 – 24 = 52; 87 – 58 = 29; 123 + 654 = 777; 581 + 739 = 1320; 654 – 123 = 531; 739 – 581 = 158; 1508 + 752 = 2260; 3456 + 2544 = 6000; 1508 – 752 = 756; 3456 – 2544 = 912. **2.** 175. **3**. 92. **4.** 237. **5**. 29 + 30 + 31 + 32 + 33 = 155. **6.** 426 + 538 + 424 + + 112 = 1500; 349 + 183 + 217 + 151 = 900; 681 + 562 + 219 + 38 = 1500; 349 + 157 – 249 – 57 = 200; 3106 + + 459 – 106 = 3459; 8123 – 123 +1506 – 6 = 9500; 9000 – 1587 – 2413 – 3987 = 1013; 30201 + 45810 + 19799 = = 95810; 5723 + 3458 – 723 – 458 = 8000. **7.** 144 < 145; 95 > 83; 1240 > 200; 150 > 66; 450 < 475; 148 < 158. **8.** 69 + 129 + 59 = 257, 65 + 89 + 79 = 233. Ana. **9.** 369. **10.** a) 108, 88; b) 1101, 897; c) 6997, 5027.

11.

4593+	3754+	4593–	3754–	1611+	3372–	1534+
1469	1366	1469	1755	3411	1069	4528
6062	5120	3124	1999	5022	2303	6062.

Înmulțirea numerelor naturale. **1.** 451 · 3 = 1353; 11 · 38 = 418; 451 · 103 = 46453; 32 · 45= 1440; 451 · 34 = 15334; 45 · 2 · 140 = 12600; 679 · 34 · 10 = 230860; 9871 · 5 · 2 · 10 = 987100; 25 · 391 · 4 = 39100; 102 · 301 · 45 = 1381590; 14591 · 379 · 0 = 0; 84 · 63 – 84 · 13 = 4200. **2.** 90, 306, 98710. **3.** 48, 576, 1500, 73248. **4.** 180 < 182, 2430 < 2840, 39483 = 39483, 3465 > 0. **5.** 400. **6.** 161 lei. **7.** Numerele sunt de forma $\overline{abc}$, cu $a \cdot b \cdot c = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$; 123, 132, 213, 231, 312, 321. **8.** 150 cm. **9.** 90 km. **10.** a) 203; b) 2030, 2130, 2230, 2330, 2430, 2530, 2630, 2730, 2830, 2930, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039. **12.** Notăm numerele cu x și y. Știm că $x \cdot y = 95$ și că $x(y+5) = 120 \Rightarrow xy + 5x = 120; 5x = 25 \Rightarrow x = 5, y = 19$. **13.** a) 7, 14, 21, 28, 35, 42 ...; b) 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458...; c) 8, 24, 40, 56, 72, 88, 104 ...

Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

1.

a	b	$a \cdot b$	$a:b$
24	8	192	3
75	15	1125	5
81	27	2187	3
448	28	12544	16
5177	167	864559	31

2. a) 12 < 13; b) 43 = 43; c) 59 < 61; d) 314 > 313; e) 202 = 202. **3.** a) 421; b) 25; c) 10; d) 12. **4.** 15. **5.** 31. **6.** 2 lei. **7.** (48 + 24) : (48 – 24) = 3. **8.** a) 329; b) 6; c) 189; d) 27. **9.** a) 28 = 1 · 4 · 7 b) 28 = 28:1 = 56:2 = 84:3. **10.** a) 8; b) 0; c) 1. **11.** 341, 642, 943. **12.** 6, 7, 9, 12, 19, 33. **13.** $x = 9, y = 4, 24$. **14.** 229, 229.

Factor comun. **1.** 1236, 3900, 0, 1050, 379800, 0, 1996, 0, 1. **2.** a) $11(a + 4b - 6c)$; b) $25(10 - a)$; c) $16(16a + 9b + 20c)$; d) $17(8a - 2b + 3c)$; e) $b(a + c - d + 5)$. **3.** $a(b + c):13 = (ab + ac):13 = (40 + 25):$ $:13 = 5$ și 3. **4.** 341, 122, 13. **5.** a) $a + 2b + 2c = 59 \Leftrightarrow a + 2(b + c) = 59 \Leftrightarrow a + 26 = 59 \Leftrightarrow a = 33$; b) 5. **6.** $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = 2997 \Leftrightarrow 111(x + y + z) = 2997 \Leftrightarrow x + y + z = 27 \Leftrightarrow x = y = z = 9$.

Împărțirea cu rest a numerelor naturale. **1.** a) 104 rest 2; b) 16 rest 34; c) 115 rest 79; d) 315 rest 30; e) 1911 rest 125. **2.** 693. **3.** 8, 22, 36. **5.** 8 rest 4, 8 rest 10, 4 rest 11. **6.** Resturile pot fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 și sunt egale cu câturile; 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48. **7.** 0, 16, 32, 48, 64, 80, 96. **8.** Dacă restul este 98 și împărțitorul este de două cifre, atunci împărțitorul este 99; 197 și 989. **9.** Aflăm cel mai mic număr cu proprietatea dată 180 și cel mai mare 191. Numerele sunt: 180, 181, ..., 191. Suma lor este 2226. **10.** 151. **11.** 19. **12.** 35 și 179. **13.** 35 și 249. **14.** 25, 78, 129. **15.** 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199.

Probleme recapitulative. **1.** d. **2.** b. **3.** c. **4.** d. **6.** 32 rest 2, 127 rest 27, 728 rest 25, 80 rest 303. **7.** Resturile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 73 : 7 dă rest 3, 74:7 dă rest 4, ..., 76:7 dă rest 6, 77:7 dă rest 0, ..., 83:7 dă rest 6, 84:7 dă rest 0, ... 89:7 dă rest 5; S = 3 + 4 + 5 + 6 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5. **8.** 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 89, 98. **9.** 35, 15, 5000, 2661, 20220. **10.** 51, 70, 315, 150. **11.** Împărțiți 123, 234, 345, 456, 567, 678 și 789 la 3. **12.** $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cba} + \overline{cab} = 222(a + b + c)$.

Test de autoevaluare. **1**. 731, 22, 14529, 91. **2.** 97 rest 52. **3.** 432, 38. **4.** 14, 42, 89. **5.** 25 lei. **6.** 1.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural. **2**. A, F, F, A, A, A. **3**. 1-b, 2-e, 3-a, 4-d. **4.** 4^7, 5^5, 10^5, 6^{13}, 301^9. **5**. a) $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; b) $3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; c) $0^{13} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$; d) $21^6 = 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21$; e) $13^4 = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$. **6.** a) 361; b) 343; c) 243; d) 256; e) 441; f) 1; g) 0; h) 1; i) 216. **8.** 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196. **9.** a) 53; b) 8; c) 155; d) 12; e) 2; f) 1; g) 1; h) 66; i) 46; j) 2; k) 1; l) 33700. **10.** 21. **11.** a) $13 = 3^2 + 2^2$; b) $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$; c) $25 = 3^2 + 4^2$; d) $100 = 6^2 + 8^2$; e) $169 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2$. **12.** a) 4^2; 9^2, 12^2; 16^2; 18^2; 20^2; 50^2; b) $a = 5^2$; $b = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$; $c = 15^2$; $d = 20^2$. **13.** a) $5^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 9 + 5^2 \cdot 10 = 5^2 \cdot 25 = 25^2$; b) $7^4 = (7^2)^2$; c) $(2^3)^2$; d) 5^2; e) 8^2. **14.** a) 11; b) 89; c) 12; d) 21; e) 0. **15.** a) 6; b) 19; c) 4; d) 5; e) 8; f) 5; g) 16. **16.** Ultima cifră a numărului $a = 5n + 3$ este 3 sau 8 și nu poate fi pătrat perfect.

Reguli de calcul cu puteri. **1.** a) 5^{40}; b) 6^{15}; c) 7^{11}; d) 17^{47}; e) 1; f) 5; g) 2^{13}; h) 21^{21}; i) 2^{24}; j) 3^{32}; k) 42^{40}; l) 72^{123}; m) 28^{16}; n) 4. **2.** a) 2; b) 1; c) 58 ; d) 1. **3.** a) 2^{13}; b) 1; c) 1; d) 2^{10}; e) 3^{10}; f) 4^{1275}. **4.** a) 2; b) 240; c) 0; d) 1; e) 1. **5.** a) 1; b) 3^{2005}; c) 5^{175}. **6.** a) 1; b) 1; c) 2^{181}; d) 3^{178}; e) 5^{44}. **7.** a) $122 \cdot 5^{2n}$; b) $5^n \cdot 31$; c) 2^{38}; d) 3^{73}; e) 282.

Compararea puterilor. **1.** $2^{45} < 2^{48}$; $8^{57} < 9^{57}$; $6^{31} > 5^{31}$; $4^3 < 3^4$; $5^2 < 2^5$; $4^1 > 1^{42}$; $101^1 > 9^2$; $0^{31} < 31^0$; $4^3 = 2^6$; $203^4 < 211^5$; $8^{13} > 16^9$; $2^{31} > 16^7$; $9^{10} > 3^{19}$; $3^{129} > 81^{31}$; $36^{11} > 6^{21}$; $5^{24} = 25^{12}$; $2^{35} > 5^{14}$; $4^{15} > 7^{10}$; $20^{30} > 30^{20}$; $9^{74} > 2^{111}$; $8^{123} > 10^{41}$. **2.** a) $5^0, 5^6, 5^{11}, 5^{18}, 5^{25}$; b) $3^2, 5^2, 7^2, 8^2, 12^2, 15^2$; c) $2010^0, 2^3, 11^1, 3^3, 4^4, 2010^1$. **3.** a) $16 \cdot 4^7 < 2^{19}$; b) $2^3 \cdot 5^6 > 2^4 \cdot 5^5$; c) $(2 \cdot 3^2)^2 < 2^3 \cdot 3^5$; d) $8 \cdot 9 \cdot 3^2 < 2^3 \cdot 3^5$; e) $27 \cdot 4^3 < 3^4 \cdot 2^5$; f) $4^{29} = 2^{58} = 8^{18} \cdot 16 > 7^{18} \cdot 16$; g) $5^{34} \cdot 9 = 25^{17} \cdot 9 < 3^{53} = 3^{51} \cdot 9 = 27^{17} \cdot 9$. **4.** a) $x > y$; b) $a > b$. **5.** Numerele ordonate crescător sunt: 2^{96}, $2^{112}, 2^{114}$, adică 4^{48}, $16^{28}, 8^{38}$. Jumătatea celui mai mic este $4^{48} : 2 = 2^{96} : 2 = 2^{95}$ și sfertul celui mai mare dintre numere este $8^{38} : 4 = 2^{114} : 2^2 = 2^{112}$. **6.** a) $16^{11}, 4^{21}, 2^{41}$; b) $27^8 = 9^{12}, 3^{19}$; c) $25^6, 5^{11}, 4^{10}$; d) $3^{40}, 4^{30}, 7^{20}$; e) $2^{55}, 3^{33}, 5^{22}$; f) $71^{31}, 4^{93}, 7^{62}$; g) 20^{40}, $30^{30}, 40^{20}$; h) $2^{707}, 5^{303}, 3^{404}$. **7.** a) $2^{512} - 2^{510} = 5^{510} \cdot 3 = 125^{170} \cdot 3 > 3^{341} = 9^{170} \cdot 3$; b) $3^{35} - 9^{17} = 3^{34} \cdot 2 = 9^{17} \cdot 2 > 2^{52} = 8^{17} \cdot 2$; c) $4^{19} - 2^{36} = 2^{36} \cdot 3 = 16^9 \cdot 3 < 3^{28} = 27^9 \cdot 3$; d) $3^{33} - 3^{32} - 3^{30} = 3^{30} \cdot 17 = 27^{10} \cdot 17 < 2^{54} + 2^{50} = 2^{50} \cdot 17 = 32^{10} \cdot 17$; e) $2^{487} - 2^{486} - 2^{485} = 2^{485} = 32^{97} < 6^{194} = 36^{97}$; f) $4^{103} < (5^{200} - 4 \cdot 5^{199} + 9^{54} : 3^{107} - 5^{199})^{206} = 3^{206} = 9^{103}$; g) $9^3 + 36^4 + 25^5 + 15^3 \cdot 2^3 = 5^{10} + 30^3 + (6^4)^2 + (3^2)^3$; h) $3^{2n+1} - 9^n = 9^n \cdot 2 > 2^{3n+1} - 8^n = 8^n$; i) $2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 9 \cdot 2^n = 2^n < 2^{n+1} \cdot 5^n - 10^n = 10^n$; j) $8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1} < 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$.

