MINISTERUL EDUCAȚIEI

Dumitru-Ion Voiculescu
Anca-Ileana Dumitrescu
Anișoara Gheorghe
Camelia-Sanda Popa
Floarea Stancu
Claudia-Vasilica Voiculescu

manual pentru
CLASA A V-A

MATEMATICĂ

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației.

Manualul este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

☎ 116 111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Dumitru-Ion VOICULESCU
Anca-Ileana DUMITRESCU
Anişoara GHEORGHE
Camelia-Sanda POPA
Floarea STANCU
Claudia-Vasilica VOICULESCU

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a V-a

Editura Paralela 45

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației nr. 4065/16.06.2022.
Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital.

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului care a primit manualul	Clasa	Școala	Anul școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1.						
2.						
3.						
4.						

*Starea manualului se va înscrie folosind termenii: *nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.*

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.

Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
Lect. univ. dr. Alexandru Negrescu, Universitatea Politehnica din București
Prof. gr. I Ion Tudor, Școala Gimnazială Băbana, jud. Argeș

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică : manual pentru clasa a V-a / Dumitru-Ion Voiculescu, Anca-Ileana Dumitrescu, Anișoara Gheorghe, ... - Pitești : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3668-3

I. Voiculescu, Dumitru Ion
II. Dumitrescu, Anca-Ileana
III. Gheorghe, Anișoara

51

Coordonator editorial: Iuliana Ene
Redactare: Iuliana Ene
Corectură: Andreea-Sorina Roșca
Tehnoredactare: Mariana Dumitru, Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broștianu
Pregătire de tipar: Marius Badea

Credite foto: shutterstock.com, dreamstime.com, wikipedia.org, evz.ro, europafm.ro, goodreads.com, citatepedia.ro, mathshistory.st-andrews.ac.uk, poezie.ro
Materiale video și audio, digitalizare:
EDITSOFT & SERVICES

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ
EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Deșteaptă-te, române!

de Andrei Mureșanu

Deșteaptă-te, române, din somnul cel de moarte,
În care te-adânciră barbarii de tirani!
Acum ori niciodată, croiește-ți altă soarte,
La care să se-nchine și cruzii tăi dușmani!

Acum ori niciodată să dăm dovezi la lume
Că-n aste mâni mai curge un sânge de roman,
Și că-n a noastre piepturi păstrăm cu fală-un nume
Triumfător în lupte, un nume de Traian!

Priviți, mărețe umbre, Mihai, Ștefan, Corvine,
Româna națiune, ai voștri strănepoți,
Cu brațele armate, cu focul vostru-n vine,
„Viață-n libertate ori moarte!" strigă toți.

Preoți, cu crucea-n frunte căci oastea e creștină,
Deviza-i libertate și scopul ei preasfânt.
Murim mai bine-n luptă, cu glorie deplină,
Decât să fim sclavi iarăși în vechiul nost' pământ!

Instrucțiuni de utilizare a manualului în format digital și tipărit

Varianta digitală a manualului cuprinde integral textul din varianta tipărită, dar conține în plus o serie de **activități multimedia** care vor face învățarea mai plăcută și mai ușoară.

Simbolurile care indică activitățile multimedia interactive de învățare:

AMII static

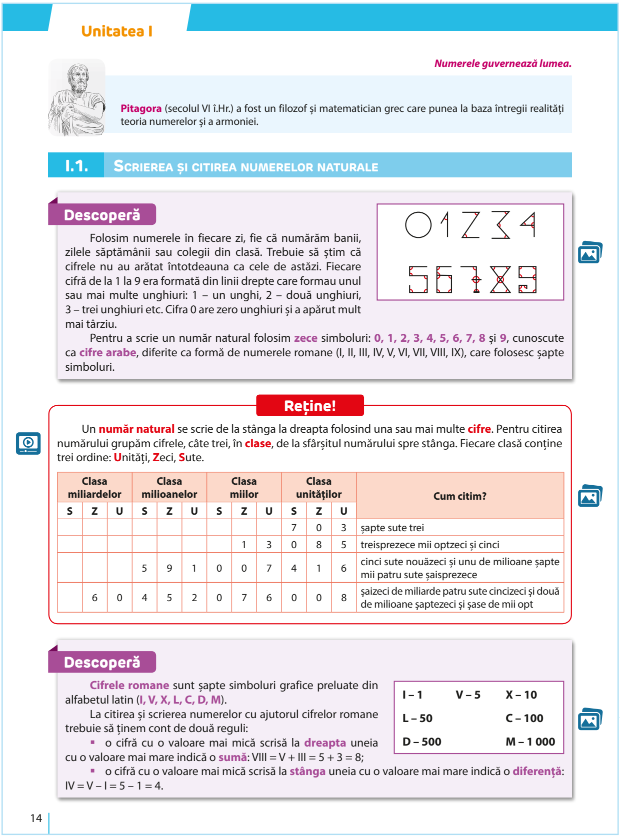
Activarea acestui buton permite vizualizarea optimizată a secvenței din manual.

AMII animat

Activarea acestui buton permite vizualizarea unui filmuleț, pentru care se pot controla începerea/întreruperea (prin butonul Start/Pauză), volumul și maximizarea ecranului.

AMII interactiv

Activarea acestui buton permite vizualizarea unor secvențe educaționale cu grad înalt de interactivitate, la finalul cărora este dat un feedback imediat. Exercițiile marcate cu acest simbol pot fi de tipul: trage și plasează, bifarea variantei corecte, asocierea unor termeni din mai multe coloane.



Unitatea I

Numerele guvernează lumea.

Pitagora (secolul VI î.Hr.) a fost un filozof și matematician grec care punea la baza întregii realități teoria numerelor și a armoniei.

I.1. SCRIEREA ȘI CITIREA NUMERELOR NATURALE

Descoperă

Folosim numerele în fiecare zi, fie că numărăm banii, zilele săptămânii sau colegii din clasă. Trebuie să știm că cifrele nu au arătat întotdeauna ca cele de astăzi. Fiecare cifră de la 1 la 9 era formată din linii drepte care formau unul sau mai multe unghiuri: 1 – un unghi, 2 – două unghiuri, 3 – trei unghiuri etc. Cifra 0 are zero unghiuri și a apărut mult mai târziu.

Pentru a scrie un număr natural folosim **zece** simboluri: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** și **9**, cunoscute ca **cifre arabe**, diferite ca formă de numerele romane (I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX), care folosesc șapte simboluri.

Reține!

Un **număr natural** se scrie de la stânga la dreapta folosind una sau mai multe **cifre**. Pentru citirea numărului grupăm cifrele, câte trei, în **clase**, de la sfârșitul numărului spre stânga. Fiecare clasă conține trei ordine: **U**nități, **Z**eci, **S**ute.

Clasa miliardelor			Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților			Cum citim?
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	
									7	0	3	șapte sute trei
							1	3	0	8	5	treisprezece mii optzeci și cinci
			5	9	1	0	0	7	4	1	6	cinci sute nouăzeci și unu de milioane șapte mii patru sute șaisprezece
	6	0	4	5	2	0	7	6	0	0	8	șaizeci de miliarde patru sute cincizeci și două de milioane șaptezeci și șase de mii opt

Descoperă

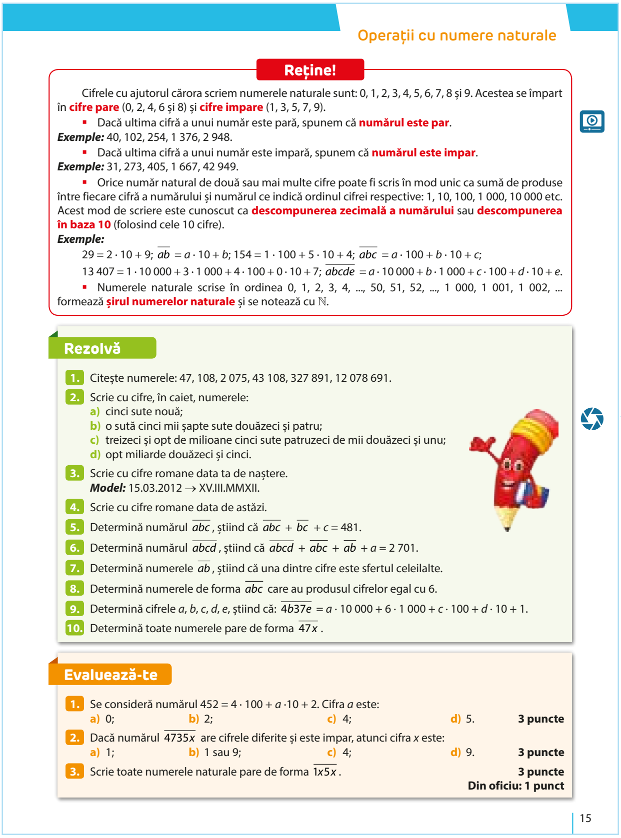
Cifrele romane sunt șapte simboluri grafice preluate din alfabetul latin (**I, V, X, L, C, D, M**).

La citirea și scrierea numerelor cu ajutorul cifrelor romane trebuie să ținem cont de două reguli:

- o cifră cu o valoare mai mică scrisă la **dreapta** uneia cu o valoare mai mare indică o **sumă**: VIII = V + III = 5 + 3 = 8;
- o cifră cu o valoare mai mică scrisă la **stânga** uneia cu o valoare mai mare indică o **diferență**: IV = V – I = 5 – 1 = 4.

I – 1 **V – 5** **X – 10**
L – 50 **C – 100**
D – 500 **M – 1 000**

14



Operații cu numere naturale

Reține!

Cifrele cu ajutorul cărora scriem numerele naturale sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9. Acestea se împart în **cifre pare** (0, 2, 4, 6 și 8) și **cifre impare** (1, 3, 5, 7, 9).

- Dacă ultima cifră a unui număr este pară, spunem că **numărul este par**.

Exemple: 40, 102, 254, 1 376, 2 948.

- Dacă ultima cifră a unui număr este impară, spunem că **numărul este impar**.

Exemple: 31, 273, 405, 1 667, 42 949.

- Orice număr natural de două sau mai multe cifre poate fi scris în mod unic ca sumă de produse între fiecare cifră a numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective: 1, 10, 100, 1 000, 10 000 etc. Acest mod de scriere este cunoscut ca **descompunerea zecimală a numărului** sau **descompunerea în baza 10** (folosind cele 10 cifre).

Exemple:

$29 = 2 \cdot 10 + 9$; $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$; $154 = 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4$; $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$;

$13\,407 = 1 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7$; $\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$.

- Numerele naturale scrise în ordinea 0, 1, 2, 3, 4, ..., 50, 51, 52, ..., 1 000, 1 001, 1 002, ... formează **șirul numerelor naturale** și se notează cu $\mathbb{N}$.

Rezolvă

1. Citește numerele: 47, 108, 2 075, 43 108, 327 891, 12 078 691.
2. Scrie cu cifre, în caiet, numerele:
   a) cinci sute nouă;
   b) o sută cinci mii șapte sute douăzeci și patru;
   c) treizeci și opt de milioane cinci sute patruzeci de mii douăzeci și unu;
   d) opt miliarde douăzeci și cinci.
3. Scrie cu cifre romane data ta de naștere.
   Model: 15.03.2012 → XV.III.MMXII.
4. Scrie cu cifre romane data de astăzi.
5. Determină numărul $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 481$.
6. Determină numărul $\overline{abcd}$, știind că $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2\,701$.
7. Determină numerele $\overline{ab}$, știind că una dintre cifre este sfertul celeilalte.
8. Determină numerele de forma $\overline{abc}$ care au produsul cifrelor egal cu 6.
9. Determină cifrele a, b, c, d, e, știind că: $\overline{4b37e} = a \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + 1$.
10. Determină toate numerele pare de forma $\overline{47x}$.

Evaluează-te

1. Se consideră numărul $452 = 4 \cdot 100 + a \cdot 10 + 2$. Cifra a este:
   a) 0; b) 2; c) 4; d) 5. **3 puncte**
2. Dacă numărul $\overline{4735x}$ are cifrele diferite și este impar, atunci cifra x este:
   a) 1; b) 1 sau 9; c) 4; d) 9. **3 puncte**
3. Scrie toate numerele naturale pare de forma $\overline{1x5x}$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

15

pentru activitate animată (film sau animație scurtă)

pentru activitate statică, de observare a unei imagini semnificative

pentru activitate interactivă

Manualul este organizat în șapte unități de învățare care acoperă integral domeniile de conținut prevăzute de programa școlară: *Operații cu numere naturale*, *Metode aritmetice de rezolvare a problemelor*, *Divizibilitatea numerelor naturale*, *Fracții ordinare*, *Fracții zecimale*, *Elemente de geometrie* și *Unități de măsură*.

Fiecare unitate de învățare cuprinde lecții de predare-învățare și la final se încheie cu un test de Recapitulare și evaluare. Unitățile mari, care tratează mai multe conținuturi, beneficiază și de o recapitulare intermediară, realizată prin două teste de evaluare stadială. Autoevaluarea se poate face pe baza baremului propus și a răspunsurilor de la finalul manualului.

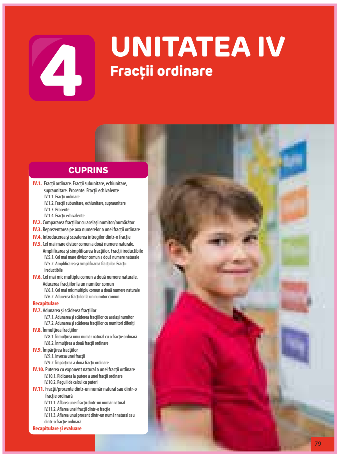
Testele sunt alcătuite astfel încât să redea cât mai fidel nivelul de performanță al elevului în aplicarea noțiunilor acumulate. Exercițiile și problemele propuse acoperă întreaga tipologie a itemilor de evaluare: obiectivi, semiobiectivi, subiectivi.

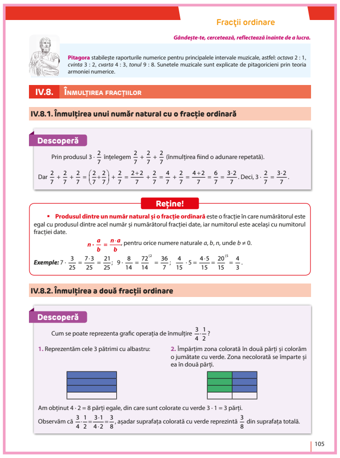
O lecție de predare-învățare are următoarea structură:

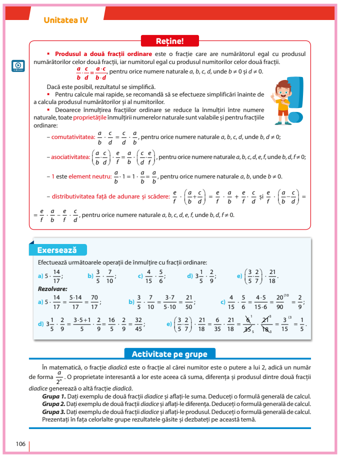
- **Descoperă** – o situație/problemă practică, prin care se face introducerea intuitivă a noilor noțiuni teoretice, prin raportare la viața cotidiană;
- **Reține!** – noțiuni teoretice importante, pe care elevul trebuie să le asimileze și care conduc la formarea și dezvoltarea competențelor specifice;
- **Exersează** – probleme reprezentative rezolvate, ce permit o mai bună înțelegere a noțiunilor nou-introduse;
- **Rezolvă** – set de exerciții practic-aplicative, ce conduc la fixarea cunoștințelor noi;
- **Evaluează-te** – minitest cu 3 itemi de evaluare, ce testează înțelegerea noțiunilor învățate în lecția respectivă, prin care elevul se poate autoevalua pe baza baremului propus. Elevul poate verifica răspunsurile date cu cele de la finalul manualului.

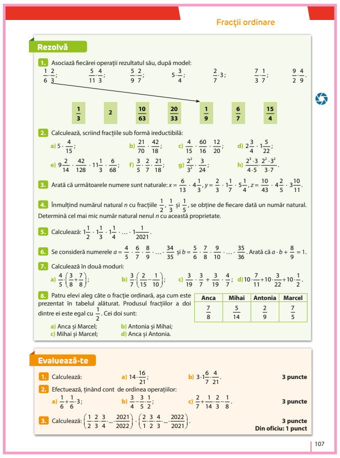
Manualul propune instrumente complementare de evaluare: activități pe grupe, în echipe sau în perechi, portofolii, proiecte interdisciplinare, investigații, jocuri.

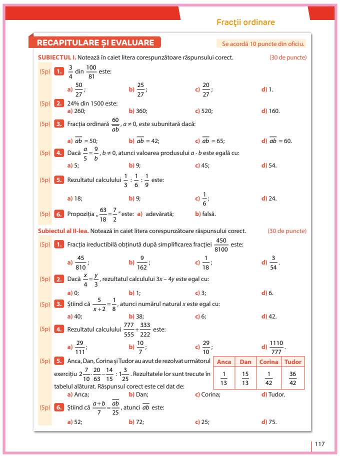
Finalul manualului cuprinde soluții pentru exercițiile propuse și pentru testele de recapitulare și evaluare.

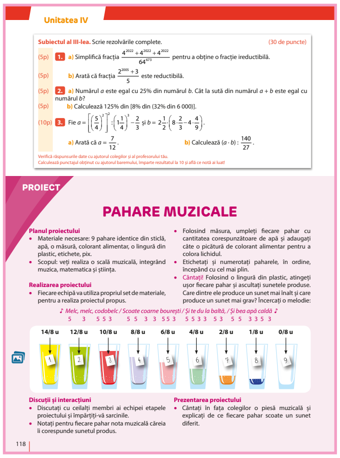












CUPRINS

UNITATEA 5 – Fracții zecimale 119

UNITATEA 6 – Elemente de geometrie

COMPETENȚE GENERALE ȘI SPECIFICE

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
   - 1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate
   - 1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate
   - 1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte

2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
   - 2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora
   - 2.2. Efectuarea de calcule cu fracții, folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice
   - 2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice

3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
   - 3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate
   - 3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale
   - 3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare

4. **Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
   - 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparări, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale
   - 4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date
   - 4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură

5. **Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
   - 5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
   - 5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
   - 5.3. Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată

6. **Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
   - 6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului
   - 6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra- și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)
   - 6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Scrierea cu cifre a numărului *șaptesprezece mii cincisprezece* este:
a) 17 105; **b)** 17 015; **c)** 17 150; **d)** 17 051.

(5p) **2.** Scrierea cu cifre arabe a numărul DLXXIX este:
a) 629; **b)** 479; **c)** 579; **d)** 529.

(5p) **3.** Predecesorul numărului 89 000 este:
a) 89 001; **b)** 79 900; **c)** 70 999; **d)** 88 999.

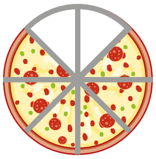
(5p) **4.** Sfertul dublului numărului 280 este:
a) 140; **b)** 280; **c)** 560; **d)** 70.

(5p) **5.** Transformând 3 ore jumătate în minute, vei obține:
a) 180 de minute; **b)** 210 minute; **c)** 33 de minute; **d)** 240 de minute.

(5p) **6.** Afirmația „Pătratul are patru laturi." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Partea din pizza care s-a consumat, scrisă sub formă de fracție este:
a) $\frac{2}{8}$; **b)** $\frac{2}{4}$;
c) $\frac{2}{6}$; **d)** 2.



(5p) **2.** Rezultatul calcului $[75 : 5 + 12 \cdot (139 - 126)] - (40 - 25) \cdot 10$, este:
a) 21; **b)** 201; **c)** 321; **d)** 1 560.

(5p) **3.** Suma a patru numere consecutive este 106. Al treilea număr este egal cu:
a) 28; **b)** 25; **c)** 26; **d)** 27.

(5p) **4.** Câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor 9?
a) 5; **b)** 6; **c)** 4; **d)** 2.

(5p) **5.** Suma a două numere naturale este 25, iar dacă se împarte unul la celălalt se obțin câtul 2 și restul 4. Numărul mai mare este:
a) 21; **b)** 18; **c)** 19; **d)** 16.

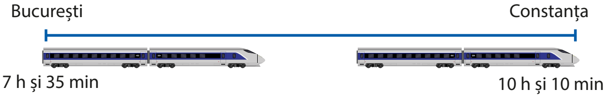
(5p) **6.** Un dreptunghi are lățimea de 4 cm și lungimea de cinci ori mai mare. Perimetrul dreptunghiului este:
a) 24 cm; **b)** 20 cm; **c)** 48 cm; **d)** 80 cm.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

(10p) **1.** Calculează: $10 + \{250 : 5 + 15 : 3 \cdot [10 - (20 : 4 - 2) \cdot 3]\} \cdot 2$.

(10p) **2.** La hipermarket, un client cumpără o cutie cu banane pentru care plătește 125 de lei, iar un alt client cumpără o cutie cu banane pentru care plătește 200 de lei. Știind că cele două cutii cântăresc împreună 65 kg și că prețul pe kilogram este același, determină cu câte kilograme a fost mai ușoară cutia primului client decât cea a celuilalt client.

(10p) **3.** Privește desenul, apoi completează tabelul.



Ora plecării din București	**Ora sosirii la Constanța**	**Durata călătoriei**

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

PROIECT

TRASEU DE VACANȚĂ

Planul proiectului

- Materiale necesare: planșe A3, fotografii făcute în vacanță, decupaje din reviste/ghiduri turistice, creioane colorate, carioci, lipici.
- Scopul: veți realiza un colaj cu un itinerar de vacanță.

Realizarea proiectului

- Împărțiți în echipe, veți desena/lipi pe o planșă harta României.
- Membrii echipei vor trasa pe hartă un itinerar format din 4 orașe vizitate în vacanțele lor, vor lipi în dreptul fiecăruia imagini reprezentative și vor nota pe traseele formate numărul de kilometri parcurși și timpul necesar.
- Puteți folosi diferite surse de informare (ghiduri turistice, hărți rutiere, surse online), pentru a completa un tabel care să conțină numărul de locuitori ai fiecărui oraș, suprafața – în km^2 (vezi modelul de mai jos).