Scrierea numerelor naturale în baza 10. Scrierea numerelor naturale în baza 2. **3.** 743. **4.** 3700, 3070, 3610, 3160, 3520, 3250, 3430, 3340. **5.** $109 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 1$.

Ordinea efectuării operațiilor. **1.** 358, 357, 924, 24, 1, 2. **2.** 63, 2, 70, 8, 892, 294. **3.** 95, 8, 461. **4.** 1, 3240, 109. **5.** 33, 98, 4, 46. **6.** 157, 2040, 1585, 16678, 7221, 396. **7.** $a = 2^{17}$ și $b + c = 48$, $(ab + ac) : 2^{21} = a(b + c) : 2^{21} = 2^{17}(2^4 \cdot 3) : 2^{21} = 3$. **8.** 1, 1. **9.** 1, 5000.

Probleme recapitulative. **1.** 43, 73, 27, 18, 96, 5. **2.** 9, 10, 73, 0, 29, 80. **3.** a) $8^6 > 7^5$; b) $2^{16} > 4^5$; c) $10^3 > 11^2$; d) $0^{1016} < 1^{100}$; e) $3^{15} > 2^{20}$; f) $3^{39} > 4^{26}$; g) $26^4 > 9^6$. **4.** 201, 41, 5, 381, 11, 10. **5.** 1237, 1022, 1, 1, 1880. **6.** $c < b < a$. **7.** 0. **8.** a) $3^{2^3} > 2^{3^2}$; b) $[(3^2)^3]^4 < 3^{2^{3^4}}$.

Test de autoevaluare. **1.** a) $2^5 = 32$; b) $24^0 = 1$; c) $5^{24} \cdot 5^{10} = 5^{34}$; d) $17^{81} : 17^{69} = 17^{12}$; e) $(7^8)^6 = 7^{48}$; f) $27^{81} : 9^{81} = 3^{81}$. **2.** a) $11^9 < 15^9$; b) $7^{42} > 7^{52}$; c) $9^5 = 3^{10}$; d) $7^{38} < 4^{57}$. **3.** a) $(2^0 + 2^1 + 2^2)^4 : 7^2 + 7^2 = 98$; b) $6^{18} \cdot 36^5 : (6^{13})^2 + 4^{10} \cdot 7^{10} : 28^9 - 25^0 - 0^{18} = 63$; c) $3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{10} \cdot 3^{15})^5 : 3^{27} + (4^5 : 4^{56} - 1^4)^{90} \cdot 3^8] = 3$. **4.** Ordinea crescătoare a numerelor este: $64^{83} = 2^{498}, 32^{119} = 2^{595}, 8^{301} = 2^{903}$. Sfertul celui mai mic este 2^{496}, jumătatea celui mai mare este 2^{902}.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **1.** c, b, d. **2.** a) 5^{20}; b) 6^{15}; c) 17^5; d) 10^{10}; e) 2^{13}; f) 21^{21}; g) 2^{24}; h) 3^{32}. **3.** a) 128; b) 8420; c) 70; d) 294; e) 3^{20}; f) 338; g) 1; h) 2; i) 0; j) 1; k) 5.

Metode aritmetice de rezolvare a problemelor. ***Metoda reducerii la unitate.*** **1.** 12 piese, 96 piese. **2.** 45 lei. **3.** 10 ore. **4.** 6 muncitori. **5.** 45 lei. **6.** 18 zile. **7.** 120 km, 180 km, 30 km. **8.** 15 prăjituri. **9.** Câte 25 kg fiecare. **10.** 216 kg. **11.** 8 zile. **12.** 12 zile. **13.** 35 minute. **14.** 6 ore. **15.** 8 zile. ***Metoda comparației.*** **1.** 15 lei o carte și 3 lei un caiet. **2.** 2 lei un caiet și 10 lei o revistă. **3.** 50 kg un sac cu făină și 30 kg un sac cu cartofi. **4.** 3 kg o fată și 5 kg un băiat. **5.** 65 lei un metru de dantelă și 32 lei un metru de stofă. **6.** 225 lei o gâscă și 125 lei o rață. **7.** 5 g o bilă mare și 3 g o bilă mică. **8.** 35, 100. **9.** 37 lei, 15 lei și 22 lei. **10.** a) 24 lei, b) 16 lei; c) 2 lei creionul, 11 lei revista, 3 lei caietul. **11.** 3 lei 1 kg mere, 2 lei 1 kg pere, 1 leu 1 kg gutui. **12.** 3500 lei. ***Metoda figurativă.*** **1.** 5 ani Irina și 25 ani mama. **2.** 30 și 50 timbre. **3.** 133, 134, 135. **4.** 10 rațe, 30 găini. **5.** 5, 30. **6.** 1 leu pâinea, 6 lei ciocolata. **7.** 20 cutii unt, 60 cutii lapte, 58 cutii iaurt. **8.** 115 lei, 65 lei. **9.** 5 mere și 15 pere. **10.** 250 lei, 50 lei. **11.** 40 bănci și 210 persoane. **12.** 250 saci, 19200 kg. **13.** Tatăl are 30 ani, mama are 29 ani și Ioana 5 ani. **14.** În prezent fiica are 4 ani, mama are 39 ani și bunica 75 ani. **15.** 10 mere. **16.** 6, 12, 27, 3. **17.** 33 elevi și 58 pomi. **18.** 40 meri și 10 peri. ***Metoda mersului invers.*** **1.** 173. **2.** 165 lei. **3.** 125. **4.** 40. **5.** 120 lei. **6.** 24. **7.** $x = 7$. **8.** 108. **9.** 660 kg. **10.** 100 km. **11.** 16. **12.** 24. **13.** 23. **14.** 60. **15.** a) Urmărim calculele și vedem că nu pot fi 27 caise; b) 18 caise; c) câte 3 caise. ***Metoda falsei ipoteze.*** **1.** 20 camere cu 2 paturi și 12 cu 5 paturi. **2.** 19 apartamente cu 2 camere și 23 cu 4 camere. **3.** 2 bidoane de 5 l și 7 de 3 l. **4.** 24 găini și 19 iepuri. **5.** 10 lădițe de 8 kg, 30 lădițe de 5 kg. **6.** 13 rafturi de 40 cărți și 12 de 30 cărți. **7.** 42 bilete de 70 lei și 38 bilete de 50 lei. **8.** 100 porci, 50 găini și 50 rațe. **9.** 15 bune și 5 greșite. **10.** a) 11 cărți de 20 lei, 4 cărți de 30 lei și 7 cărți de 50 lei; b) Luăm 1 carte de 50 lei, 2 cărți de 30 lei și 29 cărți de 20 lei.

Test de autoevaluare. **1.** 33 lei. **2.** 7. **3.** 200 m, 50 m. **4.** 200 g cartea și 50 g caietul

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **1.** 4200; **2.** 15 ore. **3.** 75 lei stofa verde, 225 lei metrul de stofă neagră. **4.** 250 lei dulapul și 125 lei masa. **5.** 36 elevi. **6.** 9 trandafiri, 27 crini și 45 garoafe. **7.** 12, 14, 16. **8.** 8 mese de 3 locuri și 15 mese de 2 locuri.

Divizor. Multiplu. **2.** 14 are ca divizori proprii pe 2 și 7 și improprii pe 1 și 14. **3.** 72. **4.** 1990, 2000, 2010. **5.** Multiplii lui 5: 0, 5, 10, 15, 20. **6.** 105, 126, 147, 168, 210. **7.** 1 și 3. **8.** 0, 45, 90. **9.** a) 1 și 2; b) 1 și 5; c) 1 și 2; d) 1; e) 1 și 2; f) 1 și 10; g) 1 și 5. **10.** a) 4; b) 10; c) 12; d) 6; e) 24; f) 120; g) 300. **11.** a) divizorii lui 36; 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, divizorii lui 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Divizori comuni: 1, 2, 3, 4, 6, 12. **12.** a) multiplii lui 36: 0, 36, 72, 144; multiplii lui 24: 0, 24, 48, 72. Comun: 72. **13.** 1089, 1210, 1331, 1452. **15.** $\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101(10a + b) = 101 \cdot \overline{ab}$ se divide cu $\overline{ab}$. **16.** $\overline{ababab} = 100000a +$

$+ 10000b + 1000a + 100b + 10a + b = 101010a + 10101b = 10101(10a + b) = 10101 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab} = 7 \cdot (3 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab}) + 0$. **17.** $\overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$.

Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9. **4.** a) 12, 96; b) 108, 999; c) 1000, 9900; d) 100, 995; e) 10, 98. **5.** a) 500, 502, 504, 506, 508; b) 501, 504, 507. **6.** șoricel: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, motan: 5, 10, 15, 20. Comune: 10, 20. **7.** a) 150, 510, 690, 960, 906, 450, 540, 504, 156, 516, 456, 564, 546, 654, 594, 954. **8.** a) $2k + (2k + 1) = 4k + 1$ nu se divide cu 2; b) dintre două numere consecutive unul este par și unul este impar, produsul este număr par. **9.** 150, 153, 525, 351, 450, 156, 255, 354, 453, 552, 651, 750, 159, 258, 357, 456, 555, 654, 753, 852, 951, 459, 558, 657, 756, 855, 954, 759, 858, 957. **10.** 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 198, 189. **11.** 150, 250, 350, 450, 550, 650, 750, 850, 950. Avem 9 numere. **12.** 1710, 4710, 7710, 2715, 5715, 8715. **14.** 621 se divide cu 9. **16.** $a = 7^{n+2} \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 7^{n+1} = 5^{n+1} \cdot 7^{n+1}(7 + 5) = 5^{n+2} \cdot 7^{n+1} \cdot 12$. Produsul se divide cu 2, 3 și 5.