Distanțe (km)																											
1	București	1																									
2	Alba Iulia	343	2																								
3	Arad	547	232	3																							
4	Bacău	284	382	595	4																						
5	Baia Mare	592	249	31	436	5																					
6	Brașov	168	214	428	177	394	6																				
7	Brăila	212	476	680	197	656	262	7																			
8	Cluj-Napoca	440	97	268	385	152	274	536	8																		
9	Constanța	266	609	813	390	787	380	166	706	9																	
10	Craiova	234	309	380	432	558	255	446	406	500	10																
11	Drobeta-Turnu Severin	343	291	271	541	540	395	555	388	609	109	11															
12	Galați	244	508	712	185	655	294	32	568	205	478	587	12														
13	Giurgiu	65	408	617	349	657	233	277	506	288	215	385	309	13													
14	Iași	393	462	755	134	481	311	264	427	430	566	675	252	458	14												
15	Mangalia	310	653	857	434	902	384	210	750	44	544	653	249	395	474	15											
16	Miercurea Ciuc	270	216	448	166	399	102	285	253	475	357	497	283	335	300	580	16										
17	Oradea	592	249	116	537	195	457	719	152	858	444	387	720	657	621	858	405	17									
18	Piatra Neamț	342	362	594	58	378	235	245	327	448	490	620	243	407	142	652	138	479	18								
19	Pitești	114	229	433	312	478	135	302	326	380	120	260	333	179	446	424	237	478	370	19							
20	Ploiești	60	322	526	243	502	108	178	382	272	243	383	210	125	352	370	210	532	301	149	20						
21	Râmnicu Vâlcea	175	168	372	373	429	196	362	265	441	121	199	395	240	507	485	298	417	431	61	185	21					
22	Sibiu	274	69	273	322	318	145	407	166	540	220	298	439	339	456	584	184	318	322	160	253	99	22				
23	Suceava	439	426	589	155	304	332	352	321	569	587	717	340	504	147	562	240	473	102	464	398	529	424	23			
24	Timișoara	562	237	52	619	363	423	685	334	828	328	219	717	543	734	872	453	168	599	467	531	377	278	663	24		
25	Târgu Mureș	337	140	372	280	225	169	431	105	562	364	431	463	402	322	647	148	257	222	305	277	243	144	286	377	25	
26	Tulcea	279	567	7710	265	747	353	91	667	125	513	622	80	344	332	169	363	768	336	392	269	454	498	420	841	543	26

Oraș	Nr. locuitori	Suprafață (km^2)
București	1 888 425	228
Pitești	155 383	111
Sibiu	147 245	121
Brașov	253 200	267

Discuții și interacțiuni

- Discutați cu ceilalți membri ai echipei etapele proiectului și împărțiți-vă sarcinile.
- Comparați numărul de locuitori și suprafețele celor 4 orașe alese.
- Găsiți un traseu optim (cel mai scurt) de parcurgere a itinerarului, specificând localități intermediare.

Prezentarea proiectului

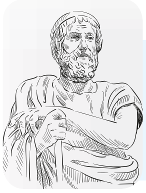
Prezentați proiectele în fața colegilor, așezând planșele în ordine descrescătoare, după unul dintre criteriile:

- lungimea traseului reprezentat;
- numărul total al locuitorilor orașelor prezentate;
- timpul necesar parcurgerii traseului;
- suprafața totală a celor 4 orașe.

1 UNITATEA I

Operații cu numere naturale

CUPRINS

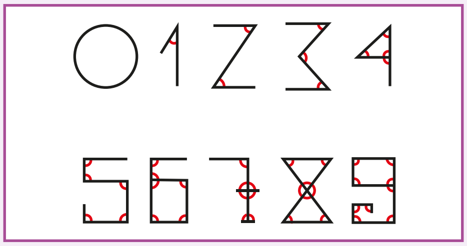


Numerele guvernează lumea.

Pitagora (secolul VI î.Hr.) a fost un filozof și matematician grec care punea la baza întregii realități teoria numerelor și a armoniei.

I.1. SCRIEREA ȘI CITIREA NUMERELOR NATURALE

Descoperă



Folosim numerele în fiecare zi, fie că numărăm banii, zilele săptămânii sau colegii din clasă. Trebuie să știm că cifrele nu au arătat întotdeauna ca cele de astăzi. Fiecare cifră de la 1 la 9 era formată din linii drepte care formau unul sau mai multe unghiuri: 1 – un unghi, 2 – două unghiuri, 3 – trei unghiuri etc. Cifra 0 are zero unghiuri și a apărut mult mai târziu.

Pentru a scrie un număr natural folosim **zece** simboluri: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** și **9**, cunoscute ca **cifre arabe**, diferite ca formă de numerele romane (I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX), care folosesc șapte simboluri.

Reține!

Un **număr natural** se scrie de la stânga la dreapta folosind una sau mai multe **cifre**. Pentru citirea numărului grupăm cifrele, câte trei, în **clase**, de la sfârșitul numărului spre stânga. Fiecare clasă conține trei ordine: **U**nități, **Z**eci, **S**ute.

Clasa miliardelor			Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților			Cum citim?
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	
									7	0	3	șapte sute trei
							1	3	0	8	5	treisprezece mii optzeci și cinci
			5	9	1	0	0	7	4	1	6	cinci sute nouăzeci și unu de milioane șapte mii patru sute șaisprezece
	6	0	4	5	2	0	7	6	0	0	8	șaizeci de miliarde patru sute cincizeci și două de milioane șaptezeci și șase de mii opt

Descoperă

Cifrele romane sunt șapte simboluri grafice preluate din alfabetul latin (**I, V, X, L, C, D, M**).

La citirea și scrierea numerelor cu ajutorul cifrelor romane trebuie să ținem cont de două reguli:

- o cifră cu o valoare mai mică scrisă la **dreapta** uneia cu o valoare mai mare indică o **sumă**: VIII = V + III = 5 + 3 = 8;
- o cifră cu o valoare mai mică scrisă la **stânga** uneia cu o valoare mai mare indică o **diferență**: IV = V – I = 5 – 1 = 4.

I – 1
V – 5
X – 10
L – 50
C – 100
D – 500
M – 1 000

Reține!

Cifrele cu ajutorul cărora scriem numerele naturale sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9. Acestea se împart în **cifre pare** (0, 2, 4, 6 și 8) și **cifre impare** (1, 3, 5, 7, 9).

- Dacă ultima cifră a unui număr este pară, spunem că **numărul este par**.

Exemple: 40, 102, 254, 1 376, 2 948.

- Dacă ultima cifră a unui număr este impară, spunem că **numărul este impar**.

Exemple: 31, 273, 405, 1 667, 42 949.

- Orice număr natural de două sau mai multe cifre poate fi scris în mod unic ca sumă de produse între fiecare cifră a numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective: 1, 10, 100, 1 000, 10 000 etc. Acest mod de scriere este cunoscut ca **descompunerea zecimală a numărului** sau **descompunerea în baza 10** (folosind cele 10 cifre).

Exemple:

$29 = 2 \cdot 10 + 9$; $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$; $154 = 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4$; $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$;

$13\,407 = 1 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7$; $\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$.

- Numerele naturale scrise în ordinea 0, 1, 2, 3, 4, ..., 50, 51, 52, ..., 1 000, 1 001, 1 002, ... formează **șirul numerelor naturale** și se notează cu $\mathbb{N}$.

Rezolvă

1. Citește numerele: 47, 108, 2 075, 43 108, 327 891, 12 078 691.

2. Scrie cu cifre, în caiet, numerele:
  a) cinci sute nouă;
  b) o sută cinci mii șapte sute douăzeci și patru;
  c) treizeci și opt de milioane cinci sute patruzeci de mii douăzeci și unu;
  d) opt miliarde douăzeci și cinci.

3. Scrie cu cifre romane data ta de naștere.
Model: 15.03.2012 → XV.III.MMXII.

4. Scrie cu cifre romane data de astăzi.

5. Determină numărul $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 481$.

6. Determină numărul $\overline{abcd}$, știind că $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2\,701$.

7. Determină numerele $\overline{ab}$, știind că una dintre cifre este sfertul celeilalte.

8. Determină numerele de forma $\overline{abc}$ care au produsul cifrelor egal cu 6.

9. Determină cifrele *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, știind că: $\overline{4b37e} = a \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + 1$.

10. Determină toate numerele pare de forma $\overline{47x}$.

Evaluează-te

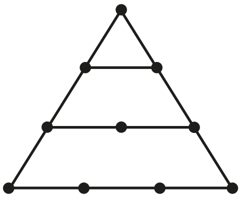
1. Se consideră numărul $452 = 4 \cdot 100 + a \cdot 10 + 2$. Cifra *a* este:
a) 0; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 5. **3 puncte**

2. Dacă numărul $\overline{4735x}$ are cifrele diferite și este impar, atunci cifra *x* este:
a) 1; **b)** 1 sau 9; **c)** 4; **d)** 9. **3 puncte**

3. Scrie toate numerele naturale pare de forma $\overline{1x5x}$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Activitate pe grupe



Elevii, împărțiți în trei grupe, primesc următoarele sarcini:

Grupa 1: Să scrie cu cifre romane anul nașterii și vârsta marelui matematician grec Pitagora (570 – 495 î.Hr.).

Grupa 2: În imagine este reprezentat un șir de numere „triunghiular”, studiat la școala lui Pitagora. Acesta considera că 10 (suma primelor patru numere nenule $1 + 2 + 3 + 4$) este ***numărul perfect*** și îi punea pe toți elevii săi să jure pe acest număr. Elevii trebuie să precizeze câte triunghiuri sunt în imagine și să numere câte puncte sunt pe laturile fiecărui triunghi identificat.

Grupa 3: Vor căuta pe Internet informații cu privire la:

a) ce greutate are imensa statuie „Colosul din Rhodos” (exprimată în kilograme);

b) la ce înălțimi se află principalele mănăstiri de pe Meteora, Grecia (exprimate în metri);

c) ce populație au primele trei orașe din Grecia (în milioane).

Portofoliu

- Realizează o scurtă istorie a cifrelor și a sistemelor de numerație. Documentează-te din cărți de la bibliotecă, din enciclopedii și chiar din surse on-line despre sistemele de numerație: roman, grec, egiptean, arab etc. Îmbogățește-ți portofoliul cu imagini și exemple despre tema studiată.

Date fascinante despre numere

Știi cum se numesc numerele începând de la o mie (1 000) și mai mari de o mie de ori (adăugând încă trei zerouri) de fiecare dată?

Răspuns:

Mie (1 000)
Milion (1 000 000)
Miliard (1 000 000 000)
Bilion (1 000 000 000 000)
Biliard (1 000 000 000 000 000)
Trilion (1 000 000 000 000 000 000)
Cvadrilion (1 000 000 000 000 000 000 000)
Cvintilion (1 000 000 000 000 000 000 000 000)
Sextilion (1 000 000 000 000 000 000 000 000 000)
Septilion (1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000)
Octilion (1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000)
Nonilion (1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000)
Decilion (1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000)
și așa mai departe.

(*Observație:* Deși acestea sunt denumirile folosite în Statele Unite ale Americii și în alte părți, nu toate țările folosesc aceleași denumiri pentru aceleași numere.)

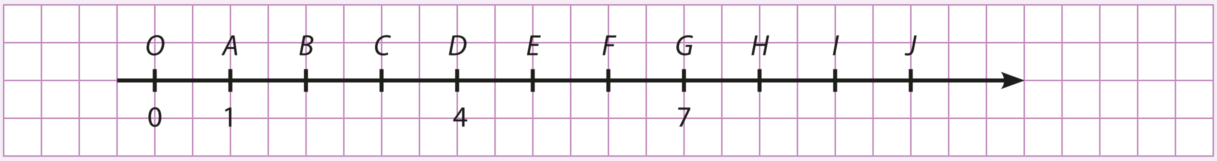
Matematica vieții: cel mai mic număr natural este întotdeauna primul.

Valeriu Butulescu (9 februarie 1953) este poet, prozator, traducător și autor de aforisme, membru al Uniunii Scriitorilor din România.

I.2. REPREZENTAREA PE AXA NUMERELOR

Descoperă

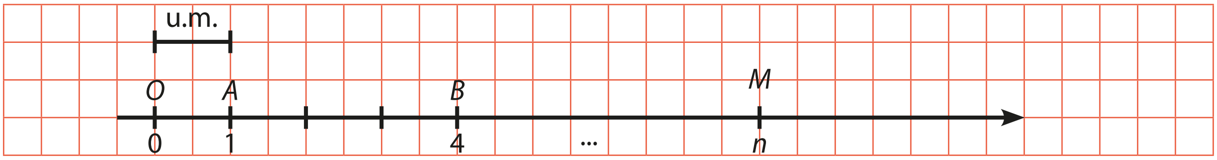
Observă desenul și răspunde la întrebările de mai jos.



a) Ce număr corespunde punctului *C*? Dar punctului *I*?
b) Ce reprezintă punctul notat cu O?
c) Cu ce litere s-au notat punctele corespunzătoare numerelor 2, 5 și 9?

Reține!

- **Axa numerelor** este o **dreaptă** pe care se fixează un punct *O*, numit **origine** (căruia îi corespunde numărul natural 0), un **sens de parcurgere** indicat de o săgeată (de la origine spre dreapta) și o **unitate de măsură** (u.m.), de obicei centimetrul sau două pătrățele pe caietul de matematică.



Fiecărui număr natural *n* îi corespunde un punct pe axa numerelor, care se obține măsurând de la origine, spre dreapta, *n* unități de măsură. Numărul natural *n* se numește **coordonata** punctului respectiv.

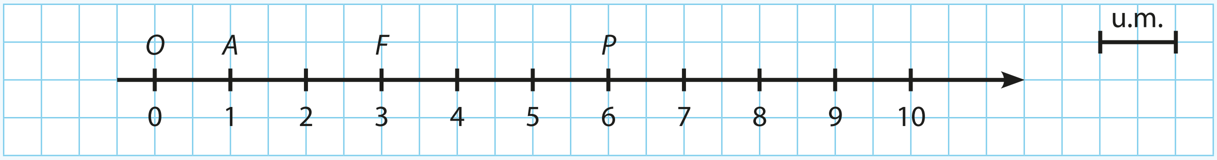
Observație: Coordonata originii este numărul natural 0.

Exemple: Punctului *A* îi corespunde pe axa numerelor numărul 1; notăm *A*(1) și citim „punctul *A* de coordonată 1”. Punctului *B* îi corespunde pe axa numerelor numărul 4; notăm *B*(4) și citim „punctul *B* de coordonată 4”.

Exersează

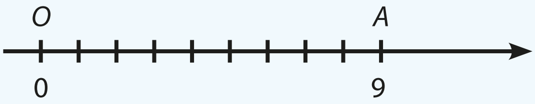
1. Desenează axa numerelor și reprezintă punctele $A(1)$, $F(3)$ și $P(6)$.

Rezolvare: Desenăm axa numerelor, notăm cu O originea, corespunzătoare numărului 0, alegem unitatea de măsură de 1 cm (sau două pătrățele de caiet). Reprezentăm punctele:



2. În desenul de mai jos, punctul A este reprezentat pe axa numerelor cu originea în O și are coordonata 9. Calculează lungimea unității de măsură, știind că $OA = 45$ mm.

Rezolvare:
Notăm lungimea unității de măsură cu x, deci $OA = 9x \Rightarrow 9x = 45$ mm $\Rightarrow x = 45 : 9 = 5$ mm.



I.3. COMPARAREA ȘI ORDONAREA NUMERELOR NATURALE

Reține!

- Dintre două numere naturale care nu au același număr de cifre este mai mare numărul care are mai multe cifre.

Exemplu: 306 798 > 77 996, deoarece 306 798 are 6 cifre, iar 77 996 are 5 cifre.

- Pentru a **compara** două numere naturale care au un număr egal de cifre, comparăm cifră cu cifră, începând de la stânga, până când două cifre de același ordin sunt diferite. Este mai mare numărul care are cifra respectivă mai mare.

Exemple:

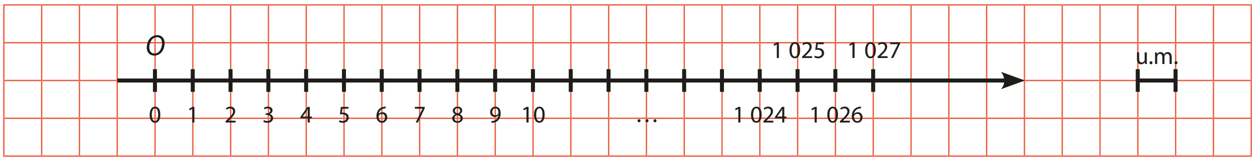
56 **7**21 < 56 **9**03, deoarece au același număr de cifre și 5 = 5, 6 = 6, 7 < 9;

306 8**4**9 > 306 8**0**9, deoarece au același număr de cifre și 3 = 3, 0 = 0, 6 = 6, 8 = 8, 4 > 0.

- Prin **ordonarea** numerelor naturale înțelegem scrierea lor în ordine crescătoare sau descrescătoare.

Observație: Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor este o modalitate de ordonare.

Dintre două numere naturale, reprezentate pe axa numerelor, este mai mare cel reprezentat în dreapta celuilalt.



Exemple:

4 < 7, deoarece numărul 4 se află la stânga lui 7; citim „4 este mai mic decât 7”;

1 027 > 1 024, deoarece numărul 1 027 se află la dreapta lui 1 024; citim „1 027 este mai mare decât 1 024”.

- Oricare două numere alăturate pe axa numerelor naturale se numesc numere **consecutive**. Diferența dintre oricare două numere naturale consecutive este egală cu 1. Dacă n și $n + 1$ sunt două numere consecutive, spunem că ***n* este predecesorul lui *n* + 1** sau că ***n* + 1 este succesorul lui *n***.

Exersează

473 < 1 069	Dintre două numere naturale, este **mai mic** cel care are mai puține cifre.
18 7**9**5 > 18 7**8**9	Dintre două numere naturale care au același număr de cifre, numărul mai mare este cel la care întâlnim de la stânga spre dreapta prima cifră mai mare.
143 = 143	Semnul „=” se folosește pentru două numere egale.
$n \leq 3$	Numerele naturale *n*, mai mici sau egale cu 3, sunt: 0, 1, 2 și 3.
$72 \leq n \leq 75$	Numerele naturale *n*, mai mari sau egale cu 72 și mai mici sau egale cu 75, sunt: 72, 73, 74 și 75. Avem 75 – 72 + 1 = 4 numere.
$a \leq n \leq b$	**De la *a* la *b* (inclusiv *a* și *b*) avem *b* – *a* + 1 numere naturale.**
$8 < n \leq 11$	Numerele naturale *n*, mai mari decât 8 și mai mici sau egale cu 11, sunt: 9, 10 și 11. Avem 11 – 8 = 3 numere naturale.
$a < n \leq b$ $a \leq n < b$	**De la *a* la *b* (inclusiv *a* sau *b*) avem *b* – *a* numere naturale.** ***Exemplu:*** $20 \leq n < 26$; avem 26 – 20 = 6 numere naturale (20, 21, 22, 23, 24, 25).
$a < n < b$	**Între *a* și *b* avem *b* – *a* – 1 numere naturale.** ***Exemplu:*** $3 < n < 8$; între 3 și 8 sunt 8 – 3 – 1 = 4 numere naturale (4, 5, 6, 7).

I.4. APROXIMĂRI. ESTIMĂRI. ROTUNJIRI

Descoperă

Mihai estimează că ghiozdanul lui cântărește 3 500 de grame. În urma cântăririi ghiozdanului, se constată că greutatea acestuia este de 3 637 de grame.

Reține!

- **A estima** înseamnă a evalua cu aproximație, a aprecia mărimea, valoarea pe baza unor date incomplete.
- **Aproximarea prin lipsă** a unui număr natural la zeci/sute/mii etc. este cel mai mare număr natural format numai din zeci/sute/mii etc. mai mic sau cel mult egal cu numărul dat.
- **Aproximarea prin adaos** a unui număr natural la zeci/sute/mii etc. este cel mai mic număr natural format numai din zeci/sute/mii etc. mai mare sau egal cu numărul dat.
- **Rotunjirea** unui număr natural la un anume ordin (zeci, sute, mii etc.) este cea mai apropiată dintre aproximările prin lipsă și prin adaos la acel ordin ale numărului respectiv. Dacă cele două aproximări sunt la fel de apropiate de numărul respectiv, pentru rotunjire se ia în considerare aproximarea prin adaos.

Exemple:

Numărul	Aproximarea prin lipsă la			Aproximarea prin adaos la			Rotunjirea la		
	zeci	sute	mii	zeci	sute	mii	zeci	sute	mii
4 266	4 260	4 200	4 000	4 270	4 300	5 000	4 270	4 300	4 000
24 158	24 150	24 100	24 000	24 160	24 200	25 000	24 160	24 200	24 000
356 841	356 840	356 800	356 000	356 850	356 900	357 000	356 840	356 800	357 000

Exersează

1. Aproximează prin lipsă, prin adaos și apoi rotunjește la zeci, sute, mii numărul 3 637.

Rezolvare:

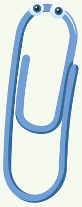
- 3 630 < 3 637 < 3 640; aproximarea prin lipsă la zeci este 3 630, iar aproximarea prin adaos la zeci este 3 640. Rotunjirea la zeci este 3 640 (7 ≥ 5, deci rotunjirea se face la aproximarea prin adaos).
- 3 600 < 3 637 < 3 700 aproximarea prin lipsă la sute este 3 600, iar aproximarea prin adaos la sute este 3 700. Rotunjirea la sute este 3 600 (3 ≤ 5, deci rotunjirea se face la aproximarea prin lipsă).
- Cum 3 000 < 3 637 < 4 000 rezultă că aproximarea prin lipsă la mii este 3 000, iar aproximarea prin adaos la mii este 4 000. Rotunjirea la mii este 4 000 (6 ≥ 5, deci rotunjirea se face la aproximarea prin adaos).

2. Determină cel mai mic număr natural de forma $\overline{97x8}$ care are rotunjirea la sute egală cu 9 800.

Rezolvare:

Deoarece cifra sutelor numărului 9 800 este cu o unitate mai mare decât cifra sutelor numărului $\overline{97x8}$, deducem că $x \geq 5$; deci cel mai mic număr este 9 758.

Rezolvă



1. Reprezintă pe axă numerele 4, 6 și 11, alegând convenabil unitatea de măsură.

2. Scrie predecesorul și succesorul următoarelor numere: 48, 601, 24 856, 3 002, 3 603 600.

3. Notează toate numerele de forma $\overline{ab}$ care au cifrele consecutive în această ordine.

4. Copiază exercițiul pe caiet și completează cu semnul corespunzător (<, =, >):
a) 7 ☐ 11; **b)** 103 ☐ 99; **c)** 77 ☐ 77; **d)** 125 ☐ 152.

5. Apreciază cu adevărat (A) sau fals (F) valoarea de adevăr a următoarelor enunțuri:
a) 1 003 < 1 030; **b)** 905 < 899; **c)** 743 > 734; **d)** 1 879 > 1 874.

6. Ordonează crescător numerele: 23, 17, 107, 98, 208, 87.

7. Ordonează descrescător numerele: 102, 68, 251, 49, 74, 195.

8. Câte numere verifică relația și care sunt acestea:
a) $62 \leq n \leq 71$; **b)** $41 < n \leq 53$; **c)** $108 \leq n < 123$; **d)** $451 < n < 472$?

9. Aproximează prin lipsă și apoi prin adaos la sute numerele: 463, 5 258, 62 345, 485 681.

10. **Activitate în perechi.** Unul dintre elevi va scrie numerele naturale impare mai mari decât 62 și mai mici sau cel mult egale cu 71, iar celălalt le va scrie pe cele pare cu aceleași caracteristici. Câte numere a scris fiecare?

Evaluează-te

1. Compară numerele:
a) 34 745 și 34 756; **b)** 1 022 și 1 202; **c)** 90 555 și 50 999. **3 puncte**

2. Determină toate numerele de forma $\overline{xy}$, știind că $\overline{x9y} > 795$. **3 puncte**

3. Care sunt numerele naturale de forma $\overline{5xy}$ care au rotunjirea la zeci egală cu $\overline{5y0}$? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Matematica este regina științelor, iar aritmetica este regina matematicii.

Carl Friedrich Gauss (30 aprilie 1777 – 23 februarie 1855) este considerat unul dintre cei mai mari oameni de știință ai lumii, având importante realizări în matematică, fizică și astronomie.

I.5. ADUNAREA NUMERELOR NATURALE. PROPRIETĂȚI

Descoperă

În vacanța de vară, împreună cu familia, George a făcut un circuit cu mașina prin câteva capitale europene, urmând traseul: București – Budapesta – Zagreb – Sofia, cu revenire la București. Având în vedere distanțele dintre aceste orașe, ajută-l pe George să calculeze:

a) lungimea traseului București – Zagreb, exprimată în kilometri;

b) lungimea totală a traseului parcurs cu mașina, exprimată în kilometri.

Răspuns:

a) Pentru a calcula lungimea traseului București – Zagreb, adunăm distanțele exprimate în kilometri dintre București – Budapesta (838 km) și Budapesta – Zagreb (343 km), adică:

838 + 343 = 1 181 km;

	8	3	8	+
	3	4	3	
1	1	8	1	

b) Pentru a calcula lungimea totală a traseului, adunăm distanțele exprimate în kilometri dintre București – Budapesta (838 km), Budapesta – Zagreb (343 km), Zagreb – Sofia (782 km) și Sofia – București (368 km), adică:

838 + 343 + 782 + 368 = 2 331 km.

	8	3	8	+
	3	4	3	
	7	8	2	
	3	6	8	
2	3	3	1	

Reține!

- Rezultatul adunării numerelor naturale *a* și *b* se numește **sumă** și se notează ***a* + *b***. Numerele *a* și *b* se numesc **termenii** adunării.

$$\underbrace{a+b}_{\text{termeni}} = \underbrace{S}_{\text{sumă}}$$

Adunarea se poate efectua cu doi, trei sau mai mulți termeni.

$S = a + b, S = a + b + c$ → suma a două sau trei numere naturale.

$S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$ → suma a *n* numere naturale.

- Suma a două sau mai multor numere naturale este un număr natural.

Regulă: Pentru a efectua o operație de adunare cu trecere peste ordin se ține seama că 10 unități de un anumit ordin se transformă într-o unitate de ordin superior.

Exemplu: 1 058 + 283 = 1 341.

	+1	+1		
1	0	5	8	+
	2	8	3	
1	3	4	1	

unități: 8 + 3 = 11 = 10 + 1

zeci: 5 + 8 + 1 = 14 = 10 + 4

sute: 0 + 2 + 1 = 3

mii: 1

Proprietățile adunării numerelor naturale

Adunarea este **comutativă**: $a + b = b + a$.
Exemplu: $360 + 280 = 280 + 360$ (= 640).

Adunarea este **asociativă**: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Exemplu: $(360 + 280) + 290 = 360 + (280 + 290)$ (= 930).

Elementul neutru la adunare este 0: $a + 0 = 0 + a = a$.
Exemplu: $360 + 0 = 0 + 360$ (= 360).

Proprietățile enunțate mai sus sunt valabile pentru orice numere naturale *a*, *b* și *c*.

a comuta = a schimba poziția

a asocia = a grupa

neutru = care nu influențează

Descoperă

Suma lui Gauss

Încă de mic, Carl Friedrich Gauss s-a remarcat ca un geniu al matematicii. Când era cam de vârsta ta, 11-12 ani, a găsit o metodă de calcul a sumei numerelor naturale până la 100, observând că suma dintre primul și ultimul termen, al doilea și penultimul termen, al treilea și antepenultimul termen ș.a.m.d., adică 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, … dau același rezultat, 101. Dacă sunt 100 de termeni și se adună câte doi, se obține de 50 de ori 101, adică $50 \cdot 101 = 5\,050$.

Suma primelor *n* numere naturale, cunoscută ca suma lui Gauss, este:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n = [n \cdot (n + 1)] : 2.$$

Această formulă se deduce astfel:

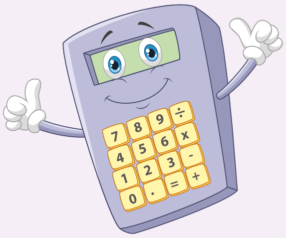
$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 2) + (n - 1) + n$

$\underline{S = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 3 + 2 + 1}$

$$\underbrace{S+S}_{\text{2 termeni}} = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ termeni}}$$

$2 \cdot S = n \cdot (n + 1)$

$S = [n \cdot (n + 1)] : 2.$



Exemple:

1. Suma primelor 100 de numere naturale.
$1 + 2 + 3 + ... + 100 = [100 \cdot (100 + 1)] : 2 = (100 \cdot 101) : 2 = 10\,100 : 2 = 5\,050.$

2. Calculul sumei $S = 11 + 12 + ... + 20$.
$11 + 12 + ... + 20 = (1 + 2 + ... + 10 + 11 + ... + 20) - (1 + 2 + ... + 10) =$
$= [20 \cdot (20 + 1)] : 2 - [10 \cdot (10 + 1)] : 2 = (20 \cdot 21) : 2 - (10 \cdot 11) : 2 = 420 : 2 - 110 : 2 = 210 - 55 = 155.$

Proprietățile enunțate mai sus sunt valabile pentru orice numere naturale *a*, *b* și *c*.

- Știm că un număr care are ultima cifră pară (0, 2, 4, 6, 8) este un număr par, iar dacă are ultima cifră impară (1, 3, 5, 7, 9) este un număr impar.

Spunem că două numere sunt de aceeași *paritate*, dacă amândouă sunt pare sau amândouă sunt impare și spunem că sunt de *parități diferite*, dacă unul este par și celălalt număr este impar.

Ne propunem să studiem dacă rezultatul sumei a două numere naturale este un număr par sau impar în funcție de paritatea termenilor.

Exemple:

302 + 156 = 458, adică *par* + *par* = *par*
438 + 507 = 945, adică *par* + *impar* = *impar*

479 + 267 = 746, adică *impar* + *impar* = *par*
507 + 438 = 945, adică *impar* + *par* = *impar*

- Dacă termenii adunării au aceeași paritate, atunci suma este pară.
- Dacă termenii adunării au parități diferite, atunci suma este impară.

Rezolvă

1. **Activitate în perechi.** Notează rezultatele următoarelor calcule pe caiet și apoi verifică-te cu colegul de bancă:

a) 23 + 47; **b)** 47 + 23; **c)** 475 + 0; **d)** 0 + 475;
e) (36 + 14) + 10; **f)** 36 + (14 + 10); **g)** 12 + 26 + 15 + 18 + 14 + 35.

2. Calculează:

a) 276 + 305; **b)** 1 457 + 896; **c)** 4 876 + 5 164;
d) 12 896 + 6 089; **e)** 135 078 + 7 405; **f)** 578 897 + 749 246.

3. Calculează, alegând convenabil termenii adunării:

a) 99 + 46 + 198 + 1 + 54 + 2; **b)** 1 485 + 2 784 + 1 515 + 2 216;
c) 495 + 572 + 612 + 5 + 388 + 328; **d)** 1 + 97 + 2 + 96 + 99 + 3 + 4.

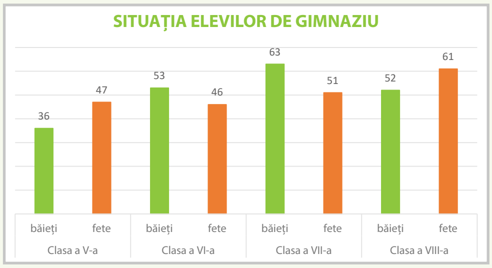
4. Calculează rapid, după modelul dat:

Model: 36 + 84 = (30 + 6) + 84 = 30 + (6 + 84) = 30 + 90 = 120.

a) 81 + 99; **b)** 147 + 253;
c) 1 473 + 2 517; **d)** 23 874 + 1 116.

5. Analizează datele din graficul alăturat și apoi rezolvă cerințele.

a) Câți elevi sunt în clasa a V-a?
b) Calculează numărul băieților din școală.
c) Determină numărul fetelor din școală.
d) Compară numărul băieților cu numărul fetelor.



6. Care este suma dintre cel mai mare număr par de 4 cifre distincte și cel mai mic număr impar de 4 cifre distincte?

7. Fie a, b, c, d patru numere naturale.

a) Dacă $a = b$ și $c = d$, compară $a + c$ cu $b + d$. **b)** Dacă $a < b$ și $c < d$, compară $a + c$ cu $b + d$.
c) Dacă $a > b$ și $c > d$, compară $a + c$ cu $b + d$. **d)** Dacă $a + b = 33$, $a + c = 34$ și $b + c = 43$, determină numerele a, b și c.

8. Calculează:

a) (1 + 2 + ... + 50) + (1 + 2 + 3 + ... + 200); **b)** 31 + 32 + 33 + ... + 100;
c) 2 + 4 + 6 + ... + 100; **d)** 1 + 3 + 5 + ... + 99.

9. Numărul elevilor de gimnaziu care au optat pentru cercul de matematică este cu 120 mai mare față de numărul elevilor care au optat pentru cercul de robotică. Câți elevi au optat pentru cercul de matematică, știind că în școală sunt 580 de elevi și că toți elevii au optat pentru un singur cerc?

10. Scrie numărul 9 ca sumă de două numere naturale, astfel încât primul număr să fie mai mare decât al doilea. Câte soluții are problema?

Evaluează-te

1. Calculează:

a) 745 + 4 056; **b)** 6 082 + 1 697; **c)** 192 575 + 357 963. **3 puncte**

2. Calculează numărul mai mare cu 1 399 decât n în următoarele cazuri:

a) $n = 3\,021$; **b)** $n = 5\,301$; **c)** $n = 2\,487$. **3 puncte**

3. Determină cifrele a, b și c din egalitatea: $\overline{2acb} + \overline{58bb} = \overline{829c}$. **3 puncte**

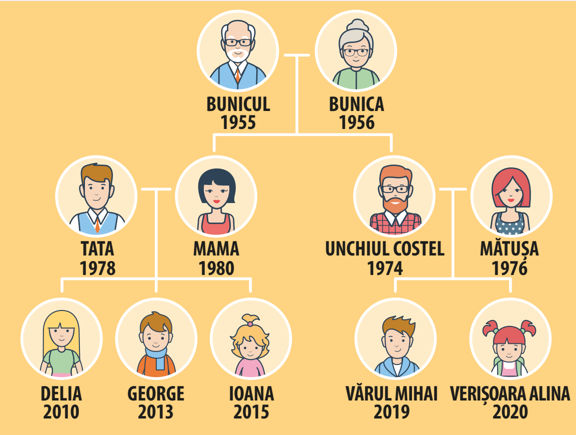
Din oficiu: 1 punct

Calculează-ți vârsta în numărul de prieteni, nu în ani, iar viața în zâmbete, nu în lacrimi.

John Lennon (9 octombrie 1940 – 8 decembrie 1980) a fost compozitor, muzician, cântăreț, textier, unul dintre fondatorii trupei The Beatles.

I.6. SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE

Descoperă



George a avut de pregătit pentru un proiect arborele genealogic al familiei lui, trebuind să realizeze o reprezentare grafică sau o diagramă care înfățișează generațiile din familia lui și modul în care acestea sunt înrudite cu el, de-a lungul anilor. În acest fel a înțeles mult mai bine ce grad de rudenie există între unchii și verii lui și a aflat că genealogia se ocupă cu studiul familiilor și al istoriei lor. Urmărind arborele genealogic realizat de George, răspunde la următoarele întrebări:

a) Ce diferență de vârstă este între bunica lui George și verișoara lui George, Alina?

b) Ce diferență de vârstă este între tatăl lui George și unchiul său, Costel?

c) Ce diferență de vârstă este între seniorul și mezinul familiei?

Răspuns:

a) Pentru a afla diferența de vârstă dintre bunica și Alina, efectuăm scăderea 2020 – 1956 și obținem 64 de ani.

b) Pentru a afla diferența de vârstă dintre tatăl lui George și unchiul Costel, efectuăm scăderea 1978 – 1974 și obținem 4 ani.

c) Între mezinul (cel mai tânăr) și seniorul (cel mai în vârstă) familiei există o diferență de 65 de ani (2020 – 1955 = 65).

Reține!

- **Diferența** a două numere naturale *a* și *b*, *a* ≥ *b*, este un număr natural unic, notat ***a* – *b***.
- Operația prin care se obține diferența a două numere se numește **scădere**.
- Numerele *a* și *b* se numesc **termenii scăderii**, *a* se numește **descăzut**, iar *b* se numește **scăzător**.

$a - b = D$

descăzut ↙   ↓ **scăzător**   ↘ **diferență (rest)**

Observație: În cazul în care descăzutul este egal cu scăzătorul, atunci diferența este 0.

Exemplu: 2 023 – 2 023 = 0.

Proba scăderii:

2 023 – 2 013 = 10

- prin scădere: 2 023 – 10 = 2 013
- prin adunare: 2 013 + 10 = 2 023

Proba adunării:

2 013 + 10 = 2 023

- prin scădere: 2 023 – 10 = 2 013 sau 2 023 – 2 013 = 10
- prin adunare: 10 + 2 013 = 2 023

Regulă: Pentru a scădea două numere naturale, se scad unitățile de același ordin. Dacă nu sunt suficiente unități la descăzut, se ia o unitate de ordin imediat superior și se transformă în zece unități de ordin imediat inferior.

Exemplu: 1 258 – 583 = 675

–1	–1			
1	2	5	8	–
	5	8	3	
=	6	7	5	

unități: 8 – 3 = 5
zeci: 5 + 10 – 8 = 15 – 8 = 7
sute: 2 – 1 + 10 – 5 = 6
mii: 1 – 1 – 0 = 0

- Dacă dintr-o egalitate scădem același număr, se obține tot o egalitate: dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$, pentru a, b și c numere naturale, cu $c \leq a$.

Exemplu: 123 = 123, atunci 123 – 20 = 123 – 20. Se verifică simplu: 103 = 103.

- Dacă dintr-o inegalitate scădem același număr, se păstrează semnul inegalității: dacă: $a \leq b$, atunci $a - c \leq b - c$, pentru a, b și c numere naturale, cu $c \leq a$.

Exemplu: 103 ≤ 215, atunci 103 – 30 ≤ 215 – 30. Se verifică simplu: 73 ≤ 185.

Exersează

1. Efectuează:

a) 463 – 245;　　**b)** 53 182 – 2 547.

Rezolvare:

a)

	–1		
4	6	3	–
2	4	5	
2	1	8	

b)

	–1		–1		
5	3	1	8	2	–
	2	5	4	7	
5	0	6	3	5	

2. Determină-l pe x din egalitățile:

a) $2\,567 + x = 4\,105$;　　**b)** $4\,103 - x = 1\,578$.

Rezolvare:

a) Făcând proba adunării prin scădere, obținem $x = 4\,105 - 2\,567$, de unde $x = 1\,538$;

b) Făcând proba scăderii prin scădere, obținem $x = 4\,103 - 1\,578$, de unde $x = 2\,525$.

Rezolvă

1. Calculează:

a) 108 – 59;　　**b)** 2 571 – 1 872;　　**c)** 41 507 – 28 366;　　**d)** 109 600 – 25 907.

2. Verifică dacă ai lucrat corect exercițiul **1**, efectuând proba prin adunare și scădere.

3. Calculează diferența dintre:

a) cel mai mare număr par de trei cifre distincte și cel mai mic număr impar de două cifre distincte.

b) cel mai mare număr de patru cifre distincte cu suma cifrelor egală cu 26 și răsturnatul său (răsturnatul numărului $\overline{abcd}$ este $\overline{dcba}$).

4. Cu cât este mai mare suma numerelor 354 și 2 240 față de diferența lor?

5. Copiază pe caiet și completează tabelul:

a	b	c	$a + c$	$a + b + c$	$a - b$	$b - c$
107	59	34				
205	43			268		
	472	305	1 085			
2 491					1 291	407
			931	1 509		371

6. Determină-l pe x din egalitățile:

a) $351 + x = 603$;
b) $x + 891 = 1\,206$;
c) $x - 602 = 11\,301$;
d) $15\,063 - x = 9\,614$.

7. Suma a trei numere naturale a, b, c este 300. Determină numerele, știind că:

$$a - b = 22 \text{ și } b + c = 219.$$

8. Efectuează calculele:

a) (103 + 69) – (96 – 47);
b) (2 743 – 2 098) + (1 539 – 806);
c) (12 345 – 6 789) + (98 765 – 6 789);
d) 45 907 – (34 789 – 29 803).

9. Pentru $a = 234$, $b = 108$ și $c = 74$, verifică următoarele proprietăți:

a) $a - (b + c) = a - b - c$;
b) $a - (b - c) = a - b + c$;
c) $(a - c) - (b - c) = a - c - b + c = a - b$;
d) $(a + b) - c = a - c + b$.

10. Copiază tabelul următor pe caiet. Efectuează unde e posibil (descăzutul > scăzătorul) următoarele scăderi, cu descăzutul aflat pe coloană și scăzătorul aflat pe linie, apoi colorează cu roșu casetele în care ai obținut rezultatul 123.

	312	144	928	1 956
435				
267				
1 051				
2079				

11. Ioana a primit de la bunica 35 de lei și de la bunicul 45 de lei. De câți lei mai are nevoie pentru a-și cumpăra un ceas care costă 125 de lei?

Evaluează-te

1. Calculează:

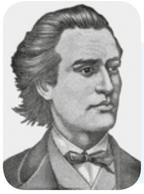
a) 1 725 – 856;
b) 14 302 – 7 637;
c) 802 715 – 357 763. **3 puncte**

2. Determină numărul cu 135 mai mic decât suma numerelor 347 și 189. **3 puncte**

3. Determină numerele a, b și c, știind că suma lor este 1 234 și că, scăzând din fiecare același număr, obținem numerele 150, 250 și 384. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Egalitatea nu există decât în matematică.



Mihai Eminescu (15 ianuarie 1850 – 15 iunie 1889) a fost poet, prozator și jurnalist român; este considerat „luceafărul poeziei românești".

I.7. ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE. PROPRIETĂȚI

Descoperă

Crăiasa din Povești, de Mihai Eminescu

Neguri albe, strălucite
Naște luna argintie,
Ea le scoate peste ape,
Le întinde pe câmpie;

S-adun flori în șezătoare
De painjen tort să rumpă,
Și anină-n haina nopții
Boabe mari de piatră scumpă.

Lângă lac, pe care norii
Au urzit o umbră fină,
Ruptă de mișcări de valuri
Ca de bulgări de lumină,

Dându-și trestia-ntr-o parte,
Stă copila lin plecată,
Trandafiri aruncă roșii
Peste unda fermecată.

Ca să vad-un chip, se uită
Cum aleargă apa-n cercuri,
Căci vrăjit de mult e lacul
De-un cuvânt al Sfintei Miercuri;

Ca să iasă chipu-n față,
Trandafiri aruncă tineri,
Căci vrăjiți sunt trandafirii
De-un cuvânt al Sfintei Vineri.

Ea se uită... Păru-i galben,
Fața ei lucesc în lună,
Iar în ochii ei albaștri
Toate basmele s-adună.

Citind poezia *Crăiasa din povești* a marelui poet Mihai Eminescu, Ioana observă că fiecare strofă este un catren (toate cele șapte strofe au câte 4 versuri). Pentru a afla câte versuri are toată poezia, Ioana face următorul calcul: $\underbrace{4+4+4+4+4+4+4}_{\text{7 termeni}} = 28$ de versuri.

Adunarea repetată a numărului 4 de 7 ori se poate scrie sub forma unei înmulțiri: $4 \times 7 = 4 \cdot 7 = 28$.

Reține!

- **Înmulțirea** este adunarea repetată a unui număr.
- Rezultatul înmulțirii se numește **produs**. Produsul a două numere naturale a și b este un număr natural notat $\boldsymbol{a \times b}$ sau $\boldsymbol{a \cdot b}$.
- Numerele a și b se numesc **factori**; a se numește **deînmulțit**, iar b se numește **înmulțitor**.
- Pentru înmulțire se folosește semnul „ × " sau „ · ", iar $a \cdot b$ sau $3 \cdot a$ se scriu ab, respectiv $3a$, unde a și b sunt numere naturale.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & a \cdot b = p \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \text{factor} & \text{factor} & \text{produs} \end{tikzcd}$$

- **Proprietățile înmulțirii numerelor naturale**

Înmulțirea este **comutativă**: $a \cdot b = b \cdot a$.

Exemplu: $30 \cdot 2 = 2 \cdot 30 \ (= 60)$.

Înmulțirea este **asociativă**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Exemplu: $(3 \cdot 8) \cdot 9 = 3 \cdot (8 \cdot 9) \ (= 216)$.

Elementul neutru la înmulțire este 1, adică $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Exemplu: $36 \cdot 1 = 1 \cdot 36 \ (= 36)$.

Proprietățile enunțate mai sus sunt valabile pentru orice numere naturale a, b și c.

a comuta = a schimba poziția

a asocia = a grupa

neutru = care nu influențează

a distribui = a repartiza

Înmulțirea este **distributivă față de adunare și față de scădere**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c, cu $b \geq c$.

Exemple: 25 · (37 + 63) = 25 · 37 + 25 · 63; 20 · (50 – 30) = 20 · 50 – 20 · 30.

Dacă unul dintre factorii unui produs este 0, atunci produsul este 0: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Reguli:

1. Pentru a înmulți două numere naturale, înmulțim fiecare cifră a celui de-al doilea factor cu primul factor. Se obțin produse parțiale, a căror sumă reprezintă rezultatul înmulțirii.

Exemplu:

	2	8	×
	1	9	
2	5	2	
2	8		
5	3	2	

9 · 28 = 252 → produs parțial
1 · 28 = 28 → produs parțial
252 + 280 = 532 → rezultatul înmulțirii

2. La înmulțirea unui număr cu 10, 100, 1 000, 10 000 etc. se adaugă la dreapta acestuia numărul corespunzător de zerouri.

Exemple: 23 · 10 = 230; 23 · 100 = 2 300; 23 · 1 000 = 23 000; 23 · 10 000 = 230 000.

Exersează

1. Determină produsul numerelor:

a) 165 și 100; **b)** 329 și 6; **c)** 637 și 25.

Rezolvare:

a) 165 · 100 = 16 500;

b)

	3	2	9	×
			6	
1	9	7	4	

c)

		6	3	7	×
			2	5	
	3	1	8	5	
1	2	7	4		
1	5	9	2	5	

2. Calculează, folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:

a) 100 · (47 + 404); **b)** 12 · (256 – 124).

Rezolvare:

a) 100 · (47 + 404) = 100 · 47 + 100 · 404 = 4 700 + 40 400 = 45 100;

b) 12 · (256 – 124) = 12 · 256 – 12 · 124 = 3 072 – 1 488 = 1 584.

3. În tabelul următor este înregistrat numărul de bilete vândute de un teatru spectatorilor, într-o lună.

Numărul biletelor vândute	**Adulți**	**Copii**
	785	1 200
Prețul unui bilet (lei)	8	5

Folosind informațiile din tabel, compară sumele de bani încasate din vânzarea biletelor către adulți, respectiv către copii.

Rezolvare: Suma încasată din vânzarea biletelor către adulți este 785 · 8 = 6 280 de lei, iar suma încasată din vânzarea biletelor către copii este 1 200 · 5 = 6 000 de lei; 6 280 de lei > 6 000 de lei.

I.8. FACTOR COMUN

Descoperă

Pentru un concurs la care vor participa 15 perechi de copii, un club de dans vrea să achiziționeze costumații elegante. Costumația unei fete costă 50 de lei, iar cea a unui băiat costă 60 de lei. Ce sumă de bani este necesară pentru cumpărarea echipamentelor?