Numere prime. Numere compuse. **2.** 2, 31. **3.** 7, 13. **4.** 11 și 501, 13 și 499, 17 și 495 etc. **5.** 2 și 127. **6.** 11 și 1114. **7.** Obținem perechile de numere: (23, 67), (67, 23), (89, 1). Problema are 3 soluții. **9.** 2 și 13. **10.** 3 și 17.

Probleme recapitulative. **2.** Divizorii lui 99: 1, 3, 9, 11, 99. **3.** Multiplii lui 75; 0, 75, 150, 225. **4.** 102, 105, 108, 111, 114. **5.** 117, 126, 135. **6.** 1040, 9945. **8.** a) 1020, 1222, 1424, 1626, 1828; b) 1020, 1320, 1626, 1929; c) 1020, 1525; d) 1323; e) 1020. **9.** a) 2, 12, 32, 132, 312; b) 3, 12, 123, 132, 213, 231, 312, 321; c) 12, 132, 312. **10.** Numerele divizibile cu 2: 100, 998; cu 3: 102, 999; cu 5: 100, 995; cu 10: 100, 990; cu 9: 108, 999. **11.** a) Ambele numere se divid cu 5; b) 35 nu se divide cu 10. **12.** Numerele 24, 20 și 16 au divizori comuni numerele 1, 2 și 4; pentru că în problemă spune că Mihai are verișori, obținem că numărul copiilor este în total 4, deci Mihai are 3 verișori; fiecare a primit câte 6 nuci, 5 mere și 4 pere. **13.** 66. **14.** 12. **15.** $4^2 \cdot 5^5 + 1 = 50001$ se divide cu 3. **16.** Toate sunt egale cu 3. **17.** $A = 3^{n+3} + 3^{n+2} + 5 \cdot 3^{n+1} = 3^n(3^3 + 3^2 + 5 \cdot 3^1) = 3^n(27 + 9 + 15) = 3^n \cdot 51$. Cum n este nenul, numărul A se divide cu 3 și cu 53, deci cu 153. **18.** În primul rând să observăm că suma respectivă are 100 de termeni (de la $1 = 2^0$ până la 2^{99} sunt 100 de numere). Vom încerca să descoperim câte puteri ale lui 2 adunate dau un număr divizibil cu 15; $1 + 2^1 = 3$ nu este divizibil cu 15; $1 + 2^1 + 2^2 = 7$ nu este divizibil cu 15; $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$ este divizibil cu 15. Am obținut că suma primilor 4 termeni este un număr divizibil cu 15. Dacă putem grupa toți termenii sumei câte 4, atunci fiecare grupă se divide cu 15. Cum suma are 100 de termeni, putem grupa câte 4 termeni și obținem: $A = (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) + \ldots (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99}) = (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) + 2^4(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) + \ldots 2^{96}(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(1 + 2^4 + \ldots 2^{96}) = 15 \cdot (1 + 2^4 + \ldots 2^{96})$. Numărul A se divide cu 15. **19.** $a = 72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2} = 72 \cdot 12^n + 3 \cdot 12^{n+2} = 12^n(72 + 3 \cdot 144) = 12^n \cdot 504$. **20.** $a = 2^{n+3}5^{n+1} - 1 = 4 \cdot 10^{n+1} - 1 = 400\ldots00 - 1 = 399\ldots9$ se divide cu 3 și nu se divide cu 9.

2. FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare. **5.** echiunitare: $\frac{5}{5}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}$; subunitare: $\frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}$; rămase $\frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \frac{9}{7}$, care sunt supraunitare. **6.** a) 6; b) 6; c) 20; d) 2 în ambele situații. **8.** $\frac{3}{7}; \frac{3}{31}$. **10.** echiunitare: $\frac{3^2}{9}, \frac{1}{5^0}, \frac{3^4}{9^2}, \frac{125}{5^3}$; subunitare: $\frac{5}{7}, \frac{2^3}{3^2}, \frac{12}{21}$; supraunitare: $\frac{2^3}{7}, \frac{7^1}{1^7}, \frac{4^3}{63}$. **12.** a fiind cifră nenulă, se pot scrie 9 fracții, dintre care 3 sunt subunitare. **13.** $n + 1 < 7$, deci n poate fi 0, 1, 2, 3, 4 sau 5. **14.** d). **15.** b).

Fracții echivalente. Procente. **4.** a) $1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ etc. **5.** 12%; 35%; 75%; 124%. **6.** $20\% = \frac{20}{100}$ și un exemplu de fracție echivalentă $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$ etc. **8.** a) 2; b) 24; c) 9. **10.** cartofi 50%, morcov 30%, pătrunjel 15% și țelină 5%.

Compararea fracțiilor ordinare. Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor ordinare. **1.** a) <; b) >; c) <; d) >; e) =; f) >; g) =; h) =. **2.** c). **4.** $\frac{7}{37} < \frac{9}{37} < \frac{11}{37} < \frac{15}{37} < \frac{19}{37} < 1 < \frac{43}{37}$. **5.** a) >; b) <; c) >; d) <; e) <; f) <; g) <; h) >. **6.** $\frac{29}{7} > \frac{29}{9} > \frac{29}{11} > \frac{29}{17} > \frac{29}{20} > 1 > \frac{29}{31}$. **8.** c). **9.** Din reprezentarea pe axă observăm că $\frac{17}{9} < 2 < \frac{21}{10}$. **11.** $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{17}{5}$. **12.** a) 18, 19, 20; b) 49, 50, 51; c) 42, 43, 44. **13.** a) Cea mai mică $\frac{12}{23}$, cea mai mare $\frac{96}{23}$; b) cea mai mică $\frac{23}{90}$, cea mai mare $\frac{23}{10}$. **14.** $\frac{5}{8}$ între 0 și 1, $\frac{5}{3}$ este între 1 și 2; mai aproape de 1 este $\frac{5}{8}$.

Introducerea și scoaterea întregilor din fracție. **1.** $3\frac{7}{8}, 4\frac{3}{11}, 4\frac{12}{15}, 6\frac{13}{19}, 65\frac{1}{8}, 84\frac{17}{37}$. **2.** $\frac{17}{7}, \frac{40}{11}, \frac{35}{6}, \frac{47}{5}, \frac{107}{10}, \frac{182}{11}$. **3.** $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$, $6 < \frac{19}{3} < 7$; $7 < \frac{37}{5} < 8$; $5 < \frac{39}{7} < 6$, $5 < \frac{56}{11} < 6$. **4.** b) 6; c) 4; d) 6. **5.** a) $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5} < \frac{18}{5}$; b) $4\frac{1}{8} = \frac{33}{8} < \frac{33}{7}$; c) $\frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}, \frac{41}{8} = 5\frac{1}{8}, \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$ și același număr de întregi; d) $\frac{38}{7} = 5\frac{3}{7}, \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}, \frac{38}{7} < \frac{19}{3}$ (mai puțini întregi). **6.** a) 17; b) 3; c) 3; d) 5. **7.** $\frac{27}{6} = 4\frac{3}{6}$, deci fracția este între 4 și 5; axa dintre 4 și 5 se împarte în 6 părți și luând 3 dintre ele ajungem la mijlocul distanței dintre 4 și 5. **8.** Ambii obțin fracția $\frac{117}{7}$, iar prin scoaterea întregilor din fracție Barbu este cel ce obține fracția inițială.

Probleme recapitulative. **1.** $\frac{7}{15}, \frac{7}{21}, \frac{7}{30}, \frac{15}{21}, \frac{15}{30}, \frac{21}{30}$. **2.** $\frac{17}{15}, \frac{51}{3^3}, \frac{31^7}{31^6}, \frac{\overline{5a}}{23}$. **3.** a) $\frac{10}{10}$; b) $\frac{14}{7}$; c) $\frac{27}{9}$; d) $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. **4.** $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ pentru că $35 \cdot 20 = 700$ și $100 \cdot 7 = 700$. **5.** a) $\frac{39}{7}$; b) $\frac{33}{5}$; c) $\frac{93}{9}$; d) $\frac{22+a}{11}$. **6.** a) <; b) <; c) >; d) >; e) >; f) <. **7.** $2n - 3 < 15$, deci n poate fi 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8. **8.** $a = 3$, $b = 2$, $3 > 2$. **9.** Dacă $a + b = 4$, avem $a = 1$ și $b = 3$, iar dacă $a + b = 3$, avem $a = a$ și $b = 2$; $a + b = 2$ și $a + b = 1$ nu se poate. **10.** a) 6, 7, 8, 9 și 10; b) 31, 32, 33 și 34. **11.** a) 0 și 1; b) 3 și 4; c) 10 și 11; d) 7 și 8. **12.** $\frac{8}{10}, 1, \frac{11}{10}, \frac{17}{10}, 2, \frac{21}{10}, 3\frac{2}{10}$.

Test de autoevaluare. **1.** d). **2.** c). **3.** a). **4.** Fracția se află între numerele 7 și 8. **5.** $a = 1$ și $b = 4$ sau $a = 2$ și $b = 3$. **6.** Ordinea crescătoare este $\frac{4}{15}, \frac{7}{15}, \frac{11}{15}, 1, 1\frac{1}{15}, \frac{18}{15}, 2, \frac{32}{15}$.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **2.** subunitare: $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}$ și $\frac{5}{7}$, iar supraunitare: $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{5}$. **4.** a) 9; b) 11; c) 11; d) 9.

Amplificarea și simplificarea fracțiilor. **1.** a) $\frac{3}{6}$; b) $\frac{9}{21}$; c) $\frac{15}{12}$; d) $\frac{36}{45}$; e) $2\frac{6}{9}$. **2.** a) $\frac{10}{14}$; b) $\frac{15}{21}$; c) $\frac{25}{35}$; d) $\frac{35}{49}$; e) $\frac{50}{70}$. **3.** a) 350%; b) 60%; c) 110%; d) 85%; e) 148%. **5.** a) $\frac{2}{6}, \frac{6}{4}, \frac{12}{20}, \frac{18}{22}, \frac{50}{100}$; b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}, \frac{11}{17}, \frac{41}{104}$; c) $\frac{5}{4}, \frac{6}{9}, \frac{7}{3}, \frac{11}{15}, \frac{20}{50}$. **6.** 4; 8; 6; 10; 15; 18. **7.** $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 4\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}$. **8.** Fracțiile se obțin prin simplificarea fracției date cu divizori comuni ai lui 32 și 48; sunt 4 răspunsuri posibile. **9.** a) $\frac{24}{28}$; b) $\frac{42}{49}$; c) $\frac{90}{105}$; d) $\frac{150}{175}$. **10.** a) $\frac{45}{25}$; b) $\frac{81}{45}$; c) $\frac{198}{110}$; d) $\frac{990}{550}$. **11.** Variantele de numărător comun pentru cele 3 fracții sunt 30, 60 sau 90. **12.** Un posibil numitor ar putea fi 18, dar și orice alt multiplu al acestuia. **13.** a) $\frac{30}{24}$; b) $\frac{15}{12}$; c) $\frac{5}{4}$. **14.** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{13}{20}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{4}$. **15.** a) Amplific $^{2)}\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, deci $\frac{7}{8} > \frac{3}{4}$; b) Simplific $\frac{12}{30}^{(2} = \frac{6}{15}$ deci $\frac{12}{30} < \frac{7}{15}$; c) Simplific $\frac{16}{18}^{(2} = \frac{8}{9} > \frac{8}{11}$. **16.** a) a trebuie să fie o cifră pară; b) b poate fi 5 sau 0; c) Îi dăm valori lui c toate cifrele și studiem pentru fiecare fracție dacă se poate simplifica.

Aducerea fracțiilor la un numitor comun. **1.** a) 4 și 12; b) 8 și 16; c) 9 și 18; d) 15 și 30; e) 5 și 30; f) 3 și 18;

g) 7 și 42; h) 11 și 66; i) 3 și 45; j) 1 și 30; k) 1 și 88; l) 1 și 84. **2.** Un numitor comun ar putea fi: a) 30; 20; 15; 24; 6; b) 8; 27; 21; 30; 24; c) 18; 60; 40; 50; 245; d) 84; 150; 120; 160; 240. **3.** a) $\frac{5}{8} = \frac{10}{16} > \frac{9}{16}$; b) $\frac{24}{18} = \frac{12}{9} > \frac{11}{9}$; c) $\frac{9}{16} = \frac{27}{48}, \frac{7}{12} = \frac{28}{48}, \frac{9}{16} < \frac{7}{12}$; d) $\frac{6}{12} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} < \frac{5}{8}$; e) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} > \frac{7}{12}$; f) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$. **4.** Falsă pentru că $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} < \frac{4}{9}$. **5.** $65\% = {}^{(5}\frac{65}{100} = \frac{13}{20}, {}^{4)}\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, Ioan a parcurs mai mult, deci el este mai aproape de casă. **6.** $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ și $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$, deci Ana a băut mai mult.

Adunarea și scăderea fracțiilor. **1.** a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{22}{15}$; d) $\frac{14}{19}$; e) $\frac{23}{35}$. **2.** a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{6}{13}$; c) $\frac{16}{25}$; d) $\frac{17}{43}$; e) $\frac{13}{50}$. **3.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{7}$; d) $\frac{2}{35}$; e) $\frac{7}{16}$; f) $\frac{3}{2}$. **5.** a) $\frac{17}{8}$; $\frac{23}{9}$; $\frac{4}{3}$; 2; $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{5}{14}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{12}$; c) $\frac{36}{35}$; $\frac{127}{88}$; $\frac{1}{50}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{71}{30}$; d) $\frac{25}{18}$; $\frac{29}{36}$; $\frac{31}{40}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{25}{16}$; e) $\frac{5}{24}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{17}{60}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{29}{18}$. **6.** $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{6-4-1}{6} = \frac{1}{6}$ este suprafața cultivată cu roșii, deci egală cu suprafața cultivată cu morcovi. **7.** a) $5\frac{7}{10}$; $5\frac{5}{8}$; $10\frac{1}{9}$; $13\frac{1}{8}$; b) $2\frac{1}{3}$; $3\frac{11}{12}$; $\frac{3}{5}$; $4\frac{1}{7}$. **8.** a) Este adevărat pentru că $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}, \frac{1}{2} = \frac{9}{18}$, deci $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{9}$ din carte a citit a doua zi. **9.** $3\frac{4}{5} = \frac{3}{1} + \frac{4}{5} = \frac{15+4}{5} = \frac{19}{5}$, $\frac{29}{11}$, $\frac{71}{15}$, $\frac{56}{10}$.

Probleme recapitulative. **2.** a) 4, 420; b) 6, 180; c) 12, 360. **3.** a) $\frac{6}{25}$; b) $\frac{12}{25}$; c) $\frac{6}{5}$; d) $\frac{5}{2}$. **4.** a) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{20}{37}$, $\frac{10}{19}$, $\frac{20}{39}$; b) $\frac{5}{9}$, $\frac{10}{19}$; c) $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{5}$. **5.** $\frac{30}{81}<\frac{14}{27}<\frac{5}{9}<1\frac{4}{27}<1\frac{2}{9}<1\frac{1}{3}$. **6.** a) <; b) <; c) >; d) <; e) =; f) <. **7.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{4}$; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) 1; f) $\frac{5}{12}$. **8.** a) $\frac{53}{36} = 1\frac{17}{36}$; b) $\frac{61}{16} = 3\frac{13}{16}$; c) $\frac{11}{15}$; d) $\frac{31}{11} = 2\frac{9}{11}$.

Înmulțirea fracțiilor ordinare. **2.** a) $\frac{5}{24}$; b) $\frac{21}{20}$; c) $\frac{14}{3}$; d) $\frac{2}{9}$; e) $\frac{5}{6}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{3}{2}$. **4.** a) 1; b) $\frac{7}{3}$; c) $\frac{5}{6}$. **5.** a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{5}{4}$; c) 3; d) 2; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{29}{30}$. **6.** 150 litri și $\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$kg de sare (5 kg și un sfert); $155\frac{1}{4}$ kg cântărește saramura pentru cele 5 butoaie. **7.** a) $\frac{1}{8}$; b) 1; c) $\frac{1}{25}$; d) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{50}{49} = \frac{50}{49} = 2$.

Împărțirea fracțiilor. **2.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d)n $\frac{2}{5}$. **3.** a) $\frac{4}{15}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{7}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 5. **4.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{9}{16}$; c) $\frac{1}{30}$; d) $\frac{1}{14}$; e) $\frac{441}{80}$; f) $\frac{8}{5}$; g) $\frac{41}{30}$; h) $\frac{21}{10}$. **5.** $13\frac{1}{2}:\frac{2}{5} = \frac{27}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{135}{4} = 33\frac{3}{4}$, deci ajung pentru 33 de copii, și îi mai rămâne material. **6.** $\frac{5}{4} > \frac{5}{9}$, Nadia. Prin înmulțire/împărțire cu o fracție subunitară se obține o fracție mai mică/mai mare decât cea inițială.

Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară. **2.** a) 12 m; b) 9 litri; c) 60 lei; d) 30 km; e) 45. **4.** 31. **5.** a) 3 m; b) 2 ore; c) $2\frac{1}{2}$ km; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{16}$; f) $\frac{7}{10}$; g) 1. **7.** a) 48; b) 100; c) 20; d) 60; e) 120; f) 200. **8.** $\frac{3}{7}$ din 28 =12 băieți în clasă, 16 fete în clasă, diferența este 4. **9.** 24 km prima zi, 16 km a doua zi. **10.** 24 lei ieftinirea, 86 lei prețul după ieftinire. **11.** a) Jumătate din bazin înseamnă 50% deci este nevoie de 2 ore și jumătate; la ora 10:30; b) De la 8 la 12 sunt 8 jumătăți de oră, deci este umplut 80% din 2000 litri, adică 1600 litri. **12.** 20% din 80 lei este 16 lei, deci prețul redus este de 64 lei, deci nu ajung cei 50 de lei.

Probleme recapitulative. **1.** b). **2.** a). **3.** b). **4.** a) 210; b) $\frac{3}{2}$; c) 63. **5.** a) 1; b) 8. **6.** a) $\frac{2}{5} \cdot 650 + 8 = 268$ km, deci este adevărat; b) a doua zi parcurg 20% din 650, adică 130 km și mai rămân 252 km pentru a treia zi. **7.** a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 5; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2}$; g) 1; h) $\frac{1}{9}$; i) $\frac{1}{5}$. **8.** a) 88; b) 7. **9.** 209 km. **10.** 40, 30, 35 și 55.

Test de autoevaluare. **1.** $a = 9$ și $b = 1$; **2.** numitor comun 36, $\frac{7}{12} < \frac{11}{18}$; **3.** $\frac{2}{3}$; **4.** a) $\frac{4}{7}$; b) 77 m; **5.** $\frac{8}{11}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{4}{15}$. **6.** a) 1; b) $\frac{5}{12}$. **7.** **a)** 15% din 800 este 120 lei (ieftinirea), deci prețul după ieftinire este 680 lei; b) 15% din 680 lei este 102 lei, deci noul preț este 782 lei.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **1.** a) >; b) <; c) <. **2.** a) 36>35; b) $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$. **3.** 26%, 35%, 40%, 50%, 52%. **4.** a) $40\% < \frac{11}{20} < \frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{30} < \frac{7}{25} < \frac{17}{25}$. **5.** a) x este cifră pară; b) x poate fi 1, 4 sau 7; c) x poate fi 0 sau 5. **6.** a) Cea mai mare $\frac{41}{15}$, cea mai mică $\frac{41}{95}$; b) Cea mai mare $\frac{78}{83}$, cea mai mică $\frac{72}{83}$; c) Cea mai mare $\frac{171}{30}$, cea mai mică $\frac{171}{38}$. **7.** a) 6; b) 1; c) 2; d) $1\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{3}$; f) 1; g) $\frac{1}{8}$; h) 4; i) $\frac{1}{4}$. **8.** 1280 lei. **9.** a) În depozit rămâne $\frac{4}{9}$ din cantitate, care este mai mică decât $\frac{5}{9}$; b) 13 tone vândute, $10\frac{2}{5}$ tone rămase. **10.** 3 fracții supraunitare și 2 fracții echiunitare. **11.** $\overline{ab} + 3 = \overline{ba} + 12$, deci $10a + b + 3 = 10b + a + 9$, adică $a = b + 1$ și sunt 8 fracții. **12.** $\frac{\overline{a0a} + \overline{a0}}{51} = {}^{(3}\frac{111 \cdot a}{51} = \frac{37 \cdot a}{17}$.

Fracții zecimale. **2.** a) 0,5; b) 1,9; c) 0,08; d) 0,34; e) 1,72; f) 1,62; g) 14,018. **3.** a) 1; b) 1; c) 5; d) 4; e) 174; f) 4. **4.**

Fracția zecimală	Partea întreagă	Cifra zecimilor	Cifra sutimilor	Cifra miimilor	Numărul de zecimi
12,47	12	4	7	0	124 de zecimi
107,08	107	0	8	0	1070 zecimi
0,5168	0	5	1	6	5 zecimi
7594,587	7594	5	8	7	75945 zecimi

5. 0,3; 8,7; 0,75; 0,09; 48,5; 15,87; 5,978; 10,08; 25,179. **6.** a) $\frac{124}{100}$; b) $\frac{172}{10}$; c) $\frac{14}{1000}$; d) $\frac{10007}{100}$; e) $\frac{8751}{1000}$; f) $\frac{3415}{100}$. **7.** a) 7,4; b) 4,25; c) 1,3; d) 2,68; e) 10,24; f) 4,6. **8.** a) $\frac{13}{5}$; b) $\frac{2}{25}$; c) $\frac{3}{20}$; d) $\frac{17}{4}$; e) $\frac{15}{4}$; f) $\frac{117}{50}$.

Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. **1.** Între: a) 0 și 1; b) 3 și 4; c) 5 și 6; d) 23 și 24. **2.** a) <; b) >; c) >; d) <; e) <; f) =. **4.** a) 8; b) 10; c) 84. **5.** 0,005,97 < 0,89 < 1,04 < < 1,997 < 2,05 < 2,1. **6.**

Fracția zecimală	Aproximarea prin adaos la ...		Aproximarea prin lipsă la ...		Rotunjirea la întreg
	întreg	zecime	întreg	zecime	
7,321	8	7,4	7	7,3	7
27,07	28	27,1	27	27	27
54,63	55	54,7	54	54,6	55
317,554	318	317,6	317	317,5	318

7. a) 0,8; 49,3; 7218,5; b) 1,24; 0,89; 152,82; c) 29; 1; 16. **9.** 3 puncte. **10.** n poate fi orice număr de la 1481 până la 7220, deci sunt 5740 de numere. **11.** a) 9; b) 8 sau 9.