Răspuns:

Mihai propune: Voi calcula cât costă costumațiile fetelor, apoi cât costă costumațiile băieților, apoi voi aduna cele două sume:

$15 \cdot 50$ de lei $= 750$ de lei costă costumațiile fetelor;

$15 \cdot 60$ de lei $= 900$ de lei costă costumațiile băieților;

750 de lei $+ 900$ de lei $= 1\,650$ de lei costă toate echipamentele.

Ioana are altă idee: Voi determina cât costă echipamentul unei perechi de copii, apoi voi calcula cât trebuie să plătim pentru toate perechile:

50 de lei $+ 60$ de lei $= 110$ lei costă echipamentul unei perechi;

$15 \cdot 110 = 1\,650$ de lei costă toate cele 15 echipamente.

Observăm că rezultatele celor doi copii sunt identice, însă Ioana a făcut doar două operații matematice pentru a ajunge la rezultat, în timp ce Mihai a făcut trei:

$$15 \cdot 50 + 15 \cdot 60 = 15 \cdot (50 + 60) = 1\,650 \text{ de lei.}$$

Reține!

Fie a, b, c numere naturale. Numărul a din suma $a \cdot b + a \cdot c$, respectiv diferența $a \cdot b - a \cdot c$, ce apare ca factor la fiecare termen, se numește **factor comun**.

Scriind proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare, respectiv față de scădere, sub forma:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c), \quad a \cdot b - a \cdot c = a(b - c),\ b \geq c,$$

spunem că am scos numărul a factor comun.

Exersează

1. Calculează, folosind scoaterea unui factor comun:

a) $12 \cdot 5 + 12 \cdot 9$;

b) $107 \cdot 51 - 107 \cdot 49$;

c) $537 \cdot 38 + 537 \cdot 42 + 537 \cdot 20$;

d) $98 \cdot 105 - 98 \cdot 42 + 98$.

Rezolvare:

a) $12 \cdot 5 + 12 \cdot 9 = 12(5 + 9) = 12 \cdot 14 = 168$;

b) $107 \cdot 51 - 107 \cdot 49 = 107(51 - 49) = 107 \cdot 2 = 214$;

c) $537 \cdot 38 + 537 \cdot 42 + 537 \cdot 20 = 537(38 + 42 + 20) = 537 \cdot 100 = 53\,700$;

d) Observăm că al treilea termen conține un singur factor, 98, pe care îl putem înlocui cu $98 \cdot 1$:
$98 \cdot 105 - 98 \cdot 42 + 98 = 98 \cdot 105 - 98 \cdot 42 + 98 \cdot 1 = 98(105 - 42 + 1) = 98 \cdot 64 = 6\,272$.

2. Știind că $a = 45$ și $b + c = 922$, calculează $a \cdot b + a \cdot c$.

Rezolvare: Aplicăm procedeul de scoatere a factorului comun: $a \cdot b + a \cdot c = a(b + c) = 45 \cdot 922 = 41\,490$.

3. La o librărie s-au vândut 95 de pixuri de 3 lei bucata și 95 de pixuri de 5 lei bucata. Calculează cât mai simplu suma încasată de librărie din vânzarea pixurilor.

Rezolvare: Suma încasată din vânzarea pixurilor este $95 \cdot 3 + 95 \cdot 5$, care se calculează simplu, dând pe 95 factor comun: $95 \cdot (3 + 5) = 95 \cdot 8 = 760$ de lei.

Rezolvă

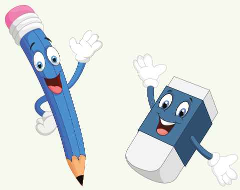
1. Calculează:
a) $47 \cdot 11$; **b)** $103 \cdot 64$; **c)** $403 \cdot 97$; **d)** $1\,207 \cdot 49$.

2. Efectuează următoarele calcule, apoi realizează corespondențe corecte între coloanele **A** și **B**.

A – calcule	B – rezultate
a) $42 \cdot 5 \cdot 2$;	**1.** 51 729;
b) $253 \cdot 25 \cdot 4$;	**2.** 14 964;
c) $7\,012 \cdot 87$;	**3.** 420;
d) $1\,203 \cdot 43$.	**4.** 25 300;
	5. 610 044.

3. Calculează:
a) $75 \cdot 10$; **b)** $103 \cdot 100$; **c)** $59 \cdot 1\,000$; **d)** $3 \cdot 10\,000$.

4. Calculează, folosind scoaterea unui factor comun:
a) $63 \cdot 25 + 63 \cdot 75$;
b) $103 \cdot 72 + 103 \cdot 52$;
c) $289a + 289b$, știind că $a + b = 12$;
d) $1001 \cdot 409 - 1001 \cdot 350$;
e) $47a + 47b - 47c$.



5. Câte cuburi sunt în 12 cutii, știind că în fiecare cutie sunt 30 de cuburi? Dacă un cub are 8 vârfuri și 6 fețe, calculează numărul total de vârfuri și numărul total de fețe.

6. Verifică prin exemple dacă:
a) produsul a două numere naturale este **par**, dacă cel puțin unul din factori este par;
b) produsul a două numere naturale este **impar**, dacă ambii factori sunt impari.

7. Determină suma $a + b + c$, știind că:
a) $7a + 7b + 7c = 35$; **b)** $200 - 11a - 11b - 11c = 101$.

8. Calculează suma: $s = 5 + 10 + 15 + 20 + ... + 500$.

9. Dacă $2a + b = 37$ și $5a + 3b = 98$, calculează:
a) $7a + 4b$; **b)** $6a + 3b$; **c)** $10a + 6b$; **d)** $16a + 9b$.

10. Determină numerele naturale x și y, știind că: $(2x + 1)(5y - 3) = 30$.

Indicație:
Vei ține cont că $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 = 10 \cdot 3 = 15 \cdot 2 = 30 \cdot 1$ și de faptul că $2x + 1$ este număr impar.

Evaluează-te

1. Calculează:
a) $125 \cdot 86$; **b)** $143 \cdot 75 + 143 \cdot 25$; **c)** $37 \cdot x + 37 \cdot y - 37 \cdot z$, știind că $x + y - z = 5$. **3 puncte**

2. Câte file au în total 3 caiete de matematică și 5 caiete dictando, știind că un caiet de matematică are 64 de file și cel dictando are 48 de file? **3 puncte**

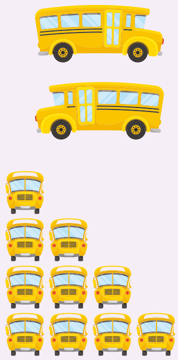
3. Determină ultima și penultima cifră a produsului: $p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot ... \cdot 100$. **3 puncte**
Din oficiu: 1 punct

Învățând matematică, înveți să gândești.

Grigore Moisil (10 ianuarie 1906 – 21 mai 1973) a fost un ilustru matematician și informatician. A sprijinit realizarea primelor calculatoare românești, situând Universitatea București în primele zece universități din lume care aveau un centru de calcul.

I.9. ÎMPĂRȚIREA EXACTĂ (CU REST 0) A NUMERELOR NATURALE

Descoperă



Cei 120 de elevi ai școlii, calificați la concursul de robotică „Grigore Moisil" trebuie să facă deplasarea cu microbuzul școlar la locul de desfășurare a competiției. Știind că microbuzul are 30 de locuri, câte drumuri dus–întors trebuie să facă șoferul microbuzului pentru a transporta toți elevii la concurs?

Răspuns:

La primul transport se aduc 30 de elevi din cei 120. Rămân: 120 – 30 = 90 de elevi.

La al doilea transport se mai aduc 30 de elevi. Mai rămân: 120 – 30 – 30 = 60 de elevi.

La al treilea transport se aduc încă 30 de elevi. Mai rămân: 120 – 30 – 30 – 30 = 30 de elevi.

La al patrulea transport se aduc ultimii 30 de elevi. $120 - \underbrace{30 - 30 - 30 - 30}_{\text{de 4 ori}} = 0$, deci nu mai rămâne niciun elev.

Cele 4 scăderi repetate cu 30 le putem scrie prin operația de împărțire, astfel: **120 : 30 = 4**.

Observație: Deoarece ultimul rest este 0, spunem că **împărțirea este exactă.**

Reține!

- **Câtul** a două numere naturale a și b, $b \neq 0$, notat $\boldsymbol{a : b}$, dacă există, este acel unic număr natural c, pentru care $a = b \cdot c$. Numerele a și b se numesc **factorii** împărțirii; a se numește **deîmpărțit**, iar b se numește **împărțitor**.

Operația prin care se obține numărul natural c se numește **împărțirea exactă** a lui a la b.

- Împărțirea la 0 nu are sens.
- $0 : n = 0$, pentru orice număr natural nenul n.
- Proba împărțirii se poate face prin împărțire sau înmulțire.

$$a : b = c, \quad b \neq 0$$

deîmpărțit

împărțitor

cât

Exemplu: Proba împărțirii 120 : 30 = 4 se face prin 120 : 4 = 30 sau 30 · 4 = 120.

Algoritm de calcul al câtului unei împărțiri

2	7	5	4	2	4	7	
2	3	5	↓		5	8	6
=	4	0	4				
	3	7	6	↓			
	=	2	8	2			
		2	8	2			
		=	=	=			

Aproximăm câtul 275 : 47 ≈ 5 prin lipsă.

Calculăm 5 · 47 = 235 și scădem din 275.

Coborâm cifra 4 lângă restul obținut la pasul anterior.

Aproximăm câtul 404 : 47 ≈ 8 prin lipsă.

Calculăm 8 · 47 = 376 și scădem din 404.

Coborâm cifra 2 lângă restul obținut la pasul anterior.

Calculăm 282 : 47 = 6. Calculăm 6 · 47 = 282 și scădem din 282, obținând restul 0.

Deci, 27 542 : 47 = 586.

Exersează

1. Efectuează împărțirile:

a) 520 : 10; **b)** 108 : 9; **c)** 8 755 : 85; **d)** 36 176 : 952.

Rezolvare:

a) 520 : 10 = 52;
b) 108 : 9 = 12;
c) 8 755 : 85 = 103;
d) 36 176 : 952 = 38.

1	0	8	9	
	9	↓	1	2
=	1	8		
	1	8		
	=	=		

8	7	5	5	8	5	
8	5	↓	↓	1	0	3
=	2	5	5			
	2	5	5			
	=	=	=			

3	6	1	7	6	9	5	2
2	8	5	6	↓	3	8	
=	7	6	1	6			
	7	6	1	6			
	=	=	=	=			

2. De câte ori este mai mare câtul numerelor 135 500 și 10 decât numărul natural 25?

Rezolvare:

Calculăm 135 500 : 10 = 13 550; apoi efectuăm împărțirea 13 550 : 25 = 542.

Rezolvă

1. Efectuează următoarele împărțiri și apoi efectuează proba prin împărțire:

a) 632 : 8; **b)** 3 800 : 25; **c)** 40 426 : 41; **d)** 269 472 : 4 812.

2. Efectuează următoarele împărțiri și apoi efectuează proba prin înmulțire:

a) 5 508 : 108; **b)** 7 098 : 78; **c)** 28 000 : 32; **d)** 5 854 784 : 7 264.

3. Calculează prețul unui bilet pentru adulți la un turneu de tenis, folosind informațiile din tabel:

Numărul spectatorilor	**Adulți**	**Copii**
	3 475	1 236
Prețul unui bilet (lei)		35
Suma totală încasată (lei)	303 885	

4. De câte ori este mai mare câtul numerelor 65 780 și 46 decât numărul natural 26?

5. De câte ori este mai mic câtul numerelor 348 și 58 decât numărul natural 25 524?

6. **Joc în echipă!** Formați echipe de câte 4 elevi. Primul elev scrie pe o foaie un număr de două cifre și o dă următorului coleg. Acesta scrie de trei ori numărul găsit, formând un număr de șase cifre, pe care îl împarte la 111 și scrie rezultatul pe o altă foaie, pe care o dă mai departe. Al treilea elev împarte numărul la 7, scrie rezultatul pe o altă foaie și o dă mai departe. Ultimul elev împarte numărul găsit la 13, aflând numărul scris de primul elev.

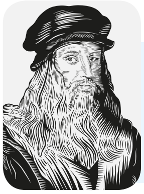
Evaluează-te

1. Calculează: **a)** 612 : 18; **b)** 6 000 : 25; **c)** 2 688 : 48. **3 puncte**

2. Arată că numerele *a* = 1 656 și *b* = 2 254 se împart exact la 23 și că suma și diferența acestora se împart exact la 23. **3 puncte**

3. Aflați cel mai mic și cel mai mare număr de trei cifre care se împart exact la 56. Precizează câte numere de trei cifre se împart exact la 56. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

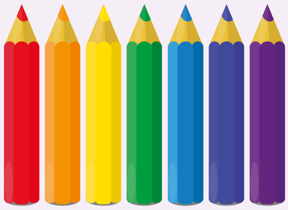


Pictura este ca o poezie mută; poezia este ca o pictură oarbă.

Leonardo da Vinci (15 aprilie 1452 – 2 mai 1519) a fost unul dintre cei mai de seamă reprezentanți ai renașterii: pictor, sculptor, arhitect, muzician, inginer, inventator, anatomist, geolog, cartograf, botanist și scriitor.

I.10. ÎMPĂRȚIREA CU REST A NUMERELOR NATURALE

Descoperă



Profesoara de desen a Mariei a cumpărat creioane colorate pentru toți elevii din clasă, însă două creioane le-a folosit pentru afișul realizat de Zilele Școlii. Pentru a afla în ce culori a desenat afișul, Maria grupează pe 7 culori cele 103 creioane colorate rămase și observă că după ce obține 14 grupe de câte 7 creioane de aceeași culoare îi mai rămân 5 creioane. Cum a aflat Maria ce culori are afișul?

1	0	3	7	
	7	↓	1	4
=	3	3		
	2	8		
	=	5		

- 7 în 10 se cuprinde o dată. Obținem că 1 este prima cifră a câtului și restul este 3.
- Coborâm cifra următoare, 3.
- 7 în 33 se cuprinde de 4 ori. Obținem că 4 este a doua cifră a câtului și 5 este restul împărțirii.

Deci, $103 : 7 = 14$ rest 5. Proba: $103 = 7 \cdot 14 + 5$.

Reține!

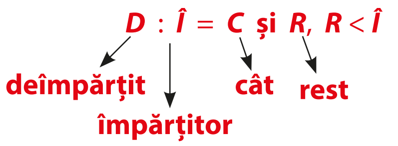
- Pentru oricare două numere naturale, D (deîmpărțit) și $\hat{I}$ (împărțitor), cu $\hat{I} \neq 0$, există două numere unice C (cât) și R (rest), cu $R < \hat{I}$, astfel încât:

$$D : \hat{I} = C \text{ și } R$$

sau

$$D = \hat{I} \cdot C + R.$$

Această relație este cunoscută ca **teorema împărțirii cu rest**.



$$D = \hat{I} \cdot C + R, R < \hat{I}$$

- Operația prin care se obțin numerele naturale C și R se numește **împărțirea cu rest** a lui D la $\hat{I}$.
- Restul împărțirii este întotdeauna mai mic strict decât împărțitorul.

Exemplu: $a : 4 = c$ rest r; restul împărțirii este strict mai mic decât 4, deci valorile pe care le poate lua restul sunt: 0, 1, 2, 3.

- **Împărțirea la 0 nu are sens.** Împărțitorul este întotdeauna nenul (diferit de 0).
- Dacă restul împărțirii unui număr natural la 2 este 0, atunci numărul este par (de forma $2k$), iar dacă restul este 1, atunci numărul este impar (de forma $2k + 1$), unde k este un număr natural.

Exemple: $46 : 2 = 23$ rest 0, $46 = 2 \cdot 23$, deci numărul 46 este par;
$87 : 2 = 43$ rest 1, $87 = 2 \cdot 43 + 1$, deci numărul 87 este impar.

Observație: Pentru trei numere naturale a, b, c este adevărată relația: $(a + b) : c = a : c + b : c$, în contextul în care împărțirile au restul zero.

Exemplu: $(102 + 15) : 3 = 102 : 3 + 15 : 3$;
$(102 + 15) : 3 = 117 : 3 = 39$;
$102 : 3 + 15 : 3 = 34 + 5 = 39$.

Exersează

1. Calculează restul împărțirii numărului $50a + 75b + 31$ la 25.

Rezolvare: Pentru a calcula restul împărțirii numărului la 25 trebuie să scriem numărul $50a + 75b + 31$ sub forma $25 \cdot C + R$, unde $R < 25$ și C un număr natural.
$50a + 75b + 31 = 25 \cdot 2 \cdot a + 25 \cdot 3 \cdot b + 25 + 6 = 25(2a + 3b + 1) + 6$ $(6 < 25)$, deci restul împărțirii este 6.

2. Determină toate numerele naturale care împărțite la 8 dau restul de două ori mai mic decât câtul.

Rezolvare: Conform teoremei împărțirii cu rest, se cer numerele naturale n care îndeplinesc condiția: $n = 8 \cdot 2r + r$, de unde $n = 16r + r = 17r$, cu $r < 8$. Pentru $r = 1$, obținem $n = 17 \cdot 1 = 17$. Pentru $r = 2$, obținem $n = 17 \cdot 2 = 34$. Pentru $r = 3$, obținem $n = 17 \cdot 3 = 51$. Pentru $r = 4$, obținem $n = 17 \cdot 4 = 68$. Pentru $r = 5$, obținem $n = 17 \cdot 5 = 85$. Pentru $r = 6$, obținem $n = 17 \cdot 6 = 102$. Pentru $r = 7$, obținem $n = 17 \cdot 7 = 119$. Așadar, numerele sunt: 17, 34, 51, 68, 85, 102 și 119.

Rezolvă

1. Calculează, precizând câtul și restul, apoi fă proba:
a) 105 : 8; **b)** 2 735 : 12; **c)** 4 963 : 108; **d)** 12 730 : 4 105.

2. Știind că $a : b = c$ rest r, $r < b$, determină valorile necunoscute din tabel:

a	b	c	r	$a = b \cdot c + r$
103	12			
1 200	53			
2 450		64	18	
	43	21	10	
2 040		78		

3. Care este numărul natural care împărțit la 12 dă câtul 6 și restul 5?

4. Determină cel mai mic număr natural care împărțit la 63 dă câtul 12.

5. Determină numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 5 și restul 12.

6. Suma a trei numere naturale este 250. Găsește numerele, știind că împărțind primul număr la al doilea se obțin câtul 2 și restul 34 și împărțind primul număr la al treilea se obțin câtul 1 și restul 33.

7. Determină toate numerele naturale nenule care împărțite la 13 dau restul egal cu câtul.

8. Determină cel mai mare și cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțite la 15 dau câtul 7.

9. Care este restul împărțirii numărului $14a + 14b + 19$ la 14?

10. Un număr natural este cu 8 mai mare decât un al doilea număr. Dacă împărțim suma lor la diferența acestora se obțin câtul 4 și restul 6. Determină cele două numere.

Evaluează-te

1. Calculează, precizând câtul și restul, apoi fă proba:
a) 87 : 35; **b)** 24 700 : 450; **c)** 1 008 : 7. **3 puncte**

2. Suma a două numere naturale este 90. Află numerele, știind că împărțindu-l pe cel mai mare la cel mai mic obținem câtul 2 și restul 15. **3 puncte**

3. Determină suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 6 dau câtul 12. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE

TESTUL 1

(1 punct) **1.** Scrie cu cifre arabe numărul *douăzeci și cinci de mii optzeci și nouă*.

(1 punct) **2.** Efectuează următoarele calcule:
a) $2\,803 + 598$; **b)** $6\,305 - 908$; **c)** $23 \cdot 58$; **d)** $4\,984 : 89$.

(1 punct) **3.** Calculează: $\{[329 - (286 - 2\,313 : 9)] : 10 + 552 : 8 + 1\} : 100 + 4$.

(1 punct) **4.** Compară numerele:
a) $87 \square 105$; **b)** $1\,309 \square 1\,321$; **c)** $\overline{a2b} \square 40\,371$; **d)** $603 \square \overline{169x}$.

(1 punct) **5.** Aproximează prin lipsă, prin adaos și rotunjește la sute numărul 63 761.

(1 punct) **6.** Calculează suma: $s = 1 + 2 + 3 + ... + 50$.

(1 punct) **7.** Care este cel mai mare număr natural care împărțit la 31 dă restul dublul câtului?

(1 punct) **8.** Determină numerele naturale a, b, c, știind că: $a + b = 83$, $b + c = 139$ și $a + c = 116$.

(1 punct) **9.** Suma a trei numere naturale impare consecutive este 135. Determină numerele.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

TESTUL 2

(1 punct) **1.** Efectuează următoarele calcule:
a) $1\,493 + 625$; **b)** $3\,271 - 981$; **c)** $32 \cdot 18$; **d)** $2\,392 : 46$.

(1 punct) **2.** Calculează: $\{196 + [66 + (134 \cdot 28 - 134 \cdot 17) : 11] : 50\} : 25$.

(1 punct) **3.** Câte cifre se folosesc pentru numerotarea unei cărți cu 240 de pagini?

(1 punct) **4.** Aproximează prin lipsă, prin adaos și rotunjește la sute numărul 7 849.

(1 punct) **5.** Calculează suma: $s = 51 + 52 + 53 + ... + 100$.

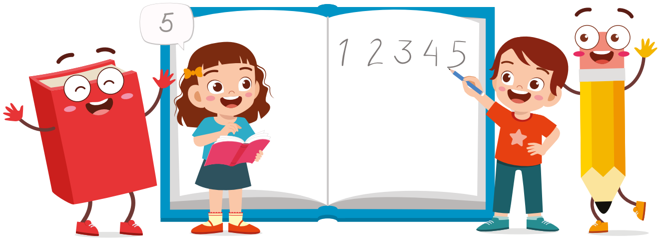
(1 punct) **6.** Calculează suma numerelor naturale de forma $\overline{a2b}$, știind că produsul cifrelor sale este 12.

(1 punct) **7.** Determină numărul natural care împărțit la 23 dă câtul 5 și restul 17.

(1 punct) **8.** Ionel a cumpărat 5 ciocolate și 9 napolitane plătind 100 de lei și primind rest 5 lei. Știind că prețul ciocolatei este dublu față de prețul unei napolitane, află cât costă o ciocolată.

(1 punct) **9.** Descoperă regula și completează șirul următor cu încă patru numere naturale: 1, 7, 2, 12, 3, 17, 4, 22, ..., ..., ..., ...

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.



Cel care zâmbește în loc să se înfurie va fi întotdeauna mai puternic.

Japonia, cunoscută ca *țara soarelui răsare*, are o populație de 130 de milioane de locuitori. Sistemul de educație din Japonia este cotat ca fiind printre cele mai performante de pe glob. În școli nu există angajați care să se ocupe de păstrarea curățeniei, elevii sunt cei care fac curat.

I.11. PUTEREA CU EXPONENT NATURAL A UNUI NUMĂR NATURAL

Descoperă

Mihai primește de la tatăl său, săptămânal, ca bani de buzunar, 100 de lei. El vine cu ideea să primească în prima zi a lunii 1 leu, a doua zi din lună 2 lei, în a treia zi patru lei, în a patra zi opt lei, în fiecare nouă zi dublu față de ziua precedentă, până la finalul lunii. Tatăl a acceptat. Puteți spune dacă în acest fel copilul va avea mai mulți bani de buzunar ca înainte?

Răspuns: În cele aproximativ patru săptămâni din lună, fiul primea suma de $4 \cdot 100 = 400$ de lei.

Conform noii înțelegeri, copilul ar primi:

- 1 leu în prima zi
- 2 lei în a doua zi
- $2 \cdot 2 = 4$ lei în a treia zi
- $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lei în a patra zi
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lei în a cincea zi
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ de lei în a șasea zi
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ de lei în a șaptea zi

După o săptămână, suma pe care o va primi copilul este: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ de lei. Observăm că după o săptămână copilul ar primi mai mult decât primea inițial. Continuând calculul, constatăm că sumele cresc și mai mult.

Pentru a prescurta calculul, notăm: $\underbrace{2 \cdot 2}_{\text{de 2 ori}} = 2^2$, $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 3 ori}} = 2^3$, $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 4 ori}} = 2^4$, ..., $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 27 de ori}} = 2^{27}$.

Dacă notăm cu S suma pe care urmează să o primească în 4 săptămâni (28 de zile) avem:

$$S = 1 + 2 + \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{de 2 ori}} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 3 ori}} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 4 ori}} + ... + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 27 de ori}}.$$

Folosind scrierea cu puteri, $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{27}$, care are o valoare foarte mare. Vom reveni cu calculul acestei sume.

Reține!

- Dacă a și n sunt numere naturale, atunci $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ factori}}$ se notează a^n și se citește „a la puterea n”.
- Numărul a este **baza puterii** care arată ce număr se înmulțește, iar numărul n este **exponentul puterii** care arată de câte ori se înmulțește baza.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

a^n → **exponent** (n), → **bază** (a)

- Prin convenție, pentru orice număr natural diferit de zero, avem $\boldsymbol{a^0 = 1}$ și $\boldsymbol{a^1 = a}$. Operația $\boldsymbol{0^0}$ **nu are sens**, iar $\boldsymbol{0^n = 0}$, oricare ar fi $n \neq 0$.
- Ridicarea la putere este operație de ordinul al treilea, operațiile cu puteri efectuându-se înainte de înmulțiri și împărțiri, care la rândul lor se efectuează înainte de adunări și scăderi.

Exemple: $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$;
$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 25 \cdot 25 = 625 \cdot 25 = 15\,625$.

Exersează

1. Scrie ca o putere și precizează care este baza și care este exponentul.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; b) $(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$.

Rezolvare:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$; baza 5, exponentul 7;

b) $(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) = (x + y)^4$; baza $x + y$, exponentul 4.

2. Efectuează calculele:

a) $3^2 + 2^3 - 5$; b) $1\,000 - 10^2 + 7^0 - 100^1$.

Rezolvare:

a) $3^2 + 2^3 - 5 = 9 + 8 - 5 = 17 - 5 = 12$;

b) $1\,000 - 10^2 + 7^0 - 100^1 = 1\,000 - 100 + 1 - 100 = 900 + 1 - 100 = 901 - 100 = 801$.

Rezolvă

1. Scrie următoarele produse sub formă de puteri și precizează care sunt bazele și care sunt exponenții.

a) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$; b) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; c) $2\,022 \cdot 2\,022$;

d) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; e) $53 \cdot 53 \cdot 53 \cdot 53$; f) $m \cdot m \cdot m \cdot m$.

2. **Lucrați în perechi!** Precizați baza și exponentul pentru următoarele puteri, urmărind modelul dat.

Puterea	3^{23}	7^2	1^{34}	51^0	a^n	x^3	5^{3x+7}	$(3x-1)^3$
Baza	**3**							
Exponentul	**23**							

3. Calculează:

a) 2^4; b) 2025^0; c) 9^1; d) 1^{2026}; e) 0^{2023};

f) $2^3 + 3^3 + 4^3$; g) $1^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 4 - 7^0$; h) $(2^3 + 5^3) \cdot 10^2 - 7^3$.

4. Asociază corect calculul din coloana **A** cu rezultatul din coloana **B**.

A	B
a) $2 \cdot 2 \cdot 2$;	1) 6;
b) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$;	2) 1;
c) 5^2;	3) 25;
d) $1^6 + 2^0$;	4) 8;
e) 6^1.	5) 11^5;
	6) 2.

5. Scrie numărul 10 ca sumă a trei puteri cu baze diferite și exponenți diferiți.

6. Calculează suma numerelor naturale cuprinse între 3^2 și 4^2.

7. Scrie numerele 9, 25, 27, 81, 125, 10 000 ca produs de doi sau mai mulți factori identici.

Evaluează-te

1. Calculează: a) 1^6; b) 7^0; c) 2^6. **3 puncte**

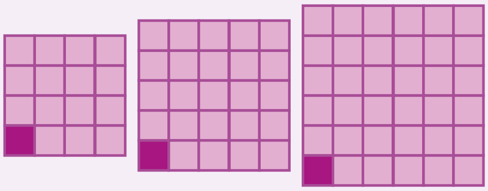
2. Efectuează: a) $0^3 + 3^2$; b) $5^1 - 2^2$; c) $5 \cdot 9^0$. **3 puncte**

3. Determină numerele naturale x și y, știind că: a) $2^x + 3^y = 25$; b) $2^x \cdot 5^y = 500$. **3 puncte**

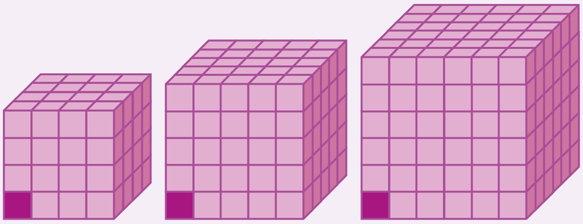
Din oficiu: 1 punct

I.12. PĂTRATUL ȘI CUBUL UNUI NUMĂR NATURAL

Descoperă



Observăm că pentru a acoperi pătratul cu latura de 4 avem nevoie de $4^2 = 16$ pătrățele mici; pentru a acoperi pătratul cu latura de 5 avem nevoie de $5^2 = 25$ pătrățele mici; pentru a acoperi pătratul cu latura de 6 avem nevoie de $6^2 = 36$ pătrățele mici.



Observăm că pentru a umple cubul cu latura de 4 avem nevoie de $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ cubulețe mici; pentru a umple cubul cu latura de 5 avem nevoie de $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ cubulețe mici; pentru a umple cubul cu latura de 6 avem nevoie de $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ cubulețe mici.

Reține!

Puterea a doua a unui număr natural se numește **pătratul** acelui număr natural.
Exemple: $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$.
Se scrie: $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$.
Se citește: „4 la pătrat este 16” sau „16 este pătratul lui 4”.

Un număr natural care poate fi scris ca pătratul unui număr natural se numește **pătrat perfect**.
Exemple: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 etc.

Puterea a treia a unui număr natural se numește **cubul** acelui număr natural.
Exemple: $0^3 = 0$; $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$.
Se scrie: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
Se citește: „4 la cub este 64„ sau „64 este cubul lui 4”.

Un număr natural care poate fi scris ca puterea a treia a unui număr natural se numește **cub perfect**.
Exemple: 0, 1, 8, 27, 64, 125 etc.

- Observă următorul tabel, unde $U(x^2)$ reprezintă ultima cifră a pătratului perfect x^2, cu x număr natural.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$U(x^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Deducem din acest tabel că **ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect poate fi: 0, 1, 4, 5, 6 sau 9**. Astfel, o modalitate de a arăta că un număr natural nu este pătrat perfect este aceea de a arăta că ultima sa cifră este 2, 3, 7 sau 8.

Observație: Nu toate numerele care au ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 sunt pătrate perfecte. De exemplu, numerele 10, 31, 44, 45, 56, 89 nu sunt pătrate perfecte.

- Pentru a arăta că un număr natural este pătrat perfect, trebuie să-l scriem ca o putere cu exponentul 2.

Exemple: $100 = 10^2$, $81 = 9^2$, $1024 = 32^2$.

- Un număr natural situat între două pătrate perfecte consecutive nu este pătrat perfect.

Exemplu: Numărul 56 nu este pătrat perfect, deoarece este situat între două pătrate perfecte consecutive: $7^2 = 49 < 56 < 64 = 8^2$.

Exersează

1. **a)** Scrie următoarele numere naturale ca puteri cu exponentul 2: 16, 64, 100, 144, 400.
b) Scrie următoarele numere naturale ca puteri cu exponentul 3: 64, 125, 343, 729.

Rezolvare:

a) $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$; $64 = 8 \cdot 8 = 8^2$; $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$; $144 = 12 \cdot 12 = 12^2$; $400 = 20 \cdot 20 = 20^2$.
b) $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$; $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$; $343 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$; $729 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$.

2. Arată că numerele naturale 72, 173 și 306 nu sunt pătrate perfecte.

Rezolvare:

Cum $64 < 72 < 81$, adică $8^2 < 72 < 9^2$, deducem că numărul natural 72 nu este pătrat perfect, fiind situat între două pătrate perfecte consecutive.

Cum $169 < 173 < 196$, adică: $13^2 < 173 < 14^2$, deducem că numărul natural 173 nu este pătrat perfect, fiind situat între două pătrate perfecte consecutive.

Cum $289 < 306 < 324$, adică $17^2 < 306 < 18^2$, deducem că numărul natural 306 nu este pătrat perfect, fiind situat între două pătrate perfecte consecutive.

3. Determină ultima cifră a numărului 2^{2030}.

Rezolvare:

Studiind ultima cifră a puterilor lui 2, observăm că aceasta se repetă din 4 în 4.

$2^1 =$ **2**	$2^5 =$ 3**2**
$2^2 =$ **4**	$2^6 =$ 6**4**
$2^3 =$ **8**	$2^7 =$ 12**8**
$2^4 =$ 1**6**	$2^8 =$ 25**6**

Atunci ultima cifră a lui 2^{2030} este ultima cifră a puterii lui 2 care are ca exponent restul împărțirii lui 2030 la 4 ($2030 : 4 = 507$ rest 2).

Dacă notăm cu $U(n)$ ultima cifră a numărului natural n, atunci $U(2^{2030}) = U(2^2) = 4$.

Dacă notăm cu $\overline{A2}$ un număr natural cu două sau mai multe cifre, care are cifra unităților 2, putem generaliza calculul ultimei cifre a unei puteri a cărei bază are cifra unităților 2:

$$U\left(\overline{A2}^{\,n}\right) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } n = 4k+1 \\ 4, \text{ dacă } n = 4k+2 \\ 8, \text{ dacă } n = 4k+3 \\ 6, \text{ dacă } n = 4k \end{cases}.$$

Rezolvă

1. Scrie pătratele perfecte cuprinse între 30 și 200.

2. Scrie cuburile perfecte cuprinse între 30 și 400.

3. Știind că între două pătrate perfecte consecutive nu mai există niciun alt pătrat perfect, completează următoarele inegalități:

$\boxed{5}^{\boxed{2}} < 26 < \boxed{}^{\boxed{2}}$; $\boxed{}^{\boxed{2}} < 110 < \boxed{}^{\boxed{}}$; $\boxed{}^{\boxed{2}} < 38 < \boxed{7}^{\boxed{2}}$; $\boxed{}^{\boxed{2}} < 200 < \boxed{}^{\boxed{2}}$.

4. Găsește pătratele perfecte de forma:

a) $\overline{12a}$; **b)** $\overline{14a}$; **c)** $\overline{1a6}$.

5. **Activitate în perechi**

Timp de un minut, fiecare elev caută cât mai multe pătrate perfecte în tabel. Cine găsește cele mai multe câștigă!

10	1 034	330	576	8	2 022	1	625
325	400	1 339	24	4 095	324	169	72
2 700	69	16	3 000	2 301	81	571	1 600
900	500	100	4	2 500	2	729	555
1 000	305	10 000	49	850	196	1 864	36

6. Calculează câte numere naturale sunt între:
a) 0^2 și 1^2; **b)** 1^2 și 2^2; **c)** 2^2 și 3^2; **d)** 3^2 și 4^2; **e)** 4^2 și 5^2; **f)** 5^2 și 6^2.

Se poate trage concluzia că între două pătrate perfecte consecutive n^2 și $(n + 1)^2$ sunt $2n$ numere naturale?

7. Arată că rezultatele următoarelor calcule sunt pătrate perfecte:
a) $2\,022 + 2\,022 \cdot 2\,021$; **b)** $1\,005 \cdot 300 + 1\,005 \cdot 605 + 1\,005 \cdot 100$;
c) $4^2 + 3^2$; **d)** $6^2 + 8^2$.

8. Determină ultima cifră a expresiei și precizează dacă rezultatul ei poate fi sau nu pătrat perfect:

$$203^{12} + 305^{16} + 607^{20} + 809^{31} + 101^{300}.$$

9. Arată că diferența dintre produsul a două numere consecutive și cel mai mic număr dintre acestea este pătrat perfect.

10. Calculează restul împărțirii la 4 a pătratelor perfecte: 4, 9, 16, 36, 49, 64, 100, 144. Se poate trage concluzia că restul împărțirii unui pătrat perfect la 4 este 0 sau 1?

11. Arată că numărul 10 009 nu este pătrat perfect.

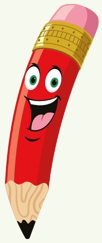
12. Determină numerele naturale a și b, știind că $2^a + 3^b = 113$.

13. Determină numerele naturale a, b și c, știind că $a^3 + b^3 + c^3 = 405$.

14. Scrie numărul 100 ca sumă de două pătrate perfecte.

15. Pentru $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, asociază corect calculul din coloana **A** cu rezultatul din coloana **B**.

A	**B**
a) a^b;	**1)** 16;
b) b^c;	**2)** 20;
c) b^{a+c};	**3)** 4;
d) $c^a + c^b$;	**4)** 32;
e) $a^b \cdot c^a$;	**5)** 1;
f) $a \cdot b^c + b \cdot c^a + c \cdot a^b$.	**6)** 17;
	7) 28.



Evaluează-te

1. Calculează: **a)** 2^2; **b)** 2^3; **c)** 5^2; **d)** 5^3. **3 puncte**

2. Demonstrează că numărul 119 nu poate fi pătrat perfect. **3 puncte**

3. Arată că numărul $a = 2023 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2022)$ este pătrat perfect. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Puterea celui cu adevărat puternic astfel se manifestă: să știi că poți distruge pe cineva, să n-o faci și acela să nu știe.

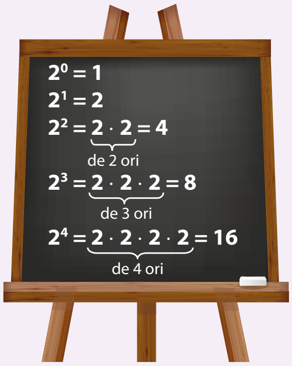
Marin Preda (5 august 1922 – 16 mai 1980) a fost unul dintre cei mai importanți romancieri români. Dintre cele mai importante romane ale sale amintim: *Moromeții* (volumul I – 1955, volumul II – 1967), *Delirul* (1975), *Cel mai iubit dintre pământeni* (1980).

I.13. REGULI DE CALCUL CU PUTERI

Descoperă

- $(\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{de 3 ori}})\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{de 4 ori}} = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{de }3+4=7\text{ ori}}$ sau $2^3\cdot2^4=2^{3+4}=2^7$;
- $(\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{de 8 ori}}):(\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{de 3 ori}}) = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{de 8 - 3 = 5 ori}}$ sau $2^8:2^3=2^{8-3}=2^5$;
- $(2^3)^4 = 2^3\cdot2^3\cdot2^3\cdot2^3 = (\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{de 3 ori}})\cdot(\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{de 3 ori}})\cdot(\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{de 3 ori}})\cdot(\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{de 3 ori}}) =$

$= \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{de }3\,\cdot\,4=12\text{ ori}}$ sau $(2^3)^4=2^{3\cdot4}=2^{12}$.



Reține!

- Pentru a efectua mai ușor calculele cu puteri, folosim următoarele **reguli** (proprietăți), unde a, b, m, n sunt numere naturale și $a \neq 0, b \neq 0$.

	Exemple:
1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază → se scrie baza și se adună exponenții: $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$3^5\cdot3^4 = 3^{5+4} = 3^9$; $5^4\cdot5 = 5^{4+1} = 5^5$; $11^6\cdot11^3\cdot11 = 11^{6+3+1} = 11^{10}$.
2. Împărțirea puterilor cu aceeași bază → se scrie baza și se scad exponenții: $a^m : a^n = a^{m-n}, m > n$	$7^8 : 7^6 = 7^{8-6} = 7^2 = 49$; $3^4 : 3 = 3^{4-1} = 3^3 = 27$.
3. Puterea unei puteri → se scrie baza și se înmulțesc exponenții: $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$(15^6)^2 = 15^{6\cdot2} = 15^{12}$; $(37^{63})^0 = 37^{63\cdot0} = 37^0 = 1$.
4. Puterea unui produs → se ridică la putere fiecare factor al produsului: $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$	$(2\cdot3)^2 = 2^2\cdot3^2 = 4\cdot9 = 36$.
5. Puterea unui cât → se ridică la putere fiecare factor al câtului: $(a:b)^n = a^n:b^n$	$(35:7)^4 = 35^4:7^4 = 5^4 = 625$.

- Orice putere cu exponent par este pătrat perfect: $a^{2n} = (a^n)^2$, a și n numere naturale.
  Exemplu: $10^6 = 10^{2\cdot3} = (10^3)^2 = (1\ 000)^2$.
- Produsul a două sau mai multor pătrate perfecte este pătrat perfect: $a^2\cdot b^2 = (a\cdot b)^2$.
  Exemplu: $3^4\cdot10^6 = (3^2)^2\cdot(10^3)^2 = 9^2\cdot1\ 000^2 = (9\cdot1\ 000)^2 = 9\ 000^2$.

Exersează

1. Efectuează, aplicând regulile de calcul cu puteri:

a) $(3^6)^2\cdot(9^4)^4:(81^5)^2$; **b)** $7^{n+3}+3\cdot7^{n+1}-4\cdot7^n$.

Rezolvare:

a) $(3^6)^2\cdot(9^4)^4:(81^5)^2 = 3^{12}\cdot9^{16}:81^{10} = 3^{12}\cdot(3^2)^{16}:(3^4)^{10} = 3^{12}\cdot3^{32}:3^{40} = 3^{44}:3^{40} = 3^{44-40} = 3^4 = 81$;

b) $7^{n+3}+3\cdot7^{n+1}-4\cdot7^n = 7^n\cdot7^3+3\cdot7^n\cdot7-4\cdot7^n = 7^n(7^3+3\cdot7-4) = 7^n(343+21-4) = 360\cdot7^n$.

2. Calculează suma: $s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{27}$.

Rezolvare:
Înmulțim cu 2 suma cerută și obținem: $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{27} + 2^{28}$ (1).
Dar $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{27} = s - 1$, pe care o înlocuim în (1) și obținem $2s = s - 1 + 2^{28}$, adică $s = 2^{28} - 1$.

Rezolvă

1. Calculează, folosind regula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:
a) $3^7 \cdot 3^4$; **b)** $2^6 \cdot 2^4 \cdot 2$; **c)** $7^8 \cdot 7^6$; **d)** $11^{53} \cdot 11^{47}$;
e) $2^{2x} \cdot 2^{3x}$; **f)** $13^{5a} \cdot 13^{5b}$; **g)** $5^{62} \cdot 5^{37} \cdot 5$; **h)** $7^1 \cdot 7^2 \cdot 7^3 \cdot ... \cdot 7^{100}$.

2. Calculează, folosind regula $a^m : a^n = a^{m-n}$:
a) $2^3 : 2$; **b)** $7^6 : 7^3 : 7$; **c)** $12^7 : 12^6$; **d)** $14^{37} : 14^{35}$;
e) $3^{547} : 3^{547}$; **f)** $13^x : 13^y$; **g)** $20^{622} : 20^{620}$; **h)** $37^{1+2+3+...+10} : 37^{3+4+...+10}$.

3. Calculează, folosind regula $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:
a) $(5^3)^0$; **b)** $(2^3)^5$; **c)** $(1^{30})^{50}$; **d)** $(2^5)^3 \cdot (2^3)^5 : (2^3)^{10}$;
e) $(7^{30})^0 \cdot (49^5)^3 : (7^6)^5$; **f)** $(3^4)^5 : (9^3)^2$; **g)** $(21^3)^5 : (21^2)^7$; **h)** $(2^3)^5 \cdot (4^3)^5 : (8^3)^4$.

4. Calculează, folosind regula $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:
a) $2^3 \cdot 5^3$; **b)** $(3^9 \cdot 7^9) \cdot (3^7 \cdot 7^7)$; **c)** $(2^{20} \cdot 5^{20}) \cdot (4^{10} \cdot 25^{10})$; **d)** $(7^{10} \cdot 5^{10}) \cdot (49^3 \cdot 25^3)$.

5. Calculează, folosind regula $(a : b)^n = a^n : b^n$:
a) $12^6 : 6^6$; **b)** $30^8 : 15^8$; **c)** $(20^{30} : 5^{30}) : (4^{30} : 2^{30})$; **d)** $(30^{12} : 15^{12}) : (6^{12} : 3^{12})$.

6. Efectuează și scrie rezultatul sub forma unei puteri, acolo unde este cazul:
a) $6^0 + 6^2 \cdot 6$; **b)** $5^8 \cdot 5^6 : 5^{10}$; **c)** $(3^7)^4 : (9^2)^3$; **d)** $(2^5)^6 \cdot 4^2 : 16^3$;
e) $10 \cdot [2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 - 5^{26} : 5^{24} + (3^8)^3 : 9^{12}]$.

7. Determină suma dintre pătratul lui 5 și cubul lui 3.

8. Arată că următoarele numere sunt pătrate perfecte: **a)** 9^{22}; **b)** 15^{42}; **c)** 7^{32x+4y}.

9. Arată că următoarele numere sunt cuburi perfecte: **a)** 5^{21}; **b)** 31^{42}; **c)** $9^{33x+18y}$.

10. Efectuează:
a) $3^{51} : 3^{48} + 37^1 \cdot 3^3 + 2\,024^0$; **b)** $(2 \cdot 5)^3 + 45^{65} : 9^{65} : 5^{64} - 2\,100^0$;
c) $3^{28} : 27^8 + 3^{3^1} - 3^0 \cdot [3^6 : 3^5 + 3^3 : (3 \cdot 3^2 - 18^1)]$; **d)** $\{3^3 + [3^2 + (13^2 - 5^2 \cdot 5) : 2^2] : 2^2\} : 2^3$.

11. Calculează, folosind factorul comun:
a) $(2^{20} + 2^{19} - 2^{17}) : 11$; **b)** $(3^{25} - 3^{23} + 3^{22}) : 25$; **c)** $5^{n+2} + 5^{n+1} - 5^n$; **d)** $2^{n+2} \cdot 3^{n+1} - 6^n$.

Evaluează-te

1. Calculează: **a)** $2^3 \cdot 2^5$; **b)** $3^6 : 3^5$; **c)** $(5^2)^4$; **d)** $18^6 : 9^6$. **3 puncte**

2. Efectuează:
a) $(5^7)^6 \cdot 5^4 : 5^{40} - 5^4$; **b)** $(12^3)^4 : (12^2)^4 - 12^4$; **c)** $(9^{27} + 9^{26}) : 27^{16}$. **3 puncte**

3. Determină numărul natural x din egalitatea: $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 351$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Inteligența înseamnă putere.