Test de autoevaluare. **1.** a) 17,54; b) 5,17. **2.** a) $\frac{73}{1000}$; b) $\frac{49}{4}$. **3.** $a = 162$, $b = 25$ și $a + b = 187$. **4.** a) 17,24 < < 19,53; b) 7,215 > 7,125; c) 31,47 < 31,49. **5.** Numerele sunt 12, 13, 14, ..., 58 și sunt în număr de 58 – 12 + 1= = 47. **6.** 24 + 15 + 8 = 47.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **1.** a) $\frac{6}{25}$; b) $3\frac{1}{2}$; c) $\frac{16}{25}$; d) $17\frac{4}{5}$; e) $7\frac{3}{100}$; f) $8\frac{3}{4}$. **2.** 2,85 lei. **4.** Transformăm fracțiile ordinare în fracții zecimale: 0,034; 0,15; 0,2; 1,34; 1,5; 1,8. **5.** a) 1,1; b) 3,6; c) 14,87; d) 0,028; e) 3,17; f) 15,04; g) 2,5; h) 1,07; i) 3,6; j) 2,25; k) 1,28; l)2,76. **6.** b) 0,08; c) 2,31; d) 20,5. **7.** 42. **8.** 235, 236, 237, 238, 239 și 240.

Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. **1.** a) 5,9; b) 20; c) 10,15; d) 30; e) 36,7; f) 156,88. **2.** a) 13,2; b) 65,24; c) 89,34; d) 34,48; e) 38,73; f) 82,78. **3.** a) 37,4; b) 113,57; c) 0,444; d) 10,79; e) 24,555; f) 46,34. **4.** a) 36,9; b) 39,2; c) 8; d) 30. **6.** 1,55 km. **7.** b) 30,42; c) 69,35; d) 51,82; e) 5,49; f) 60; g) 6. **8.** a) rotunjirea sumei este 34, suma rotunjirilor este 34; b) rotunjirea sumei este 53, suma rotunjirilor este 54. **9.** 0,4 + 1,5 + 2,6 + 3,7 + 4,8 + 5,9 = 18,9. **11.** 35,95 km. **13.** 16,5. **14.** $\overline{a,00} - \overline{0,aa} = 6,23$, $a = 7$.

Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale. **1.** a) 175,2; b) 8; c) 345; d) 0,7; e) 247300;

f) 1. **3.** 1,75·10 + 2,15·10 = 39 lei, sau (1,75 + 2,15)·10 = 39 lei. **4.** a) 132; b) 1729; c) 224; d) 21,7; e) 20; f) 14. **5.** a) 25,5; b) 2,25; c) 19,2; d) 1500. **6.** a) 637 = 63,7·10; 637 = 6,37·100; b) 57 = 5,7·10; 57 = 0,57·100; c) 124,5 = = 12,45·10; 124,5 = 1,245·100. **7.** a) 77; b) 138; c) 253. **8.** 270. **9.** 3. **10.** a) 65; b) 96; c) 20,7; d) 450,16; e) 909,15. **11.** 61,5 kg cartofi a vândut a doua zi, 86,1 kg în total. **12.** 4,62 kg. **13.** 21,25 m de șnur, 47,8125 lei. **14.** a) 270,9; b) 114,9; c) 8,9. **15.** 147,95. **16.** 420 lei.

Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală. **1.** a) 3,75; b) 7,4; c) 27,375; d) 48,65; e) 10,5625; f) 8,016. **2.** a) 9,(6); b) 6,(81); c) 25,(42); d) 12,(57); e) 30,(571428); f) 22,(846153). **3.** a) 36,1(6); b) 0,5(3); c) 17,2(3); d) 2,3(27); e) 10,7(72); f) 89,0(714285). **4.** a) 21,57; b) 29,25; c) 3,52; d) 37,95; e) 10,7; f) 7,174. **5.** a) 0,58(3); b) 6,3(18); c) 13,(63); d) 22,3(7); e) 23,(27); f) 6,1(142857). **6.** a) 4,46; b) 18,29; c) 16,84; d) 0,53; e) 1,07; f) 3,32. **7.** a) >; b) <; c) <; d) <; e) >; f) >. **8.** a) $a < b$; b) a 15-a zecimală a lui a este 2, iar a 15-a zecimală a lui b este 5; c) 72 – 51 = 21.

Media aritmetică a două sau mai multor numere naturale. **1.** a) 15; b) 10; c) 13,5; d) 22,(3); e) 8,75; f) 9. **2.** 63,6. **3.** 20. **4.** 13. **6.** 15 și 17. **7.** 13. **8.** 15. **9.** 6,6°C.

Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale la un număr natural nenul. **1.** a) 6,528; b) 0,172; c) 23,18; d) 5,17; e) 0,155; f) 0,0215. **2.** a) 3,8; b) 0,15; c) 0,25; d) 1,2; e) 8,2; f) 52,35. **3.** a) 8,175; b) 74,68; c) 10,9; d) 346,06. **4.** a) 9,57; b) 19,26; c) 2,86; d) 0,65; e) 0,16; f) 9,49. **5.** 3,50 lei. **6.** Folosind metoda reducerii la unitate, 91,25 : 25 = 3,65 lei costă un marker, 25,55 lei costă șapte. **7.** 1,25 lei. **8.** 127,5 km prima zi, 255 km a doua zi și 510 km a treia zi. **9.** 23,7 și 94,8. **10.** 7,55.

Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule.

1.

a	b	$c=a:b$	$a:c$	$b·c$
5,6	0,2	28	0,2	5,6
12,1	1,1	11	1,1	12,1
30,672	2,16	14,2	2,16	30,672
25,56	0,3	8,52	0,3	25,56
19,6	0,014	1400	0,014	19,6
239,4	0,35	684	0,35	241,4
168,48	5,2	32,4	5,2	168,48

2. a) 10; b) 0,1; c) 10; d) 0,1; e) 0,01; f) 100. **3.** a) 100; b) 10; c) 67,5; d) 1,5; e) 952; f) 1700. **4.** 14 covrigi. **5.** 21 lei. **6.** 13155. **7.** a) 0,09; b) 0,88; c) 13,33; d) 0,96. **8.** 16 borcane (evident că le-a mai rămas niște dulceață să guste ☺)

Număr rațional. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară. **1.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{14}{99}$; c) $\frac{23}{9}$; d) $\frac{499}{33}$; e) $\frac{235}{11}$; f) $\frac{23}{99}$; g) $\frac{122}{225}$; h) $\frac{2}{45}$. **2.** a) $2,(7) = \frac{25}{9} > \frac{23}{9}$; b) $\frac{33}{10} = 3,3 < 3,(36)$; c) <; d) >; e) <. **4.** a) 0,1; b) 0,11; c) 0,7; d) 2,28; e) 0,015; f) 1,25. **5.** a) 0,25; b) 1,75; c) 18 ; d) 1,24. **6.** Nu. **7.** a) 1; b) 4; c) $\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$; d) $\frac{37}{50}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $1\frac{5}{18}$. **9.** a) 3; b) $\frac{7}{9}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{4}$. **10.** a) 14; b) 7; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 10. **12.** b) 45. **13.** 63,8. **14.** a) 978,75 lei; b) 30 cutii.

Probleme recapitulative. **1.** a) 100; b) 1000; c) 100; d) 0,52; e) 0,12; f) 2,022. **2.** c). **3.** d). **4.** a) 100; b) 130,382; c) 13,5; d) 3,43; e) 126,41; f) 4,01; g) 2,7; h) 18,5; i) 12,13. **5.** 177,6. **6.** 4,4. **7.** a) 20,5; b) 29; c) 11,6; d) 9; e) 11; f) 8. **8.** a) 9,9; b) 107,5; c) 5; d) 3; e) 1; f) 800. **9.** 2,15. **10.** a) 1,27; b) 4,58; c) 0,012. **11.** 24. **12.** a) >; b) <; c) >; d) >; e) <; f) >. **13.** a) 2; b) $\frac{4}{9}$; c) 1; d) $\frac{1}{3}$;e) 25; f) $\frac{5}{9}$. **14.** a) $a > b$; b) 54, respectiv 55; c) 7, respectiv 2;

d) 457 – 207 = 250. **15.** 42,7 km/h · 3,5 ore = 149,45 km. **16.** a) 25,8 kg; b) ceapă, ardei, morcovi, roșii, cartofi; c) 86,29 lei.

Test de autoevaluare. **1**. c); **2**. d); **3**. a); **4**. b); **5**. b); **6**. c); **7**. c); **8**. b); **9**. c); **10**. a) 11,7; b) 0,1; c) $\frac{17}{20}$; **11**. a) 79,5 lei costă cele 3 pizza, 20% din 79,5 este 15,9 lei; b) 13,97 lei, aproximat prin adaos la 14 lei.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **1.** a) 373; b) 2,2; c) 78,5; d) 41,3; e) 3; f) 4. **2.** a) 7,125; b) 12,5; c) 12,15; d) 5,7(4); e) 4,(17); f) 12,(5). **3.** 22. **4.** a) 50,8; b) 54,4; c) 49,2; d) 10; e) 348,4; f) 305. **5.** 0,9 m. **6.** a) 44; b) 24; c) 49; d) 10; e) 12; f) 62. **7.** 339,03. **8.** 1,31 m. **9.** 27,25 km. **10.** a) 5; b) $\frac{3}{4}$; c) 4; d) 100; e) 6; f) 1. **11.** a) $a = 10,8$ și $b = 2,7$; b) $a : 8 = 1,35$ și $b : 2 = 1,35$ deci numerele sunt egale; c) $a : b = 4$ și $3a - 10b = 5,4$. **12.** 16. **13.** $a + b + c = 3b$, $a + c = 2b$, deci $(a + c) : 2 = b$. **14.** Nu, pentru că media celor trei note ar fi 8,(3) care se rotunjește la 8.

Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții. **2.** 303,03 hm. **3.** 60 lădițe, 1,2 t roșii. **4.** 600 g. **5.** 5030 kg ionatane, 2515 kg delicios, 2515 kg golden. **6.** 0,75 lei. **7.** 107,50 lei. **8.** 36,75 lei. **9.** 5 ore. **10.** 15 lei. **11.** 19,5 hl, 11,5 hl. **12.** 0 lei. **13.** 3,2 km, 2,4 km, 2,4 km. **14.** 24 roșii. **15.** 15 bulbi de lalele și 10 bulbi de crini. **16.** 585 lei. **17.** 972 kg. **18.** 30 meri, 15 peri, 51 pruni și 33 caiși, 4128 lei. **19.** Umplem vasul de 9 *l* și turnăm din el 4 *l* în vasul mic (rămân 5 *l*). Răsturnăm apa din vasul de 4 *l* și îl umplem din nou din cel de 9 *l* (în care rămâne 1 *l*). Golim vasul mic și turnăm în el 1 *l* de apă din vasul mare. Vasul mare (rămas gol) este din nou umplut cu apă (9 *l*). Turnăm din acest vas apă în vasul mic până se umple (3 *l*). În vasul de 9 *l* au rămas 6 *l*. **20.** Numerotăm cutiile cu numerele 1, 2, 3, ... , 7 și luăm din fiecare cutie atâtea batoane de ciocolată cât arată numărul cutiei (din cutia nr. 1 luăm un baton, din cutia nr. 2 luăm 2 batoane...). Avem 1 + 2 + ... + 7 = 28 (batoane). Dacă toate batoanele ar fi de 100 g, atunci cele 28 de batoane ar cântări 2800 g. Cântărim cele 28 de batoane (sigur nu obținem 2800 g). Dacă obținem 2790 g înseamnă că lipsesc doar 10 g, deci un singur baton are 90 g și deci cutia nr. 1 are batoanele mai ușoare. Dacă obținem 2780 g, lipsesc 20 g, deci 2 batoane au 90 g și deci cutia nr. 2 are batoanele mai ușoare. Astfel aflăm cutia mai ușoară.