Belgia este o țară din vestul Europei cu capitala la Bruxelles. În școlile primare (clasele I-VI), la fiecare 2 ani, se schimbă învățătorul și se amestecă între ei copiii de la toate clasele din același an. Fiecare elev de clasa I are un elev de clasa a VI-a care îl ajută în prima lună de școală, apoi câte o zi pe săptămână, și cu care formează o echipă la evenimentele școlii.

I.14. COMPARAREA PUTERILOR

Descoperă

$2^1 < 2^2 < 2^3 < 2^4 < 2^5 < 2^6 < 2^7$. Inegalitatea este adevărată, deoarece $2 < 4 < 8 < 16 < 32 < 64 < 128$.
$2^2 < 3^2 < 4^2 < 5^2 < 6^2 < 7^2 < 8^2$. Inegalitatea este adevărată, deoarece $4 < 9 < 16 < 25 < 36 < 49 < 64$.

Reține!

- Dintre două puteri care au bazele egale este mai mică puterea care are exponentul mai mic.
  $a^m < a^n$, *dacă* $m < n$, unde a, m, n sunt numere naturale.
  Exemplu: $3^{27} < 3^{29}$, deoarece $27 < 29$ și bazele sunt egale.
- Dintre două puteri care au exponenții egali este mai mică puterea care are baza mai mică.
  $a^n < b^n$, *dacă* $a < b$, unde a, b, n sunt numere naturale.
  Exemplu: $2^{27} < 3^{27}$, deoarece $2 < 3$ și exponenții sunt egali.

Observații:

Dintre două puteri care au bazele și exponenții diferiți, dacă există aceeași relație de ordine între baze și între exponenți, atunci se păstrează relația de ordine și între puteri.

Pentru a compara două puteri care au bazele și exponenții diferiți, trebuie să aducem puterile la aceeași bază sau la același exponent sau să comparăm puterile prin intermediul aceleiași puteri.

Exersează

1. Compară 5^{207} cu 7^{291}.

Rezolvare:

Se observă că $5 < 7$ și $207 < 291$, deci: $5^{207} < 7^{291}$.

2. Compară 21^x cu 19^{x-3}, unde x este un număr natural, $x > 3$.

Rezolvare:

Se observă că $21 > 19$ și $x > x - 3$ pentru oricare x număr natural, $x > 3$; prin urmare, $21^x > 19^{x-3}$.

3. Compară 16^{20} cu 8^{26}.

Rezolvare:

Vom scrie cele două numere ca puteri cu baza 2, astfel: $16^{20} = (2^4)^{20} = 2^{80}$ și $8^{26} = (2^3)^{26} = 2^{78}$. Comparându-le, obținem $2^{80} > 2^{76}$, adică $16^{20} > 8^{26}$.

4. Compară 7^{200} cu 5^{300}.

Rezolvare:

Vom scrie cele două numere ca puteri cu exponentul 100, astfel: $7^{200} = (7^2)^{100} = 49^{100}$ și $5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100}$. Obținem $7^{200} < 5^{300}$.

5. Compară numerele naturale $a = 2 \cdot 5^{64} - 3 \cdot 5^{63} - 5^{62}$ cu $b = 2^{123} + 3 \cdot 2^{122} - 7 \cdot 2^{121}$.

Rezolvare:

$a = 2 \cdot 5^{64} - 3 \cdot 5^{63} - 5^{62} = 5^{62} \cdot (2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 - 1) = 5^{62} \cdot (50 - 15 - 1) = 34 \cdot 5^{62} = 34 \cdot 5^2 \cdot 5^{60} = 34 \cdot 25 \cdot 5^{60} =$
$= 850 \cdot 5^{60}$;

$b = 2^{123} + 3 \cdot 2^{122} - 7 \cdot 2^{121} = 2^{121} \cdot (2^2 + 3 \cdot 2 - 7) = 2^{121} \cdot (4 + 6 - 7) = 3 \cdot 2^{121} = 3 \cdot 2 \cdot (2^2)^{60} = 6 \cdot 4^{60}$.

Cum $850 > 6$ și $5^{60} > 4^{60}$, rezultă că $a > b$.

Rezolvă

1. Compară puterile: **a)** 6^{20} cu 6^{25}; **b)** 2^{17} cu 2^{15}; **c)** 16^{10} cu 18^{10}.

2. Compară puterile: **a)** 36^5 cu 6^{15}; **b)** 49^{17} cu 7^{32}; **c)** 100^{40} cu 100^{13}.

3. Compară puterile: **a)** 8^{30} cu 16^{22}; **b)** 27^{30} cu 9^{45}; **c)** 5^{400} cu 6^{300}.

4. Ordonează crescător următoarele puteri: 8^{50}, 16^{30}, 4^{30}, 32^{20}, 64^{12}, 128^{11}.

5. Ordonează descrescător următoarele puteri: 2^{500}, 3^{400}, 5^{200}, 16^{150}, 4^{100}, 64^{10}.

6. Arată că numărul natural $a = (3^{11} + 3^{10} + 3^9) : 39$ este pătrat perfect.

7. Determină valorile naturale ale lui x pentru care afirmațiile sunt adevărate:
a) $2^x < 2^3$; **b)** $x^4 < 2^4$; **c)** $x^{10} \leq 1$; **d)** $2^x = 5^x$.

8. Compară puterile: 2^{155} cu 3^{93}.

9. Compară numerele $a = (7^{23} + 7^{22} - 7^{20}) : 7^{20}$ și $b = (49^{13} - 49^{12} + 49^{11}) : 49^{11}$.

10. Calculează restul împărțirii numărului $A = 2\,022^{2024} + 2\,024^{2025} + 2\,025^{2026}$ la 10.

11. Compară puterile: $2^{87} + 2^{86} + 2^{85}$ cu $5^{35} + 5^{34}$.

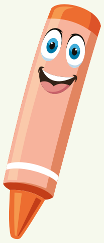
12. Determină sfertul numerelor: 2^{34}, 8^{44}, 256^6.

13. Care număr este mai mare: $7^{34} + 20^{36}$ sau $49^{17} + 300^{18}$?

14. Ordonează crescător puterile: 5^{45}, 7^{30} și 8^{60}.

15. Asociază fiecare inegalitate din coloana **A** cu valorile naturale corespunzătoare ale lui x din coloana **B**.

A	B
a) $3^x \leq 3^2$;	**1)** 0;
b) $5^2 > x^2$;	**2)** 0, 1;
c) $x^7 \leq 1$;	**3)** 0, 1, 2, 3, 4;
d) $x < 2^3$;	**4)** 0, 1, 2, 3;
e) $13^x \leq 5^x$ și $5^x \geq 13^x$.	**5)** 0, 1, 2;
	6) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.



Evaluează-te

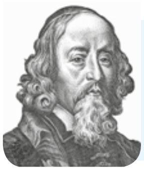
1. Completează, pe caiet, casetele libere:
a) $125 = 5^{\square}$; **b)** $1\,296 = \square^4$; **c)** $2^8 \cdot 8^2 : 16^2 = 2^{\square}$. **3 puncte**

2. Compară următoarele puteri: **a)** 27^{15} cu 9^{22}; **b)** 4^{30} cu 3^{40}; **c)** 10^{30} cu 999^{10}. **3 puncte**

3. Scrie numărul 41^{2025} ca sumă de două pătrate perfecte. Este 41^{2025} cub perfect? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Educația trebuie să fie adevărată, completă, limpede și temeinică.



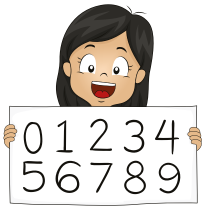
Comenius (28 martie 1592 – 15 noiembrie 1670) a fost un filozof, gramatician și pedagog ceh.

I.15. SCRIEREA ÎN BAZA 10. SCRIEREA ÎN BAZA 2

Descoperă

Numărul 273 se poate scrie sub forma: $273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$.
Folosind notațiile învățate la puteri, numărul 273 se mai poate scrie: $273 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.
Spunem că am folosit în scrierea anterioară descompunerea numărului în baza 10.

Reține!



- Orice număr natural poate fi scris în mod unic ca sumă de produse de doi factori, unul dintre factori fiind o cifră a numărului, iar celălalt factor fiind o putere a lui 10. Această scriere se numește **descompunerea în baza 10** a numărului respectiv.
- Această scriere, împreună cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere constituie **sistemul de numerație zecimal**.
- Numărul natural 10 este **baza** sistemului de numerație zecimal, iar simbolurile folosite în scrierea unui număr în baza 10 sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.
- În general, un număr în baza 10 se poate scrie: $\overline{ab}_{(10)} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$, $\overline{abc}_{(10)} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$, $\overline{abcd}_{(10)} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$ etc., $a \neq 0$.

Descoperă

Scriind numerele 13, 37 ca sume de puteri diferite ale lui 2 obținem:
$13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$;
$37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.
Spunem că am folosit în scrierea anterioară descompunerea numărului în baza 2.

Reține!

- Orice număr natural poate fi scris ca sumă de produse în care un factor este o putere a lui 2. Această scriere se numește **descompunerea în baza 2** a numărului respectiv.
- Scrierea anterioară, împreună cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere constituie **sistemul de numerație binar**.
- Numărul natural 2 este **baza** sistemului de numerație binar, iar simbolurile folosite în scrierea unui număr în baza 2 sunt 0 și 1.
- În general, orice număr în baza 2 se poate scrie: $\overline{ab}_{(2)} = (a \cdot 2^1 + b \cdot 2^0)_{(10)}$, $\overline{abc}_{(2)} = (a \cdot 2^2 + b \cdot 2^1 + c \cdot 2^0)_{(10)}$, $\overline{abcd}_{(2)} = (a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0)_{(10)}$ etc., $a \neq 0$.
- Pentru a **transforma** un număr **din baza 10 în baza 2** utilizăm un algoritm de calcul bazat pe împărțiri succesive la 2. Numărul în baza 2 va fi format din ultimul cât, urmat de toate resturile obținute, scrise în ordine inversă (adică de la dreapta la stânga).

Exersează

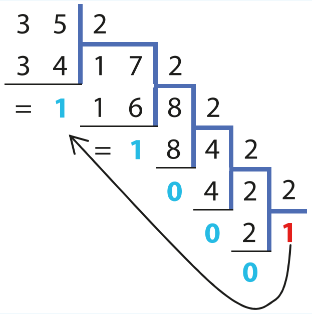
1. Descompune în baza 10 numerele naturale 38, 204 și 19 045.
Rezolvare: $38_{(10)} = 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$; $204_{(10)} = 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$;
$19\,045_{(10)} = 1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

2. Scrie în baza 10 numărul natural $8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.
Rezolvare: $8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 8\,403\,209$.

3. Arată că $35_{(10)} = 100011_{(2)}$ și $100111_{(2)} = 39_{(10)}$.
Rezolvare: Împărțind numărul 35 la 2, obținem: 35 : 2 = 17 rest 1. Împărțim succesiv câturile obținute la 2 și vom avea: 17 : 2 = 8 rest 1, 8 : 2 = 4 rest 0, 4 : 2 = 2 rest 0, 2 : 2 = 1 rest 0.

Astfel, $35_{(10)} = 100011_{(2)}$.

$100111_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 32 + 0 + 0 + 4 + 2 + 1 = 39_{(10)}$.



Rezolvă

1. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $465 = 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$; ☐
b) $3\,093 = 3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1$; ☐
c) $5\,006 = 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^0$; ☐
d) $93\,041 = 9 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$. ☐

2. Fără a efectua calculele, scrie următoarele numere naturale în baza 10:
a) $5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$;
b) $7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
c) $2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
d) $9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

3. Transformă următoarele numere din baza 2 în baza 10: $1101_{(2)}$, $11011001_{(2)}$ și $100100_{(2)}$.

4. Transformă următoarele numere din baza 10 în baza 2: $47_{(10)}$, $85_{(10)}$ și $107_{(10)}$.

5. Determină numărul natural n, știind că $3^{n+2} + 3^{n+1} = 100100_{(2)}$.

6. Determină numărul natural $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 283$.

7. Găsește numărul natural $\overline{abcd}$, știind că $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2\,617$.

8. Determină numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} = 5a + 3b$.

9. Determină numărul natural a, știind că $\overline{aaa} + \overline{aa} + a = 369$.

10. Găsește numerele naturale $\overline{abc}$, știind că $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 66$.

Evaluează-te

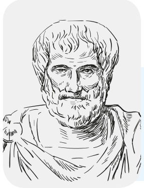
1. Calculează:
a) $54_{(10)} = \square_{(2)}$;
b) $110101_{(2)} = \square_{(10)}$. **3 puncte**

2. Determină numărul $\overline{abcd}$, știind că $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4\,682$. **3 puncte**

3. Determină cifrele distincte a, b, c, știind că $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 777$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Științele matematice în special manifestă ordine, simetrie și limitare și acestea sunt formele supreme de frumusețe.



Aristotel (384 – 322 î.Hr.) este unul dintre cei mai importanți filozofi ai Greciei Antice.

I.16. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR . UTILIZAREA PARANTEZELOR: ROTUNDE, PĂTRATE ȘI ACOLADE

Reține!

- În rezolvarea unui exercițiu care conține mai multe operații aritmetice, precum și paranteze (rotunde, pătrate, acolade), trebuie să respectăm ordinea efectuării operațiilor și ordinea efectuării parantezelor.
- **Ordinea efectuării operațiilor** este:

1. ridicarea la putere (operație de ordinul al treilea);

2. înmulțirea și împărțirea (operații de ordinul al doilea), în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta;

3. adunarea și scăderea (operații de ordinul întâi), în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

- **Ordinea efectuării parantezelor**: mai întâi se rezolvă operațiile din parantezele rotunde; când acestea sunt finalizate, parantezele pătrate devin paranteze rotunde, iar acoladele devin paranteze pătrate. Procedeul se repetă până la eliminarea tuturor parantezelor.

Exersează

1. Calculează: $13^2 - 2^3 \cdot 15 + 7 \cdot 6 : 3$.

Rezolvare: $13^2 - 2^3 \cdot 15 + 7 \cdot 6 : 3 = 169 - 8 \cdot 15 + 42 : 3 = 169 - 120 + 14 = 49 + 14 = 63$.

2. Efectuează: $[10^3 : (564 - 8^3 : 8) + 7]^3$.

Rezolvare: $[10^3 : (564 - 8^3 : 8) + 7]^3 = [1\,000 : (564 - 512 : 8) + 7]^3 = [1\,000 : (564 - 64) + 7]^3 =$
$= (1\,000 : 500 + 7)^3 = (2 + 7)^3 = 9^3 = 729$.

Rezolvă

1. Calculează:

a) $[(23 - 18) \cdot (17 + 8) - 25] : 4 + 7$;

b) $(360 - 290) + (360 : 40)$;

c) $23 \cdot 12 - 250 : 50 + (71 - 59)$;

d) $63 : 21 + 270 : 9 + 4 - 3$.

2. Calculează numărul natural x din egalitățile:

a) $4 \cdot (x - 2) - 14 = 50$;

b) $25 - 3 \cdot (2x + 1) = 10$;

c) $[7 + 3 \cdot (6x - 1)] : 40 + 9 = 10$;

d) $12 \cdot 2 + x \cdot [7 + 2 \cdot (4 + 1)] = 58$.

3. Efectuează:

a) $(4^0 + 4^1 + 4^2)^5 : 21^4 + 21^0$;

b) $[6^{2024} : 36^{1010} + (5^{11})^3 : 25^{15} - 2023^0] - [(3^5)^4 : 9^8 + 1^{2026}]$;

c) $6^{24} : 6^{23} \cdot 6 - (25^4)^5 : 5^{39}$;

d) $[(11 - 0^{2023}) \cdot (3^3 - 3^2) + 1^{2025}] \cdot (3^2 - 2^3) - 3^2 \cdot 2$.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Scrierea corectă a numărului *trei sute de mii șaptezeci* este:
a) 3 070; **b)** 300 070; **c)** 300 700; **d)** 30 070.

(5p) **2.** Restul împărțirii numărului 402 la 37 este egal cu:
a) 10; **b)** 37; **c)** 32; **d)** 17.

(5p) **3.** Ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi:
a) 0; **b)** 1; **c)** 5; **d)** 7.

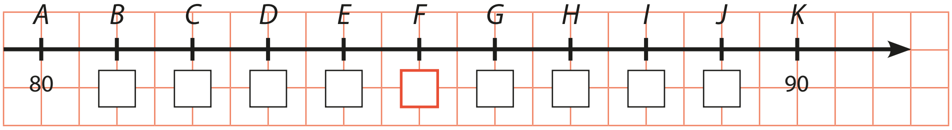
(5p) **4.** Cel mai mare dintre numerele 2^{40}, 16^{9}, 8^{11} și 32^{9} este:
a) 2^{40}; **b)** 16^{9}; **c)** 8^{15}; **d)** 32^{9}.

(5p) **5.** Suma primelor 15 numere naturale este egală cu:
a) 105; **b)** 120; **c)** 210; **d)** 240.

(5p) **6.** George știe că unchiul său are vârsta de trei ori mai mare decât el și că vârsta lui este cât un sfert din vârsta tatălui său. Afirmația: „Tatăl este mai tânăr decât unchiul" este:
a) adevărată; **b)** falsă.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Observă desenul. Numărul din caseta roșie este:
a) 83;
b) 84;
c) 85;
d) 86.



(5p) **2.** Coordonata punctului *I* din desenul anterior este:
a) 81; **b)** 87; **c)** 88; **d)** 89.

(5p) **3.** Patru colegi au avut de rezolvat următorul exercițiu: $[3^{1533} : 27^{510} + (4^{8})^{3} : 16^{11} + 1^{1783}] : 2$.
Rezultatele lor sunt trecute în tabelul alăturat.
Elevul care a răspuns corect este:
a) Ana; **b)** Alin; **c)** Eva; **d)** Teo.

Ana	Alin	Eva	Teo
44	21	22	30

(5p) **4.** Ultima cifră a numărului $3^{2023} + 4^{2024} + 5^{2026}$ este:
a) 0; **b)** 2; **c)** 8; **d)** 9.

(5p) **5.** Câte numere pare sunt de la 126 la 260, inclusiv?
a) 67; **b)** 68; **c)** 69; **d)** 135.

(5p) **6.** Valoarea numărului natural *n* care verifică egalitatea $5^{n+3} - 5^{n+2} = 500$ este:
a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie numerele naturale $\overline{ab}$ cu cifre distincte.
(5p) **a)** Este posibil ca suma dintre $\overline{ab}$ și răsturnatul său să fie 198? Justifică răspunsul.
(5p) **b)** Determină sumele $\overline{ab} + \overline{ba}$, știind că *a* și *b* sunt pătrate perfecte.

(5p) **2.** **a)** Împărțind suma a trei numere naturale consecutive la 7, obținem câtul 7 și restul 5. Determină cele trei numere.
(5p) **b)** Arată că numărul $a = 4^{n+1} \cdot 9^{n+2} + 6^{2n+1} \cdot 9 - 2^{2n} \cdot 9^{n+1}$ se împarte exact la 123.

(5p) **3.** **a)** Găsește toate numerele naturale *x*, *y* care îndeplinesc condiția $3 \cdot x + x \cdot y = 21$.
(5p) **b)** Determină toate numerele naturale *x*, *y* care îndeplinesc condiția $x^{y} = 256$.

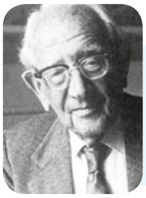
Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

2

UNITATEA II

Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

CUPRINS



A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieșire dintr-o dificultate.

George Pólya (13 decembrie 1887 – 7 septembrie 1985) a fost matematician și filozof maghiar, care a avut contribuții importante în combinatorică, teoria numerelor și teoria probabilităților. A fost profesor la Universitatea Stanford din California.

Viața cotidiană este un izvor nesecat de probleme. Matematica, *regina științelor*, așa cum o numea Carl Friedrich Gauss, este acel ajutor mereu la îndemâna noastră, prin care găsim soluția corectă. Fie că vindem, cumpărăm, planificăm, dăruim, muncim, împachetăm, măsurăm, în orice activitate avem nevoie de precizie. În matematică nu există o metodă unitară de rezolvare ci, în funcție de condițiile problemei, de modul cum aceste condiții se transformă pe parcursul raționamentului, se utilizează metoda de rezolvare adecvată, aplicând algoritmul corespunzător, conștientizând și argumentând fiecare pas al acestuia.

Există cinci mari tipuri de probleme cu numere naturale, ale căror rezolvări se pot realiza prin:

1. metoda reducerii la unitate;
2. metoda comparației;
3. metoda figurativă;
4. metoda mersului invers;
5. metoda falsei ipoteze.

II.1. METODA REDUCERII LA UNITATE

Descoperă

- Alina a cumpărat bunicuței sale un buchet cu 5 trandafiri și a plătit 55 de lei. Ar dori acum să îi cumpere și mamei unul, format din 7 trandafiri. Oare cât va plăti de data aceasta?

Răspuns: Știind că 5 trandafiri costă 55 de lei, aflăm mai întâi cât costă un singur fir de trandafir (o unitate). O cantitate de 5 ori mai mică o costă pe Alina de cinci ori mai puțin:

$$55 : 5 = 11 \text{ lei.}$$

Dacă un trandafir costă 11 lei, atunci 7 trandafiri costă de 7 ori mai mult:

$$7 \cdot 11 = 77 \text{ de lei.}$$

- George își amintește că în urmă cu un an bunicul său a arat propriul ogor în 4 zile, folosind trei tractoare. Anul acesta, însă, bunicul său are la dispoziție doar două tractoare. În câte zile crezi că va termina de arat ogorul?

Răspuns: George înțelege faptul că dacă bunicul său ar fi arat anul trecut cu un singur tractor, ar fi muncit de 3 ori mai mult: $3 \cdot 4 = 12$ zile. Acum, când sunt două tractoare la arat, timpul necesar se va reduce la jumătate: $12 : 2 = 6$ zile.

Reține!

Metoda reducerii la unitate este utilizată în rezolvarea multor probleme întâlnite în practică, în care datele depind unele de altele. Pentru a le rezolva, se trece printr-un pas intermediar, acela de a afla cât valorează unitatea. Relația sau dependența dintre mărimile unei probleme poate fi de două tipuri:

1. dacă o mărime crește (sau scade) de un anumit număr de ori, atunci și cealaltă crește (sau scade) de același număr de ori (mărimi direct proporționale);

2. dacă o mărime crește (sau scade) de un anumit număr de ori, atunci cealaltă scade (sau crește) de același număr de ori (mărimi invers proporționale).

Pentru a le putea compara cât mai ușor, datele problemei se transcriu organizat, unele sub altele. Singura dificultate în rezolvarea problemelor de acest gen constă în stabilirea tipului de dependență dintre mărimi.

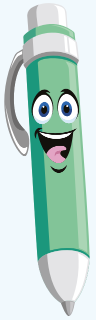
Exersează

▪ Cazul I: ambele mărimi cresc sau scad de același număr de ori

1. Șapte saci cu făină cântăresc 210 kg. Câte kilograme cântărește un singur sac?

Rezolvare:

7 saci .... 210 kg
1 sac .... 210 : 7 = 30 kg



Analiză: Deoarece numărul de saci se micșorează de 7 ori, numărul de kilograme se micșorează, de asemenea, de 7 ori.

2. Cinci seturi de pixuri costă 60 de lei. Cât vor costa opt seturi de același fel?

Rezolvare:

5 seturi .... 60 de lei
1 set .... 60 : 5 = 12 lei
8 seturi .... 8 · 12 = 96 de lei

Analiză: Atunci când numărul seturilor se micșorează de 5 ori, prețul se micșorează, de asemenea, tot de 5 ori. Când numărul seturilor crește de 8 ori, prețul crește tot de 8 ori.