3. ELEMENTE DE GEOMETRIE

Lungimea unui segment. **5.** 9 cm. **7.** 9 cm, 12 cm, 8 cm. **8.** a) 9,5 cm; b) 2,5 cm. **9.** Sunt două cazuri: dacă ordinea punctelor este $M–N–P$, atunci $MP = 10$ cm, iar dacă ordinea este $M–P–N$, atunci $MP = 1,6$ cm. **10.** a) 6,5 cm; b) 10 cm; c) 8 cm. **11.** 7,1 cm. **12.** 9,5 cm. **13.** a) $AF = FD = DB = 3$ cm, $AB = 9$ cm; b) Se calculează AE și BE și se obține că E este mijlocul segmentului AB. **14.** a) $BD = AD - AB = 9$ cm, și $AC = 9$ cm, deci segmentele sunt congruente; b) Se calculează CD. **15.** $AB + AC = BC$, deci punctele sunt coliniare și ordinea este $B–A–C$ sau $C–A–B$. **16.** $PM + MN + NO = PO$, coliniare, ordinea $P–M–N–O$.

Test de autoevaluare. I. **1**. Punctele M și P sunt *identice*. **2**. Punctele A și B sunt *distincte* sau *diferite*. **3**. Punctele A, M și E sunt *coliniare*. **4**. Punctul B este *exterior* dreptei d. **5.** Punctul E *aparține* dreptei d. **6**. Punctele B și F sunt în *semiplane* diferite determinate de dreapta d. **II. 7.** a). **8.** d). **9.** b). **III. 10**. b) Nu sunt semidrepte opuse pentru că nu formează o dreaptă. **11**. $BE = 14$ cm.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **4.** a) $CD = 6$ cm; $AC = 7$ cm; $BD = 9$ cm; b) Ambele segmente au lungimea 3 cm, deci sunt congruente. **5.** 5,5 cm. **6.** 10,5 cm. **7.** 5 cm. **8.** a) $C–A–B$ sau $B–A–C$; b) B

este simetricul lui *C* față de *A*. **9.** 17,6 cm. **10.** *AM* = *MB* = 4 cm, *CM* = 2 + 4 = 6 cm, *MD* = 10 – 4 = 6 cm. *CM* și *MD* au aceeași lungime, deci sunt congruente.

Măsura unui unghi. **4.** a) 40°; b) 120°; c) 60°; d) 120°. **9.** Sunt două cazuri: dacă *NR* este în interiorul unghiului *MNP*, atunci unghiul *PNR* este ascuțit; dacă *NR* este în exterior, unghiul *PNR* est eobtuz. **10.** Într-un caz este ascuțit și într-un caz este drept. **11.** obtuz; ascuțit; drept.

Calcule cu măsuri de unghiuri. **6.** a) $97^0 48'$; b) $55^0 42'$; c) $39^0 38'$; d) $58^0 38'$. **7.** 45^0 și 15^0.

Unghiuri congruente. **4.** Au aceeași măsură, deci sunt congruente.

Test de autoevaluare. **1.** d). **2.** c). **3.** b). **4**. c). **5.** a) 75°55'; b) 64°30'. **6.** Este unghi drept atunci când (*CL* este în interiorul unghiului *MCN* și este unghi alungit, atunci când (*CL* este în exteriorul unghiului *MCN*. **7** a) Prin măsurare obținem că unghiul are măsura de 90° sau $\sphericalangle FOI$ = 30°+30°+30°= 90°; b) Cele două unghiuri au măsura de 60° prin măsurare sau calcul.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **3.** $\sphericalangle AOC$ = 80° când semidreapta este în interior și $\sphericalangle AOC$ = 160° dacă este în exterior. **4.** Sunt două cazuri: 80°, respectiv 20°.

5.

$\sphericalangle A$	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle A + \sphericalangle B$	$\sphericalangle A - \sphericalangle B$	$3 \cdot \sphericalangle A$	$2 \cdot \sphericalangle B$	$3 \cdot \sphericalangle A - 2 \cdot \sphericalangle B$
35°	25°	60°	10°	105°	50°	65°
50°	40°	90°	10°	150°	80°	70°
30°40’	20°10’	50°50’	10°30’	92°	40°20’	51°40’

6. 130°. **7.** 30°. **8.** a) 24°; b) 40°. **9.** $\sphericalangle MAC$ = 140°, $\sphericalangle MAN = \sphericalangle NAC$ = 70°, $\sphericalangle BAN$ = 90°, deci este unghi drept.

Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări ale unităților de măsură. **1.** d, a, d, b. **2.** F, F, A, A. **6.** Ana. **7.** a) 60 cm; b) 110 cm; c) 50 cm; d) 7,2 cm. **8.** 20 m, 23 m. **9.** 31 m, 33 m, 35 m. **10.** 32 cm. **11.** 50 cm, 51 cm, 52 cm. **12.** 27 m, 32 m, 34 m. **13.** 50. **14.** 20 cm. **15.** 33,16 m. **16.** 21 m. **17.** 36 m și 9 m. **18.** 378 m. **19.** 8 zile.

Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului. Aria dreptunghiului. Transformări ale unităților de măsură. **3.** a) 510 dm^2; b) 828,1 m^2. **4.** a) 324 dm^2; b) 8464 m^2. **5.** 10 cm, 6,25 cm^2. **6.** 114 cm, 630 cm^2. **7.** 73,5 dm^2. **8.** a) 1000 cm^2; b) 40. **9.** a) 39 m; b) 1440 dale. **10.** 7,92 t. **11.** 35. **12.** 11,6 m, 8,41 m^2. **13.** aproximativ 590,89 lei. **14.** 6,3 m și 1,35 m. **15.** 3000 kg. **16.** 5184. **17.** 506,5 m^2. **18.** 48 cm. **19.** 225,4 m. **20.** 1440. **21.** Dreptunghi: 4 cm și 3 cm, pătrat: 3 cm. **22.** 63 cm^2. **23.** 192 cm^2. **24.** Sunt egale. **25.** 1152 m^2.

Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic. Transformări ale unităților de măsură. **6.** 1,68 m^3. **7.** 5,5 dm. **8.** 48. **9.** 10 m^3. **10.** 8 m^3. **11.** 3360 m^3. **12.** a) 22125 cm^3; b) aproximativ 45; c) 555,75 lei. **13.** da. **14.** 180. **15.** 11,25 dm. **16.** 2 l. **17.** 150 zile. **18.** 64; 8; 16; 24; 16. **19.** 30 cm. **20.** 41,375 cm^3. **21.** 8,82 dm^3. **22.** 720 m^3. **23.** 50 m^3. **24.** 1875 cm^3.

Test de autoevaluare. **1.** a)13,27 dm ; b) 0,102 dm^3; c) 1980 m^2; d) 10000 mm^3. **2.** a) 1,22 dam^2; b) 16 m^3. **3.** a) 25 hm^3 > 2500 dam^3 ; b) 140,1 mm < 1,41 dm. **4.** 15,555 m^2. **5.** 3 dm, 20 l. **6.** 117. **7.** 6000 cm^3.

Consolidare/remediere/stimularea performanței. **6.** Sunt egale. **7.** 7,75 cm. **8.** 0,28 m. **10.** 5,5 cm. **15.** Dacă lungimea are 5 cm fiecare pătrat are latura de 1 cm. Dacă lățimea are 5 cm, lungimea este de 5 ori mai mare. **16.** 6 cm. **17.** 120. **19.** 0,53 l.

Teste de autoevaluare - rezolvări

1. NUMERE NATURALE

Test de autoevaluare – pag. 21

1. a) 348; b) 4007; c) 286125. **2.** a) $45 < 69$; b) $120 > 36$; c) $4325 < 4352$; d) $11025 < 11125$; e) $678902 > 67890$. **3.** Ordinea crescătoare a numerelor este: 49, 89, 100, 134, 403, 752.

4.

Aproximarea prin lipsă la ...			Aproximarea prin adaos la ...			Rotunjirea		
zeci	sute	mii	zeci	sute	mii	zeci	sute	mii
1230	1200	1000	1340	1300	2000	1240	1200	1000

5. Numerele naturale impare cuprinse între 46 și 74 sunt: 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71 și 73.
6. Pentru a scrie numere de forma $\overline{91a3}$ este suficient să înlocuim cifra a cu oricare dintre cifre: 9103, 9113, 9123, 9133, 9143, 9153, 9163, 9173, 9183, 9193. Descompunerea în sistemul de numerație zecimal este, de exemplu, $9193 = 9 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 3$.

Test de autoevaluare – pag. 32

1. a) $425 + 306 = 731$; b) $609 - 587 = 22$; c) $501 \cdot 29 = 14529$; d) $3913:43 = 91$. **2.** $7133:73 = 97$, rest 52, iar proba este: $73 \cdot 97 + 52 = 7081 + 52 = 7133$. **3.** a) Respectând ordinea efectuării operațiilor avem: a) $36 \cdot 12 + 510:17 - 216:36 \cdot 5 = 432 + 30 - 6 \cdot 5 = 432$;

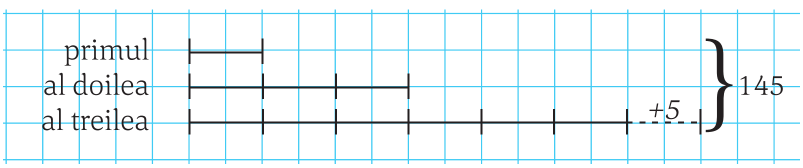
b) $(12 \cdot 15 + 18 \cdot 20 - 24 \cdot 13) : 6 = (180 + 360 - 312) : 6 = 228:6 = 38$; se poate rezolva și prin scoaterea factorului comun 6 din paranteză: $(12 \cdot 15 + 18 \cdot 20 - 24 \cdot 13) : 6 = 6 \cdot (2 \cdot 15 + 3 \cdot 20 - 4 \cdot 13) : 6 = 30 + 60 - 52 = 38$. **4.** Folosind metoda figurativă:

$145 - 5 = 140$ *10 segmente egale*

$140:10 = 14$ *primul număr*

$14 \cdot 3 = 42$ *al doilea număr*

$42 \cdot 2 + 5 = 89$ *al treliea număr*



proba: $14 + 42 + 89 = 145$

5. 7 caiete · 3 lei = 21 lei; 2 stilouri · (5 · 3 lei) = 30 lei; 3 cărți · (15 lei + 8lei) = 69 lei; 1 ciocolată · (15 lei : 3) = 5 lei. Cheltuiți: 21 + 30 + 69 + 5 = 125 lei, rest 150 – 125 = 25 lei. **6.** Folosind metoda mersului invers avem: $129:3 - 3 \cdot (11 + 3 \cdot x) + 4 = 45:9 = 5$; $43 - 3 \cdot (11 + 3 \cdot x) = 5 - 4 = 1$; $3 \cdot (11 + 3 \cdot x) = 43 - 1 = 42$; $11 + 3 \cdot x = 42:3 = 14$; $3 \cdot x = 14 - 11 = 3$; $x = 3:3 = 1$.

Test de autoevaluare – pag. 43

1. a) $2^5 = 32$; b) $24^0 = 1$; c) $5^{24} \cdot 5^{10} = 5^{24+10} = 5^{34}$; d) $17^{81}:17^{69} = 17^{81-69} = 17^{12}$; e) $(7^8)^6 = 7^{8 \cdot 6} = 7^{48}$; f) $27^{81}:9^{81} = (27:9)^{81} = 3^{81}$. **2.** a) $11^9 < 15^9$, comparând bazele; b) $7^{42} < 7^{52}$, comparând exponenții; c) $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10} = 3^{10}$; d) $7^{38} = 7^{2 \cdot 19} = (7^2)^{19} = 49^{19}$, iar $4^{57} = 4^{3 \cdot 19} = (4^3)^{19} = 64^{19}$, deci $49^{19} < 64^{19}$.
3. a) $(2^0 + 2^1 + 2^2)^4:7^2 + 7^2 = 7^4:7^2 + 7^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98$; b) $6^{18} \cdot 36^5:(6^{13})^2 + 4^{10} \cdot 7^{10}:28^9 - 25^0 - 0^{18} = 6^{18} \cdot 6^{10}:6^{26} + 28^{10}:28^9 - 1 - 0 = 6^2 + 28^1 - 1 = 36 + 28 - 1 = 63$; c) $3^{100}:[3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{10} \cdot 3^{15})^5 : 3^{27} + (4^{57}:4^{56} - 1^4)^{90} \cdot 3^8] = 3^{100}: [3^{98} + 3^{125}:3^{27} + (4-1)^{90} \cdot 3^8] = 3^{100}: (3^{98} + 3^{98} + 3^{98}) = 3^{100}: (3 \cdot 3^{98}) = 3^{100}: 3^{99} = 3$. **4.** Aducem cele 3 puteri la baza 2 și le ordonăm mai întâi: $8^{301} = 2^{903}$, $32^{119} = 2^{595}$ și $64^{83} = 2^{498}$. Sfertul celui mai mic este $2^{498}: 4 = 2^{498}:2^2 = 2^{496}$, iar jumătatea celui mai mare este $2^{903}: 2 = 2^{902}$.

Test de autoevaluare – pag. 53

1. 4 kg mere .... 12 lei; 1 kg mere .... 12:4 = 3 lei; 11 kg mere .... 3·11 = 33 lei. **2.** Notez cu x numărul $[(3 \cdot x + 11): 4 + 6]: 2 = 7$ și, folosind metoda mersului invers, avem: $(3 \cdot x + 11): 4 + 6 = 14$, $(3 \cdot x + 11): 4 = 14 - 6 = 8$, $3 \cdot x + 11 = 32$, $3 \cdot x = 21$, deci numărul este $x = 7$. **3.** O lungime și o lățime au împreună 250 m și, folosind metoda grafică, obținem că lățimea are 50 m, iar lungimea este de patru ori mai mare, deci 200 m. **4.** 3 cărți .... 4 caiete .... 800 g; 6 cărți .... 2 caiete .... 1300 g; mărim de două ori datele din a doua relație și păstrăm prima relație: 12 cărți .... 4 caiete .... 2600 g; 3 cărți .... 4 caiete .... 800 g. Prin scăderea celor două relați obținem că 9 cărți cântăresc 1800 g, deci o carte cântărește 200 g. Un caiet cântărește (800 g – 3·200 g) : 4 = 50 g.

Test de autoevaluare – pag. 62

1.

2|234	A – ultima cifră pară	5|125	A – ultima cifră este 5	3|134	F – suma cifrelor nu este divizibilă cu 3
10|230	A – ultima cifră este 0	9|567	A – suma cifrelor este 18	4|234	F – 234 nu se împarte exact la 4
100|34000	A – ultimele două cifre sunt 00	6|1236	A – 1236 se împarte exact la 6		

2. Divizorii numărului 24 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 și 24. **3.** Cel mai mic multiplu de două cifre al numărului 12 este 12, iar cel mai mare este 96 (12·8). **4.** a) numere divizibile cu 2: 0, 4, 40, 50, 54; b) numere divizibile cu 5: 0, 5, 40, 45, 50; c) numere divizibile cu 3: 45, 54. **5.** Dacă suma dintre un număr prim și un număr par este 264, atunci numărul prim trebuie să fie și el par, deci este 2, iar celălalt număr este 262.

2. FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

Test de autoevaluare – pg 75

1. d), pentru că $4 \cdot a = 20 \cdot 7$, deci $a = 35$. **2.** c), pentru că $14 < 15$ și 0 nu poate fi numitor. **3.** a), pentru că $47:11 = 4$ rest 3. **4.** Scoatem întregii din fracție $\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$, deci fracția se află între numerele 7 și 8. **5.** $\frac{5}{a+b}$ este echiunitară dacă $a + b = 5$ și, ținând cont de faptul că $a < b$, avem $a = 1$ și $b = 4$ sau $a = 2$ și $b = 3$. **6.** $1\frac{1}{15} = \frac{16}{15}$, $1 = \frac{15}{15}$, $2 = \frac{30}{15}$, ordinea crescătoare este $\frac{4}{15}, \frac{7}{15}, \frac{11}{15}, 1, 1\frac{1}{15}, \frac{18}{15}, 2, \frac{32}{15}$.

Test de autoevaluare – pag. 86

1. c), pentru că ${}^{7)}\frac{8}{11} = \frac{56}{77}$. **2.** b), pentru că $\frac{72}{108}^{(36} = \frac{2}{3}$. **3.** b), pentru că $20\% = \frac{20}{100}^{(20} = \frac{1}{5}$. **4.** c.m.m.m.c. al numerelor 12 și 18 este 36; ${}^{3)}\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$ și ${}^{2)}\frac{11}{18} = \frac{22}{36}$, deci $\frac{7}{12} < \frac{11}{18}$. Fracțiile pot fi aduse și la alt numitor comun. **5.** a) $\frac{14}{15} - \frac{2}{15} + \frac{17}{20} - \frac{7}{20} = \frac{12}{15} + \frac{10}{20} = \frac{4}{5} + \frac{10}{20} = \frac{16+10}{20} = \frac{26}{20} = \frac{13}{10}$; b) $2\frac{1}{4} - \left(\frac{5}{12} + \frac{11}{12}\right) = \frac{9}{4} - \frac{16}{12} = \frac{27}{12} - \frac{16}{12} = \frac{11}{12}$. **6.** a) $10\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5} = 12\frac{3}{5}$ litri s-au scos a doua zi, $12\frac{3}{5} - 2\frac{1}{4} = 10\frac{7}{20}$ litri a treia zi, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20} > \frac{7}{20}$, deci este adevărat că în a treia zi s-au scos mai puțini decât în prima zi; b) $50 - \left(10\frac{2}{5} + 12\frac{3}{5} + 10\frac{7}{20}\right) = 50 - 35\frac{7}{20} = 14\frac{13}{20}$ litri motorină au rămas.

Test de autoevaluare – pag. 95

1. $\frac{3}{7} = \frac{a}{21}$, $7a = 63$, $a = 9$ și $\frac{b+1}{3} = \frac{4}{6}$, $b + 1 = 2$, $b = 1$. **2.** c.m.m.m.c. al numerelor 12 și 20 este 60; ${}^{5)}\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$ și ${}^{3)}\frac{7}{20} = \frac{21}{60}$, deci $\frac{5}{12} > \frac{7}{20}$. Fracțiile pot fi aduse și la alt numitor comun. **3.** $\frac{72}{90}^{(18} = \frac{4}{5}$, simplificare directă prin c.m.m.d.c. al numerelor 72 și 90. **4.** a) $\frac{5}{6}$ din $\frac{24}{35}$ este $\frac{5}{6} \cdot \frac{24}{35} = \frac{120}{210} = \frac{4}{7}$; b) 22% din 350 m este $\frac{22}{100} \cdot 350 = \frac{7700}{100} = 77$. **5.** $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$; $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{10}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $\frac{12}{25} : \frac{18}{10} = \frac{12}{25} \cdot \frac{10}{18} = \frac{4}{15}$. **6.** a) $\frac{9}{10} : \left[\left(3\frac{5}{8} - 1\frac{3}{8}\right) : 2\frac{1}{2}\right] = \frac{9}{10} : \left[\left(\frac{29}{8} - \frac{11}{8}\right) : \frac{5}{2}\right] = \frac{9}{10} : \left(\frac{18}{8} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{9}{10} : \frac{9}{10} = 1$; b) $\frac{5}{12} : \frac{25}{9} + \frac{6}{5} \cdot \left({}^{3)}\frac{4}{6} - \frac{8}{18}\right) = \frac{5}{12} \cdot \frac{9}{25} + \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{18} = {}^{3)}\frac{3}{20} + {}^{4)}\frac{4}{15} = \frac{25}{60}^{(5} = \frac{5}{12}$.

7. a) 15% din 800 este 120 lei (ieftinirea), deci prețul după ieftinire este 800 – 120 = 680 lei; b) 15% din 680 lei este 102 lei, deci noul preț este 680 + 102 = 782 lei.

Test de autoevaluare – pag. 103

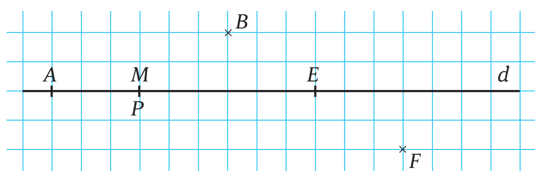
1. a) $\frac{1754}{100} = 17{,}54$; b) $5\frac{17}{100} = 5{,}17$. **2.** a) $0{,}073 = \frac{73}{1000}$; b) 12,25 $12{,}25 = {}^{(25}\frac{1225}{100} = \frac{49}{4}$. **3.** $3{,}24 = {}^{(2}\frac{324}{100} = \frac{162}{50} = \frac{a}{50}$, deci $a = 162$ și $0{,}16 = {}^{(4}\frac{16}{100} = \frac{4}{25} = \frac{4}{b}$, adică $b = 25$ și $a + b = 187$. **4.** a) 17,24 < 19,53; b) 7,215 > 7,125; c) 31,47 < < 31.49. **5.** Numerele sunt 12, 13, 14, ..., 58 și sunt în număr de 58 – 12 + 1 = 47. **6.** Aproximarea prin lipsă la întregi a numărului 24,7 este 24, aproximarea prin adaos la întregi a numărului 14,24 este 15, iar rotunjirea la întregi a numărului 8,456 este 8; 24 + 15 + 8 = 47.