▪ Cazul II: una dintre mărimi crește/scade de un anumit număr de ori, iar cealaltă scade/crește de același număr de ori

1. Emil efectuează tema la matematică. El o finalizează dacă lucrează 5 probleme zilnic, timp de 3 zile. Câte probleme trebuie să lucreze dacă dorește să termine tema într-o singură zi?

3 zile .... 5 probleme
1 zi .... 5 · 3 = 15 probleme

Analiză: Numărul zilelor s-a micșorat de 3 ori, însă numărul problemelor de efectuat a crescut de 3 ori.

2. Patru muncitori pot construi gardul unei proprietăți în 12 zile. În câte zile ar putea construi același gard șase muncitori?

4 muncitori .... 12 zile
1 muncitor .... 12 · 4 = 48 de zile
6 muncitori .... 48 : 6 = 8 zile

Analiză: Atunci când numărul muncitorilor s-a micșorat de 4 ori, numărul zilelor a crescut de 4 ori; dacă, în final, am mărit numărul muncitorilor de 6 ori, numărul zilelor a scăzut tot de 6 ori.

Rezolvă

1. Trei pachete conțin 24 de biscuiți. Câți biscuiți se găsesc în cinci pachete de același fel?

2. Maria și bunica sa au plantat lalele în grădină. Dacă fetița a plantat 36 de lalele pe 4 rânduri, câte lalele a plantat bunica pe cele 7 rânduri ale sale?

3. Dacă 11 ornamente pentru Crăciun costă 121 de lei, cât costă 15 ornamente de același fel?

4. Pentru finalizarea unei lucrări, 12 muncitori ar trebui să lucreze 100 de zile. În câte zile s-ar finaliza lucrarea dacă s-ar alătura echipei, încă din prima zi, alți trei muncitori?

5. Pentru a vopsi 900 m^2 de perete este nevoie de 4 cutii cu vopsea. De câte cutii cu vopsea este nevoie pentru 2 250 m^2 de perete?

6. Din 24 ℓ de apă de mare se obțin 400 g de sare. De câtă apă este nevoie pentru a obține un kilogram de sare?

7. Bunica fierbe căpșuni într-o oală pentru a face dulceață. În tabelul de mai jos este descrisă corespondența dintre cantitatea de căpșuni și numărul borcanelor cu dulceață obținute. Completează spațiile libere din tabel.

	A	B	C	D
Cantitate de căpșuni (kg)	4		8	
Număr borcane cu dulceață		9	6	15

8. Un bazin este alimentat de mai multe robinete cu același debit. În tabelul de mai jos este descrisă corespondența dintre numărul de robinete și timpul de umplere a bazinului. Completează spațiile libere din tabel.

	A	B	C	D
Număr robinete	18		36	54
Timpul de umplere (ore)		18	6	

9. Știind că trei buchete cu câte 5 lalele fiecare costă 105 lei, cât va/vor costa:

a) un buchet cu 5 lalele?
b) un buchet cu 7 lalele?
c) trei buchete cu câte 7 lalele fiecare?
d) patru buchete cu câte 9 lalele fiecare?

10. La o fermă, 9 văcuțe consumă 630 kg de furaje într-o săptămână, fiecare având o rație fixă de hrană.

a) Câte kilograme de furaje consumă 25 de văcuțe într-o săptămână?
b) Ce cantitate de furaje consumă 40 de văcuțe în trei săptămâni?
c) Câte văcuțe se pot hrăni cu 1 540 kg de furaje, într-o săptămână?
d) Câte săptămâni pot fi hrănite cele 80 de văcuțe cu rezerva de 28 000 kg de furaje?

Evaluează-te

1. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Un caiet costă de 4 ori mai puțin decât 4 caiete de același fel.
b) Pentru 10 persoane, o excursie va costa de 10 ori mai puțin decât pentru o singură persoană.
c) Dacă 3 prieteni îi sar în ajutor lui Mihai, care are de sădit un număr de pomi, băiatul va termina treaba de 4 ori mai repede față de cum ar munci singur.

3 puncte

2. Pentru a obține 7 litri de suc sunt necesare 56 kg de portocale. Câți litri de suc se pot obține din 96 kg de portocale?

3 puncte

3. Renovarea unui apartament poate fi realizată de o echipă formată din 6 muncitori, într-un interval de 14 zile. Câte zile va dura această activitate dacă este realizată de o echipă formată din 4 muncitori?

3 puncte
Din oficiu: 1 punct

Matematica este știința care trage concluzii necesare.

Benjamin Peirce (4 aprilie 1809 – 6 octombrie 1880) a fost un matematician american care a adus contribuții semnificative în teoria numerelor, algebră și statistică.

II.2. METODA COMPARAȚIEI

Descoperă

Alina și George au făcut cumpărături din aceeași librărie, ei alegând produse la același preț, conform imaginii de mai jos. George a cheltuit 120 de lei, în timp ce Alina a cheltuit 125 de lei. Cât costă un caiet? Dar un stilou?

Răspuns: Observăm că Alina și George au cumpărat fiecare câte 5 stilouri, dar Alina a luat un caiet în plus față de George. Astfel, diferența de preț de 5 lei reprezintă costul unui caiet.

Analizând situația Alinei, calculăm prețul celor 5 caiete: $5 \cdot 5 = 25$ de lei. Așadar, pentru stilouri a plătit $125 - 25 = 100$ de lei. Un stilou costă $100 : 5 = 20$ de lei.

În același mod am fi putut proceda analizând cumpărăturile lui George.

Reține!

Metoda comparației este acea metodă aritmetică de rezolvare pentru:

- problemele care cuprind trei sau mai multe mărimi, fiecare dintre ele cu câte două valori numerice date;
- problemele care cuprind trei sau mai multe mărimi cu o singură valoare numerică fiecare, dar cu diferite relații între ele.

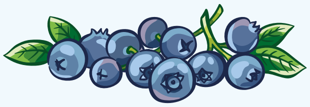
Algoritmul rezolvării acestor tipuri de probleme constă în compararea a două situații diferite, eliminarea unei necunoscute și determinarea celeilalte necunoscute. Eliminarea unei necunoscute se poate face prin scădere (precedată, eventual, de aducerea la același termen de comparație) sau prin înlocuire.

Exersează

1. **Eliminarea unei necunoscute prin scădere**

Într-o zi, 8 băieți și 5 fete au cules 55 kg de afine. A doua zi, 12 băieți și 5 fete au cules 75 kg de afine. Câte kilograme de afine a cules un băiat? Dar o fată?

Rezolvare: Transcriem datele problemei:



8 băieți .... 5 fete .... 55 kg
12 băieți .... 5 fete .... 75 kg

Comparând mărimile date, observăm că numărul fetelor se păstrează în ambele situații, deci acesta va fi elementul de comparație. Reiese că diferența dintre kilogramele culese (75 – 55 = 20 kg) provine din diferența dintre numărul băieților: 12 băieți – 8 băieți = 4 băieți. Așadar, un băiat a cules 20 kg : 4 = 5 kg de afine. Continuând prin înlocuirea mărimii obținute,

8 · 5 kg .... 5 fete .... 55 kg

deducem că 5 fete au cules 55 kg – 8 · 5 kg = 15 kg de afine; o fată a cules 15 kg : 5 = 3 kg de afine.

2. Eliminarea unei necunoscute prin scădere, precedată de aducerea la același termen de comparație

Trei birouri și patru scaune costă 1 080 de lei, iar cinci birouri și opt scaune costă 1 960 de lei. Cât costă fiecare obiect?

Rezolvare: Transcriem datele problemei:

3 birouri .... 4 scaune .... 1 080 de lei | · 2
5 birouri .... 8 scaune .... 1 960 de lei

Comparând, observăm că valorile numerice ale mărimilor date nu sunt egale, dar, dacă vom dubla valorile primei situații, numărul de scaune ar deveni același ca cel din a doua situație, deci acesta va fi elementul de comparație:

6 birouri .... 8 scaune .... 2 160 de lei
5 birouri .... 8 scaune .... 1 960 de lei

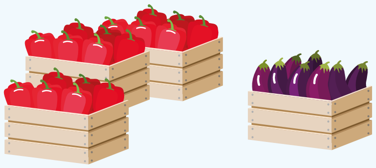
Se constată faptul că diferențele apar atât la numărul de birouri, cât și la totalul de plată. Efectuând diferențele, obținem că un birou costă 2 160 – 1 960 = 200 de lei.

Continuând prin înlocuirea mărimii obținute, aflăm mărimea rămasă, respectiv prețul unui scaun:

6 birouri · 200 de lei .... 8 scaune .... 2 160 de lei
8 scaune .... 2 160 – 1 200 = 960 de lei
1 scaun .... 960 : 8 = 120 de lei

Deci, un scaun costă 120 de lei.

3. Eliminarea unei necunoscute prin înlocuire



Dintr-o grădină s-au recoltat 13 lădițe cu ardei și 6 lădițe cu vinete, care cântăresc împreună 62 kg. Știind că o lădiță cu vinete cântărește cât 3 lădițe cu ardei, află cât cântărește o lădiță cu ardei și cât cântărește o lădiță cu vinete.

Rezolvare: Transcriem datele problemei:

13 lădițe cu ardei .... 6 lădițe cu vinete .... 62 kg

Știind că o lădiță cu vinete cântărește cât 3 lădițe cu ardei, deducem că 6 lădițe cu vinete cântăresc cât 6 · 3 = 18 lădițe cu ardei. Înlocuim cele 6 lădițe cu vinete cu 18 lădițe cu ardei și obținem:

13 lădițe cu ardei .... 18 lădițe cu ardei .... 62 kg,

ceea ce înseamnă că 31 de lădițe cu ardei cântăresc 62 kg.

O lădiță cu ardei cântărește 62 kg : 31 = 2 kg. Prin urmare, o lădiță cu vinete cântărește de 3 ori mai mult, adică 2 kg · 3 = 6 kg.

Observații: Folosind metoda comparației putem verifica dacă datele unei probleme sunt insuficiente pentru rezolvarea ei sau contradictorii. De exemplu:

- Trei cărți și 4 caiete costă 42 de lei, iar 9 cărți și 12 caiete costă 126 de lei. Cât costă o carte?

Observăm că dacă triplăm datele din prima situație, obținem al doilea set de date și, astfel, nu putem afla cât costă o carte. Datele sunt insuficiente!

- Trei cărți și 4 caiete costă 42 de lei, iar 3 cărți și 7 caiete costă 40 de lei. Cât costă o carte?

Observăm că ambele seturi de date au același termen de comparație, numărul cărților, dar 7 caiete nu pot costa mai puțin decât 4 caiete. Datele sunt contradictorii!

Rezolvă

1. Știind că două pixuri și cinci caiete costă 46 de lei, iar două pixuri și opt caiete costă 70 de lei, determină cât costă un pix și cât costă un caiet.

2. Un gospodar duce la moară în prima zi 3 saci cu grâu și 2 saci cu ovăz, în total 144 kg. A doua zi el duce 5 saci cu grâu și 10 saci cu ovăz, în total 400 kg. Cât cântărește un sac cu grâu și cât cântărește un sac cu ovăz?

3. Patru metri de stofă și trei metri de mătase costă 1 250 de lei, iar doi metri de stofă și șase metri de mătase costă 1 300 de lei. Cât costă metrul de stofă și cât costă metrul de mătase?

4. Un croitor a vândut într-o zi 5 rochii și 6 sacouri, încasând 1 500 de lei. Într-o altă zi a vândut 6 sacouri și două rochii, încasând 1 140 de lei. Cât costă o rochie și cât costă un sacou? Dar 3 rochii și 3 sacouri?

5. Cinci robinete și patru pompe umplu, într-o oră, un bazin de 22 kl de apă. Știind că prin două pompe curge, într-o oră, aceeași cantitate ca și prin 3 robinete, află care este debitul unui robinet, apoi al unei pompe, într-o oră.

6. Pentru intrarea la un spectacol, 6 adulți și 7 copii au plătit 480 de lei. Cât costă fiecare tip de bilet, știind că două bilete pentru adulți au costat cât trei bilete pentru copii?

7. Un buchet cu 3 lalele și 4 frezii costă 25 de lei, iar un buchet cu 5 lalele și 8 frezii costă 47 de lei. Cât costă un buchet format din 6 lalele și 7 frezii?

8. Prețul de fabrică pentru 12 păpuși mari și 25 de păpuși mici este 1 460 de lei, iar pentru 34 de păpuși mari și 50 de păpuși mici prețul este de 3 720 de lei. Ce sumă plătește în total o grădiniță care cumpără 20 de păpuși mari și 45 de păpuși mici?

9. Dacă două pixuri, 5 creioane și 4 caiete costă 63 de lei, iar un pix costă cât două creioane și un caiet cât trei creioane, determină cât costă fiecare obiect.

10. Alcătuiește și rezolvă o problemă, folosind următoarele date:

5 fuste .... 3 bluze .... 6 sacouri .... 3 400 lei;
3 fuste .... 5 bluze .... 4 sacouri .... 2 800 lei;
8 fuste .... 8 bluze .... 5 sacouri .... 4 700 lei.

Evaluează-te

1. Alcătuiește oral problema, apoi calculează în scris prețul fiecărui produs, știind următoarele date:

2 covrigi .... 4 brioșe .... 16 lei
5 covrigi .... 4 brioșe .... 22 lei

3 puncte

2. Cu 23 de lei putem cumpăra 5 kg de mere și 2 kg de pere, iar cu 24 de lei putem cumpăra 4 kg de mere și 3 kg de pere. Cât costă un kilogram de mere și cât costă un kilogram de pere? **3 puncte**

3. Dacă 4 păpuși și 7 mașinuțe costă 360 lei, iar o mașinuță costă cât 2 păpuși, determină cât costă fiecare obiect.

3 puncte

Din oficiu: 1 punct

Matematica este fundația de nezdruncinat a științei și fântâna inepuizabilă a foloaselor pentru treburile omenești.

Isaac Barrow (octombrie 1630 – 4 mai 1677) a fost matematician și teolog englez, celebru mai ales pentru contribuțiile în dezvoltarea calculului modern (calculul diferențial și integral – domenii noi ale matematicii la acea vreme). Isaac Newton i-a fost student.

II.3. METODA FIGURATIVĂ

Descoperă

- Doi copii discută despre construcțiile lor, realizate din piese LEGO.

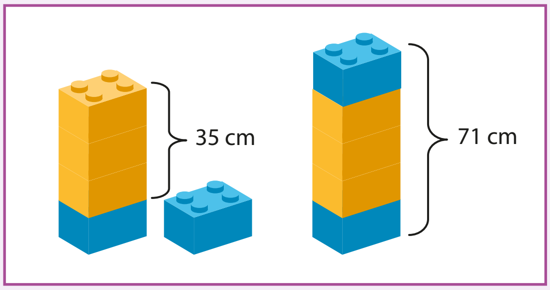
Paul: „Turnul meu este cu 35 cm mai înalt decât al tău!"

Eduard: „Așa este! Iar dacă le așezăm unul peste altul, turnulețul format are 71 cm".

Ce înălțime are fiecare turn?

Răspuns:

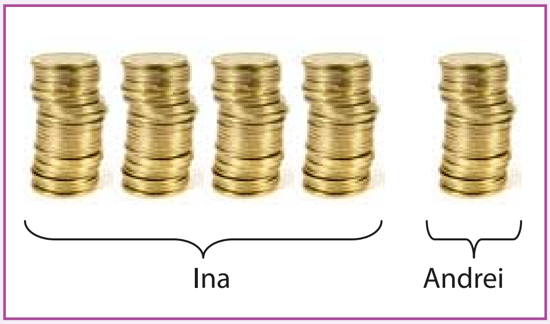
Din totalul înălțimilor turnurilor eliminăm diferența. Astfel, 71 – 35 = 36 cm reprezintă suma părților egale. Deci, 36 : 2 = 18 cm are turnulețul lui Eduard; 18 + 35 = 53 cm sau 71 – 18 = 53 cm are turnulețul lui Paul.



- Doi frățiori au economisit împreună 155 de lei. Care este suma economisită de fiecare copil, știind că Andrei a pus de 4 ori mai puțin decât Ina?

Răspuns:

Observăm că, împreună, sumele celor doi copii alcătuiesc 5 părți egale. Prin urmare, 155 : 5 = 31 de lei reprezintă o parte, adică suma lui Andrei. Suma Inei este de 4 ori mai mare decât cea a lui Andrei. Deci, $4 \cdot 31 = 124$ de lei sau 155 – 31 = 124 de lei a economisit Ina.



Reține!

Metoda grafică sau **figurativă** este metoda prin care putem transpune realitatea în limbaj matematic, în cel mai fidel mod. Cel mai frecvent, reprezentarea datelor se face prin segmente de dreaptă, egale de cele mai multe ori. Însă, există și probleme în care este utilă reprezentarea mărimilor prin intermediul altui tip de desen, cu alte elemente grafice: puncte, cercuri, pătrate etc.

La această metodă este important ca la finalul rezolvării să se efectueze proba; soluția găsită va fi corectă dacă verifică relațiile sau condițiile problemei.

În general, expresiile cele mai sugestive întâlnite în astfel de probleme ilustrează:

- suma: *în total, împreună, la un loc;*
- diferența: *cu … mai mare/mult/scump/vârstnic, cu … mai mic/puțin/ieftin/tânăr;*
- câtul: *de … ori mai mare/mult/scump/vârstnic, de … ori mai mic/puțin/ieftin/tânăr, dublul/jumătatea, triplul/treimea* etc.

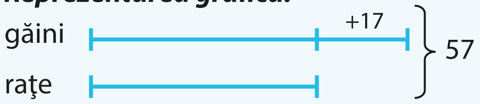
Exersează

Exemple de probleme care se rezolvă prin metoda grafică

1. Probleme în care se cunosc suma și diferența a două numere

În gospodăria bunicilor sunt 57 de păsări în total, găini și rațe. Câte găini și câte rațe sunt, dacă numărul găinilor este cu 17 mai mare decât cel al rațelor?

Reprezentarea grafică:



sau

Rezolvare:

1. Cât reprezintă două părți? 57 – 17 = 40
2. Cât reprezintă o parte? / Câte rațe sunt? 40 : 2 = 20
3. Câte găini sunt? 20 + 17 = 37 sau 57 – 20 = 37

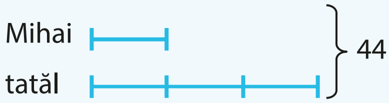
1. Cât reprezintă două părți mari? 57 + 17 = 74
2. Cât reprezintă o parte? / Câte găini sunt? 74 : 2 = 37
3. Câte rațe sunt? 37 – 17 = 20 sau 57 – 37 = 20

***Proba* (*verificare*):** Diferența dintre găini și rațe: 37 – 20 = 17; suma păsărilor: 37 + 20 = 57.

2. Probleme în care se cunosc suma și câtul a două numere

Vârsta lui Mihai este de 3 ori mai mică decât vârsta tatălui său. Determină vârsta fiecăruia, știind că împreună au 44 de ani.

Reprezentarea grafică:



Rezolvare:

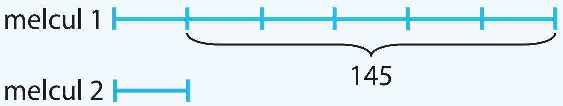
1. Câte părți egale sunt? 1 + 3 = 4
2. Cât reprezintă o parte? / Care este vârsta lui Mihai? 44 : 4 = 11 ani
3. Care este vârsta tatălui lui Mihai? 11 · 3 = 33 ani

***Proba* (*verificare*):** 33 : 11 = 3 (vârsta lui Mihai este de 3 ori mai mică decât vârsta tatălui său); 11 + 33 = 44 ani (suma vârstelor).

3. Probleme în care se cunosc diferența și câtul a două numere

Doi melci discută despre lungimea călătoriilor pe care le-au avut de făcut pentru a se întâlni. Ce distanță a parcurs fiecare melc?

Reprezentarea grafică:



Rezolvare:

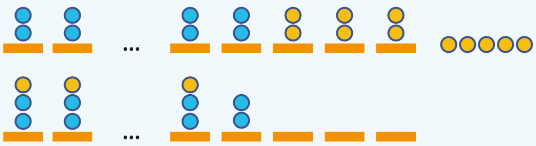
1. Câte segmente reprezintă diferența distanțelor? 6 – 1 = 5
2. Care este lungimea unui segment? / Ce distanță a parcurs al doilea melc? 145 : 5 = 29 m
3. Ce distanță a parcurs primul melc? 29 · 6 = 174 m

***Proba* (*verificare*):** 174 : 29 = 6 (primul melc a parcurs o distanță de 6 ori mai mare decât al doilea melc); 174 – 29 = 145 (diferența dintre distanțele parcurse).

4. Probleme în care mărimile se reprezintă grafic prin simboluri

Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi în bancă, toate băncile s-ar ocupa și ar rămâne 5 elevi în picioare, iar dacă s-ar așeza câte 3 în bancă, atunci într-o bancă ar sta doar 2 elevi, iar 3 bănci ar rămâne libere. Câte bănci și câți elevi sunt în acea clasă?

Reprezentarea grafică:



Rezolvare:

1. Pentru a reprezenta cea de-a doua situație, 11 elevi din prima reprezentare trebuie să se mute, pentru a fi câte 3 într-o bancă. Astfel, numărul băncilor cu câte 3 elevi ar fi 11, iar în total sunt $11 + 4 = 15$ bănci.

2. Numărul total al elevilor este $11 \cdot 3 + 2 = 35$.

***Proba* (*verificare*):** Am obținut 35 de elevi și 15 bănci. Dacă elevii s-ar așeza câte doi în bancă, s-ar ocupa toate cele 15 bănci și 5 elevi ar rămâne în picioare (deoarece $35 = 15 \cdot 2 + 5$), iar dacă elevii s-ar așeza câte 3 în bancă, s-ar ocupa 11 bănci, într-o bancă ar sta doar doi elevi ($35 = 11 \cdot 3 + 1 \cdot 2$) și 3 bănci ar rămâne libere ($15 - (11 + 1) = 3$).

Rezolvă

1. Determină două numere, știind că suma lor este 500, iar diferența 80.

2. Trei numere naturale consecutive au suma 240. Care sunt numerele?

3. O jucărie costă cât trei stilouri. Ioana își cumpără un stilou și două jucării, plătind 84 de lei. Calculează prețul fiecărui obiect.

4. O treime din vârsta Mioarei este cu 5 mai mică decât vârsta celor doi frați gemeni ai săi. Dacă împreună au 30 de ani, ce vârstă are fiecare copil?

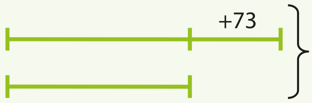
5. Diferența a două numere este 185. Dacă împărțim numărul mai mare la cel de-al doilea, obținem câtul 4 și restul 5. Care sunt numerele?

6. Într-un parc, dacă se așază câte două vrăbiuțe pe un stâlp, rămân 4 vrăbiuțe neașezate, iar dacă se așază câte 3 vrăbiuțe pe un stâlp, doi stâlpi vor rămâne fără vrăbiuțe. Câte vrăbiuțe și câți stâlpi sunt?