Test de autoevaluare – pag. 122

1. c) 2,45 < 2,5 < 2,(5). **2.** d) (7,25 + 15,4) · 10 = 226,5. **3.** a) (215 – 124,8):100 = 90,2:100 = 0,902. **4.** b) 7 : 6 = = 1,1(6). **5.** b) (14 + 21) : 2 = 35 : 2 = 17,5. **6.** c) Rotunjirea este 32,6. **7.** c) $2,(39) = \frac{239-2}{99} = {}^{(3}\frac{237}{99} = \frac{79}{33}$. **8.** b) Între 9,2(5) și $\frac{124}{7} = 17{,}7\ldots$ sunt 8 numere. **9.** c) $\frac{26}{100} \cdot 120 = 31{,}2$. **10.** a) $3\frac{3}{5} + 178{,}5:10 - 0{,}975 \cdot 10 = 3{,}6 + 17{,}85 - 9{,}75 = 11{,}7$; b) $1{,}24 \cdot 2{,}5 + 9{,}92:3{,}1 - 6\frac{1}{5} = 3{,}1 + 3{,}2 - 6{,}2 = 0{,}1$; c) $\left(2{,}25 - \frac{2^2}{5} + \frac{2}{5^2}\right): 0{,}4(63) + 2\frac{1}{5} - 1{,}5 = \left(\frac{225}{100} - \frac{4}{5} + \frac{2}{25}\right): \frac{463-4}{990} + \frac{11}{5} - \frac{11}{10} = \left(\frac{225}{100} - \frac{80}{100} + \frac{8}{100}\right): {}^{(9}\frac{459}{990} + \frac{11}{5} - \frac{15}{10} = \frac{153}{100} : \frac{51}{110} + \frac{22}{10} - \frac{15}{10} = = \frac{153}{100} : \frac{51}{110} + \frac{22}{10} - \frac{15}{10} = \frac{153}{100} \cdot \frac{110}{51} + \frac{7}{10} = \frac{33}{10} + \frac{7}{10} = \frac{40}{10} = 4$. **11.** a) 79,5 lei costă cele 3 pizza, 20% din 79,5 este 15,9 lei; b) (79,5 – 15,9) : 5 + 1,25 = 13,97, care se aproximează prin adaos la întreg la 14 lei.

3. ELEMENTE DE GEOMETRIE

Test de autoevaluare – pag. 148



1. Punctele M și P sunt *identice*.

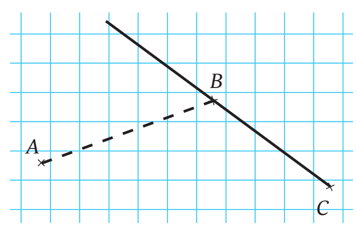
2. Punctele A și B sunt *distincte*

3. Punctele A, M și E sunt *coliniare*

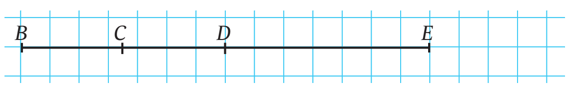
4. Punctul B este *exterior* dreptei d.

5. Punctul E *aparține* dreptei d.

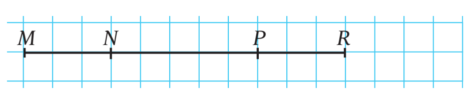
6. Punctele B și F sunt în *semiplane* diferite.



7. a) $AM = AB:2 = 12:2 = 6\,\text{cm}$. **8.** d) $HL = HE + EL = 3 + 5{,}5 = = 8{,}5\,\text{cm}$. **9.** b) $AC + CB = AB$. **10.** a) Un exemplu de desen ar putea fi cel alăturat; b) Semidreptele CA și CB nu sunt opuse pentru că nu formează o dreaptă, punctele A, B și C fiind necoliniare.



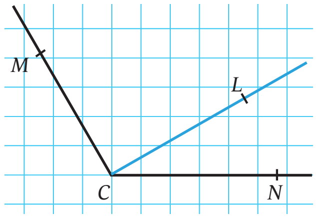
11. $BC \equiv CD$ și $BC = 3{,}5\,\text{cm}$, deci $CD = 3{,}5\,\text{cm}$ și $BD = 7\,\text{cm}$, $BD \equiv DE$, așadar $DE = 7\,\text{cm}$, iar lungimea segmentului BE este de 14 cm.



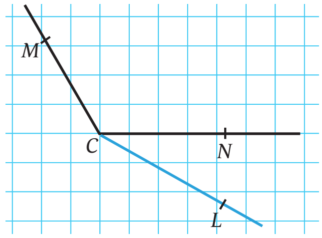
12. $PR = MR - MP = 11 - 8 = 3\,\text{cm}$, așadar segmentele MN și PR au aceeași lungime, deci $MN \equiv PR$.

Test de autoevaluare – pag. 162

1. d) ∢*AOB* este obtuz. **2.** c) Prin măsurare. **3.** b) *D* este în interiorul ∢*BOC*. **4.** c) ∢*BOD*, ∢*DOC* și ∢*BOC*. **5.** a) $45°25' + 30°30' = 75°55'$; b) $90° - 25°30' = 89°60' - 25°30' = 64°30'$. **6.** Se pot realiza două configurații:

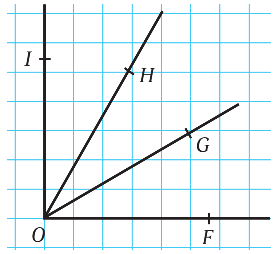


∢*MCL* =
= ∢*MCN* − ∢*LCN* = 90°,
deci ∢*MCL* este
unghi drept.



∢*MCL* = ∢*MCN* +
+ ∢*LCN* = 150° deci
∢*MCL* este unghi obtuz.

7. a) Prin măsurare obținem că unghiul are măsura de 90° sau ∢*FOI* = 30°+30°+30°= 90°; b) ∢*FOH* = ∢*FOG* + ∢*GOH* = 60° și ∢*GOI* = ∢*GOH* + ∢*HOI*, deci cele două unghiuri sunt congruente.



Test de autoevaluare – pag 174

1. a) 1,327 hm = 1327 dm ; b) 102 m^3 = 0,102 dam^3 ; c) 0,198 hm^2 = 1980 m^2 ; d) 0,01 dm^3 = 10000 mm^3. **2.** a) 1,7 ari – 150 m^2 + 10200 dm^2 = 1,7 dam^2 – 1,5 dam^2 + 1,02 dam^2 = 1,22 dam^2; b) 10200 dm^3 + 0,0071 dam^3 – 1300000 cm^3 = 10,2 m^3 + 7,1 m^3 – 1,3 m^3 = 16 m^3. **3.** a) 25 hm^3 > 2500 dam^3 = 2,5 hm^3; b) 140,1 mm = = 1,401 dm < 1,41 dm. **4.** Dacă perimetrul unui dreptunghi este 17,3 m, atunci semiperimetrul este egal cu 8,65 m. Dacă reprezentăm cu un segment lățimea și cu două segmente plus 1 m lungimea, obținem lățimea egală cu (8,65 – 1) : 3 = 2,55 m și lungimea egală cu 6,1 m. Aria este egală cu 15,555 m^2. **5.** Dacă volumul unui cub este de 27 = 3^3 dm^3, atunci latura cubului este de 3 dm. *V* = 27 dm^3 =27 l. Dacă avem deja în vas 7000 cm^3 = = 7 l apă, mai trebuie să adăugăm 20 l. **6.** Pe lățimea de 2,7 m = 270 cm putem așeza 270 cm : 30 cm = 9 plăci de faianță, iar pe lungimea de 3,9 m = 390 cm putem așeza 390 cm : 30 cm = 13 plăci. În total 13 · 9 = 117 plăci. **7.** Dacă media aritmetică a dimensiunilor este de 20 cm, putem scrie $L + l + h = 20 \cdot 3 = 60$ cm, iar dacă media aritmetică dintre lungime și lățime este de 25 cm putem scrie $L + l = 25 \cdot 2 = 50$ cm. Din diferența relațiilor obținem $h = 10$ cm. Dacă înălțimea este jumătate din lățime, atunci $l = 20$ cm și $L = 30$ cm. $V = L \cdot l \cdot h = 6\,000$ cm^3.

Test final – pag 177

I. d; b; c; a; c; a. **II.** c; c; a; d; b; d. **III. 1.** a) $a = 3{,}92 - (4{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}196 : 1{,}4) : 102 = 3{,}92 - (0{,}88 + 0{,}14) : 102 = 3{,}92 - 1{,}02 : 102 = 3{,}92 - 0{,}01 = 3{,}91 = 3{,}92 - 1{,}02 : 102 = 3{,}92 - 0{,}01 = 3{,}91$; b) $b = 1{,}9 \cdot 2{,}2 - (2{,}88 : 2{,}4 + 0{,}62 - 1{,}3) : 1{,}3 = 4{,}18 - (1{,}2 + 0{,}62 - 1{,}3) : 1{,}3 = 4{,}18 - 0{,}52 : 1{,}3 = 4{,}18 - 0{,}4 = 3{,}78$; $a > b$. **2.** a) Nu se pot forma 15 echipe. Dacă s-ar putea forma 15 echipe și ar trebui să fie număr egal de fete în fiecare dintre ele, ar trebui ca 50 să se împartă exact la 15, ceea ce este fals; b) Numărul de echipe care se pot forma în condițiile date este un divizor comun al lui 50 și 75, iar cel mai mare număr de echipe este egal cu (50; 75) = 25. **3.** a) Dacă 7 vase au capacitatea de 1,5 litri, sunt 10,5 litri în ele. Cu ceilalți 34 – 10,5 = 23,5 litri trebuie umplute vasele de 3,5 litri, dar 23,5 : 3,5 nu este un număr natural. În concluzie, nu pot fi 7 vase de 1,5 litri; b) Rezolvăm prin metoda falsei ipoteze și obținem 4 vase de 1,5 litri și 8 vase de 3,5 litri. **4.** a) ∢*AOE* = ∢*AOB* + ∢*BOC* + +∢*COD* + ∢*DOE* = *120°*; b) ∢*AOD* = ∢*AOB* + ∢*BOC* + ∢*COD* = *90°*, iar ∢*EOB* = ∢*EOD* + ∢*DOC* + ∢*COB* = *90°*, deci cele două unghiuri sunt congruente. **5.** a) Dacă semidreapta *OD* este situată în interiorul ∢*AOB* astfel încât ∢*AOD* ≡ ∢*DOB*, atunci cele două unghiuri au aceeași măsură, iar suma lor este 90°, deci fiecare dintre ele are 45°; b) ∢*DOC* = ∢*DOB* + ∢*BOC* = 45° + 135° = 180°, deci este un unghi alungit, adică semidreptele *OC* și *OD* sunt semidrepte opuse. **6.** a) Din cele două relații cu medii aritmetice obținem $L + l + h = 36$, $l + h = 16$, așadar $L = 20$ cm; b) $l = 2{,}5$ cm, $h = 13{,}5$ cm, $V = 675$ cm^3.

Programa școlară poate fi accesată la adresa: http://programe.ise.ro.

CORINT
LOGISTIC

ISBN: 978-630-6526-00-0

9 786306 526000

www.edituracorint.ro