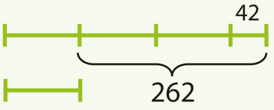
7. Două bucăți de pânză au aceeași lungime. Din prima bucată se vând 8 m, iar din a doua 26 m, prima bucată rămânând de 3 ori mai lungă decât a doua. Câți metri de pânză au fost în fiecare bucată?

8. Trei frați Alina, Carla și Edi au împreună 760 de lei. Dacă Edi ar da Carlei 80 de lei, atunci cei doi ar avea sume egale. Știind că Alina are o sumă de 4 ori mai mare decât a Carlei, află suma fiecărui copil.

9. Compune și rezolvă câte o problemă după fiecare reprezentare grafică:

a) 

b) 

c) 

.

Evaluează-te

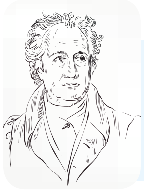
1. Într-o livadă sunt 45 de pomi: meri și pruni. Știind că sunt cu 7 meri mai mulți decât pruni, află câți pomi sunt din fiecare fel. **3 puncte**

2. Suma a trei numere impare consecutive este 309. Determină numerele. **3 puncte**

3. În cadrul unui proiect, elevii unei clase plantează puieți de brad pentru repopularea pădurilor. Dacă fiecare elev ar planta câte doi puieți, ar rămâne 7 puieți neplantați. Dacă fiecare copil ar planta câte 3 puieți, unui copil nu i-ar rămâne niciun puiet de plantat. Câți puieți se plantează și câți copii participă la activitate? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Soluționarea unei probleme este o nouă problemă.



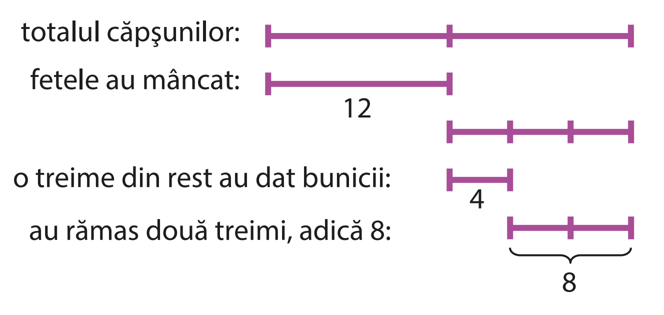
Johann Wolfgang von Goethe (28 august 1749 – 22 martie 1832) a fost poet german și om de știință, una dintre cele mai de seamă personalități ale culturii universale.

II.4. METODA MERSULUI INVERS

Descoperă

Maria și Alina au cules căpșuni din gradina bunicilor. După ce au mâncat jumătate din căpșuni, au oferit bunicuței o treime din ce a rămas, iar în coș au rămas 8 căpșuni. Câte căpșuni au cules cele două fetițe?

Răspuns: Cum nu ne este cunoscut numărul de căpșuni culese, nu putem ști nici câte au mâncat fetele, nici câte au oferit bunicii. Astfel, vom folosi numărul final de căpșuni pentru a-l afla pe cel de la începutul problemei.



- Știind că fetele au oferit bunicuței o treime din numărul de căpșuni rămase și că un întreg are 3 treimi, deducem faptul că în coș au rămas două treimi. Deci 8 căpșuni reprezintă două treimi, iar $8 : 2 = 4$ căpșuni înseamnă o treime.
- Înainte de a-i oferi bunicuței, fetele mai aveau $3 \cdot 4 = 12$ căpșuni.
- Ele au mâncat jumătate din fructele culese, deci numărul total a fost $2 \cdot 12 = 24$.

Verificând corectitudinea raționamentului, calculăm: $24 : 2 = 12$ căpșuni au mâncat fetele și tot 12 au rămas; au oferit bunicii o treime, adică $12 : 3 = 4$ căpșuni, iar restul au rămas în coș: $12 - 4 = 8$ căpșuni.

Reține!

- **Metoda mersului invers** este metoda prin care se rezolvă aritmetic anumite probleme, în care elementul necunoscut apare în faza de început a șirului de calcule ce rezultă din enunțul problemei. Dacă s-ar folosi ordinea naturală a calculelor, raționamentele ar fi greoaie; astfel, se aplică metoda mersului invers, care constă în reconstituirea operațiilor în sens invers acțiunii problemei (adică de la sfârșit spre început), fiecărei operații corespunzându-i inversa ei.
- Se obișnuiește ca mărimea/numărul necunoscut să se noteze cu o literă, calculele fiind mai ușor de exprimat. Datele problemei pot fi reprezentate grafic.
- La finalul rezolvării este recomandată verificarea soluției obținute, aplicând numărului determinat operațiile din enunțul problemei.

Exemplu: Determină numărul:

a) care adunat cu 80, dă rezultatul 125;
b) care, scăzut din 300, dă rezultatul 32;
c) din care se scade 55, iar rezultatul devine 88;
d) care, înmulțit cu 11, dă rezultatul 132;
e) care, împărțit la 23, dă rezultatul 400;
f) la care se împarte 576 și se obține 64.

Rezolvare:

a) $x + 80 = 125 \Rightarrow x = 125 - 80 \Rightarrow x = 45$;
b) $300 - x = 32 \Rightarrow x = 300 - 32 \Rightarrow x = 268$;
c) $x - 55 = 88 \Rightarrow x = 88 + 55 \Rightarrow x = 143$;
d) $x \cdot 11 = 132 \Rightarrow x = 132 : 11 \Rightarrow x = 12$;
e) $x : 23 = 400 \Rightarrow x = 400 \cdot 23 \Rightarrow x = 9\,200$;
f) $576 : x = 64 \Rightarrow x = 576 : 64 \Rightarrow x = 9$.

Exersează

1. Găsește numerele care pot înlocui literele din casetele următoare, știind că asupra lor au acționat următoarele operații:

$$\boxed{a} \xrightarrow{:5} \boxed{b} \xrightarrow{+26} \boxed{c} \xrightarrow{\cdot 13} \boxed{d} \xrightarrow{-150} \boxed{500}$$

Rezolvare: Rezolvarea exercițiului se poate realiza numai prin metoda mersului invers, deoarece singurul număr cunoscut este rezultatul final.

$d - 150 = 500 \Rightarrow d = 500 + 150 \Rightarrow d = 650;$

$c \cdot 13 = 650 \Rightarrow c = 650 : 13 \Rightarrow c = 50;$

$b + 26 = 50 \Rightarrow b = 50 - 26 \Rightarrow b = 24;$

$a : 5 = 24 \Rightarrow a = 24 \cdot 5 \Rightarrow a = 120.$

Proba (verificare): $120 : 5 = 24$; $24 + 26 = 50$;

$50 \cdot 13 = 650$;

$650 - 150 = 500$ (adevărat).

2. Mă gândesc la un număr. Îl dublez, scad 80 din rezultat și obțin triplul lui 100. Care este numărul la care m-am gândit?

Rezolvare: Notăm numărul cu x. Scrisă ca un exercițiu, problema devine:

$x \cdot 2 - 80 = 3 \cdot 100$ sau $x \cdot 2 - 80 = 300$.

Avem o operație de scădere, în care descăzutul este suma dintre rest și scăzător, deci obținem:

$x \cdot 2 = 300 + 80 \Rightarrow x \cdot 2 = 380.$

Factorul care lipsește dintr-un produs se determină printr-o operație de împărțire:

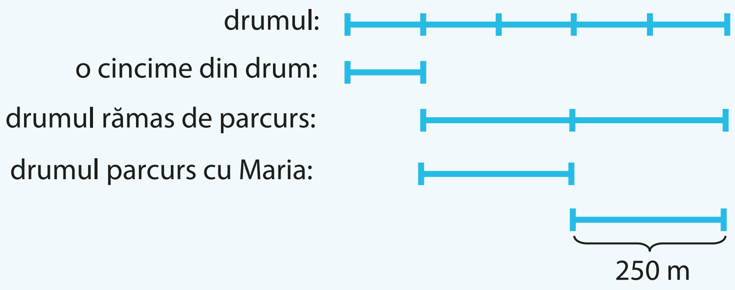
$x = 380 : 2 \Rightarrow x = 190.$

Proba (verificare): $190 \cdot 2 - 80 = 3 \cdot 100 \Leftrightarrow 380 - 80 = 300 \Leftrightarrow 300 = 300$ (adevărat).

Dacă textul problemei este mai complicat, rezolvarea se poate baza pe o reprezentare grafică.

3. După ce a parcurs o cincime din drumul până la școală, Alina a întâlnit-o pe Maria, colega ei. Au continuat împreună și, după ce au parcurs jumătate din drumul rămas, ele constată că mai au de mers 250 de metri. Care este distanța dintre casa Alinei și școala unde învață?

Rezolvare: Reprezentăm grafic datele din enunțul problemei:



Dacă fetele au parcurs o jumătate din drumul rămas, iar jumătatea rămasă are 250 m, înseamnă că, la întâlnirea celor două eleve, distanța de parcurs era de $2 \cdot 250$ m $= 500$ m.

Cum Alina a parcurs o cincime din distanță, iar orice întreg are 5 cincimi, înseamnă că i-au rămas de parcurs 4 cincimi. Așadar, 500 m : 4 = 125 m reprezintă o cincime, deci 125 m a parcurs singură, până la întâlnirea cu Maria.

În concluzie, distanța dintre casa Alinei și școala unde învață este de 125 m + 500 m = 625 m.

Proba (verificare): 625 m : 5 =125 m a parcurs Alina singură;

625 m – 125 m = 500 m au rămas de parcurs;

500 m : 2 = 250 m au parcurs cele două fete împreună;

au rămas de parcurs 500 m – 250 m = 250 m (adevărat).

Rezolvă

1. Determină numărul necunoscut, astfel încât egalitatea să fie adevărată:
a) $100 - [(x + 21) : 21 - 21] = 1$; **b)** $[(1 + 2 + \ldots + 50) - 10x] : 15 = 47$.

2. Află care dintre exercițiile se potrivește problemei următoare, apoi rezolvă-l!
„Din suma dintre dublul unui număr și 108 scade suma dintre predecesorul și succesorul lui 22. Știind că jumătatea rezultatului astfel obținut este 232, determină numărul."
a) $(2x + 108) - (21 + 23) : 2 = 232$; **b)** $[(2x + 108) - (21 + 23)] : 2 = 232$.

3. Compune și rezolvă o problemă pornind de la exercițiul următor: $[350 - (2x + 40)] : 11 = 10$.

4. Dacă mărim treimea unui număr de 5 ori, produsul îl micșorăm cu 20, iar restul obținut îl împărțim la 8, obținem numărul 20. Află numărul inițial.

5. Un număr se adună cu triplul său, suma se mărește de 5 ori, produsul obținut se adună cu pătratul numărului 32, obținându-se cubul lui 14. Care este numărul?

6. Un elev citește o carte în trei zile. În prima zi citește cu 10 pagini mai puțin decât jumătatea numărului total de pagini, a doua zi citește jumătate din rest, iar în a treia zi, ultimele 30 de pagini. Câte pagini are cartea citită?

7. Un număr se adună cu 10, iar suma se mărește de 10 ori; rezultatul se micșorează cu 10, iar noul rezultat se împarte la 10, obținându-se în final 10. Găsește numărul!

8. Sebastian a primit bursa de merit de la școală. A cheltuit jumătate din sumă pe cărți, iar cu o treime din rest le-a cumpărat mamei și bunicii sale câte un buchet de flori. Din banii rămași își poate cumpăra 50 de euro, pentru sejurul din Italia, planificat pentru vacanța de vară. Dacă un euro se vinde cu 5 lei, care este valoarea bursei primite de Sebastian?

9. Alma își propune să rezolve tema de vacanță la matematică, astfel: în prima săptămână o treime din totalul problemelor, în săptămâna următoare o treime din problemele rămase și așa mai departe. Câte probleme conține tema Almei, dacă după 3 săptămâni i-au rămas 48 de probleme nerezolvate?

10. La sfârșitul anului școlar trecut, s-a constatat faptul că o zecime dintre toți elevii claselor a V-a au luat premiul I, o optime din rest au luat premiul al II-lea, o șesime din noul rest – premiul al III-lea, iar mențiune o cincime din elevii rămași. Știind că 84 de elevi nu au primit niciun premiu, determină câți elevi de clasa a V-a au studiat în școala respectivă.

Evaluează-te

1. Compune o problemă folosindu-te de exercițiul următor, apoi rezolv-o, folosind metoda mersului invers:

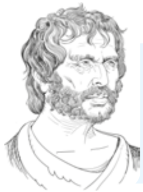
$$(4x - 4) : 44 + 4 = 104.$$

3 puncte

2. Mă gândesc la un număr. Îi înmulțesc sfertul cu 3, rezultatul îl micșorez cu produsul cifrelor pare nenule și obțin 54. La ce număr m-am gândit? **3 puncte**

3. O persoană plătește facturile lunare cu o cincime din salariu, își cumpără un aspirator cu o treime din rest și îi mai rămân 1 600 de lei. Cât este salariul acestei persoane? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct



Nu îndrăznim nu pentru că problemele sunt dificile, ci fiindcă nu îndrăznim ele sunt dificile.

Lucius Annaeus Seneca (cca. 4 î.Hr. – 65) a fost un filozof roman, fiul lui Seneca cel Bătrân. A fost preceptor al împăratului Nero, ocupând și funcții în administrația Imperiului Roman. Seneca a avut o valoroasă activitate de intelectual creator atât în Spania, cât și la Roma.

II.5. METODA FALSEI IPOTEZE

Descoperă

Într-un bloc sunt 30 de apartamente cu două sau cu trei camere. Știind că sunt 70 de camere în total, câte apartamente au două camere și câte au trei camere?

Răspuns: Dacă presupunem faptul că în bloc ar fi numai apartamente cu două camere, asta ar însemna că numărul total de camere ar fi 30 · 2 = 60 de camere. Ca urmare, 70 – 60 = 10 camere ar fi în plus (lipsesc din calcule). Distribuim câte o cameră apartamentelor cu două camere, astfel încât să aibă fiecare câte trei camere. Avem 10 : 1 = 10 redistribuiri și, deci, tot atâtea apartamente cu trei camere. În final, sunt 30 – 10 = 20 de apartamente cu două camere.

Reține!

Metoda falsei ipoteze se folosește dacă datele problemei se referă la mărimi corelate și constă în faptul că se construiește ipoteza (presupunerea, ideea) că toate mărimile necunoscute sunt „de același fel”. În continuare se parcurg următoarele etape:

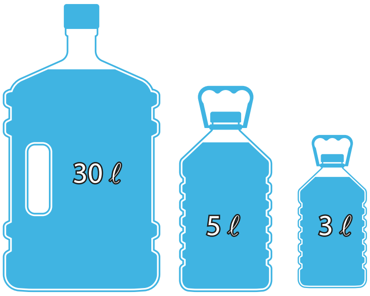
- efectuarea calculelor potrivite pentru a verifica dacă presupunerea făcută este corectă; dacă rezultatele obținute coincid cu cele din enunț, soluția este găsită (exemplul 1); dacă nu, se constată că presupunerea este falsă și continuăm rezolvarea;
- se compară rezultatul obținut pe baza presupunerii făcute cu cel real, obținându-se diferențele;
- se stabilesc modificările ce intervin în cazul înlocuirii unei mărimi de un fel cu una de alt fel;
- se împart diferențele, astfel determinându-se numărul de înlocuiri necesare și totodată, numărul mărimilor ce au apărut în rezolvare pe parcurs;
- determinarea mărimilor ce au apărut în presupunerea inițială, prin diferența dintre numărul total și cel determinat deja.

Ipoteza asupra mărimii pe care o căutăm, care se dovedește a fi de obicei o ipoteză falsă, nu o facem cu intenția de a nimeri răspunsul, ci pentru a vedea din nepotrivirile cu enunțul ce modificări de raționament și calcul trebuie să facem pentru a determina soluția problemei.

Exemplul 1: Punem 30 de litri de apă în 10 vase de 3 ℓ și, respectiv, 5 ℓ. Câte vase de fiecare fel se folosesc?

Rezolvare: Presupunem că sunt numai vase de 3 ℓ. Verificând datele problemei, avem: 10 · 3 = 30 ℓ de apă. Constatăm că rezultatul coincide cu mărimea din enunț, ceea ce înseamnă că am determinat deja soluția problemei: 10 vase de 3 ℓ și niciun vas de 5 ℓ.

***Proba* (*verificare*):** 10 · 3 + 0 · 5 = 30 ℓ (adevărat).



Exemplul 2: Câte caiete de 4 lei și câte de 7 lei se pot cumpăra cu 59 de lei, pentru a oferi câte unul fiecăruia dintre cei 11 copii dintr-un grup?

Rezolvare: Presupunem că s-au cumpărat numai caiete de 7 lei bucata. Acestea ar costa $11 \cdot 7 = 77$ de lei.

Constatăm că rezultatul nu coincide cu suma din enunț, ceea ce înseamnă că nu am determinat soluția problemei; așadar, $77 - 59 = 18$ lei sunt cheltuiți în plus. Înlocuim unele dintre caietele de 7 lei cu altele de 4 lei, fiecare schimb aducând o economie de $7 - 4 = 3$ lei.

În final, sunt necesare $18 : 3 = 6$ schimburi, deci se pot cumpăra 6 caiete de 4 lei. Prin urmare, se pot cumpăra $11 - 6 = 5$ caiete de 7 lei.

***Proba* (*verificare*):** $6 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 24 + 35 = 59$ de lei (adevărat).

Exersează

1. Radu a reușit să economisească în pușculița sa 215 lei. Știind că a numărat 83 de bancnote de 1 leu sau 5 lei, determină câte bancnote are de fiecare fel.

Rezolvarea 1:

Presupunând că sunt numai bancnote de 1 leu, Radu ar avea $83 \cdot 1 = 83$ de lei.

Diferența care apare este de $215 - 83 = 132$ de lei. Prin înlocuirea unei bancnote de 1 leu cu alta de 5 lei se recuperează $5 - 1 = 4$ lei.

Se pot face $132 : 4 = 33$ de înlocuiri, deci Radu are 33 de bancnote de 5 lei și $83 - 33 = 50$ de bancnote de 1 leu.

***Proba* (*verificare*):**

$33 \cdot 5 + 50 \cdot 1 = 165 + 50 = 215$ lei (adevărat).

Rezolvarea 2:

Presupunând că sunt numai bancnote de 5 lei, Radu ar avea $83 \cdot 5 = 415$ lei.

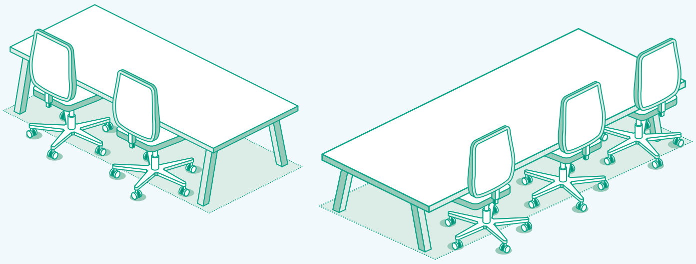
Diferența care apare este de $415 - 215 = 200$ de lei. Prin înlocuirea unei bancnote de 5 lei cu una de 1 leu ar dispărea $5 - 1 = 4$ lei.

Se pot face $200 : 4 = 50$ de înlocuiri, deci Radu are 50 de bancnote de 1 leu și $83 - 50 = 33$ de bancnote de 5 lei.

***Proba* (*verificare*):**

$50 \cdot 1 + 33 \cdot 5 = 50 + 165 = 215$ lei (adevărat).

2. În laboratorul de informatică sunt 13 mese cu câte două sau trei scaune. Știind că 29 de elevi ocupă toate locurile, află câte mese au două scaune și câte au trei scaune.



Rezolvarea 1:

Presupunând că sunt numai mese cu câte trei scaune, în total ar fi $13 \cdot 3 = 39$ de scaune; deci $39 - 29 = 10$ scaune ar fi în plus în laborator. Prin înlocuirea unei mese cu trei scaune, cu alta cu două scaune, ar dispărea $3 - 2 = 1$ loc. Se pot face $10 : 1 = 10$ înlocuiri de acest fel, deci în laboratorul de informatică sunt 10 mese cu câte două scaune și $13 - 10 = 3$ mese cu câte trei scaune.

***Proba* (*verificare*):**

$10 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 20 + 9 = 29$ scaune (adevărat).

Rezolvarea 2:

Presupunând că sunt numai mese cu câte două scaune, în total ar fi $13 \cdot 2 = 26$ de scaune; deci $29 - 26 = 3$ scaune ar fi în minus în laborator. Prin înlocuirea unei mese cu două scaune, cu alta cu trei scaune, s-ar recupera $3 - 2 = 1$ loc. Se pot face $3 : 1 = 3$ înlocuiri de acest fel, deci în laboratorul de informatică sunt 3 mese cu câte trei scaune și $13 - 3 = 10$ mese cu câte două scaune.

***Proba* (*verificare*):**

$3 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 9 + 20 = 29$ scaune (adevărat).

3. La un concurs de matematică, Alina a avut de răspuns la 18 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect a primit 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit i s-au scăzut 3 puncte. Câte răspunsuri corecte și câte greșite a dat Alina, dacă 10 puncte i s-au acordat din oficiu, iar ea a obținut 84 de puncte?
Rezolvare: Scăzând cele 10 puncte primite din oficiu, obținem că Alina a primit 84 – 10 = 74 de puncte după corectarea răspunsurilor.

Presupunând că Alina ar fi răspuns corect la toate cele 18 întrebări, ea ar fi obținut 18 · 5 = 90 de puncte. Dar știm că a obținut numai 74 de puncte, deci a pierdut 90 – 74 = 16 puncte. Cum pentru fiecare răspuns greșit Alina a pierdut 5 + 3 = 8 puncte, înseamnă că putem face 16 : 8 = 2 înlocuiri ale unui răspuns corect cu unul greșit, deci Alina a răspuns greșit la două întrebări și corect la 18 – 2 = 16 întrebări.
***Proba* (*verificare*):** 16 · 5 – 2 · 3 + 10 = 80 – 6 + 10 = 84 de puncte (adevărat).

Rezolvă

1. În tabără la munte, 100 de copii au ocupat 28 de camere cu 3 sau cu 5 paturi. Câte camere de fiecare fel erau în acea locație?

2. Un test conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 4 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 158 de puncte?

3. La un spectacol s-au vândut 500 de bilete de adulți și de copii, încasându-se suma de 6 900 de lei. Știind că un bilet de copil costă 9 lei, iar unul de adult 15 lei, află câți copii și câți adulți au cumpărat bilete la spectacol.

4. Un fermier a scos la vânzare 350 de kg de mere și pere. Un kilogram de mere costă 3 lei, iar unul de pere 7 lei. Câte kilograme de mere și câte kilograme de pere a vândut fermierul, dacă a încasat 1 250 de lei?

5. Pentru premierea de la sfârșitul anului școlar, o școală a achiziționat 300 de cărți. Știind că s-au cheltuit 2 880 de lei și că o carte pentru elevii de ciclul primar costă 8 lei, iar o carte pentru elevii din ciclul gimnazial costă 11 lei, determină câți copii au fost premiați din fiecare ciclu școlar.

6. Într-un bloc de 4 etaje sunt apartamente cu 2, 3 sau 4 camere, în total 40 de apartamente. La fiecare nivel al imobilului există un singur apartament cu 4 camere, iar în total sunt 105 camere. Câte apartamente sunt din fiecare fel?

7. Andrei crește porumbei și iepuri, în total 25 de capete și 76 de picioare. Câți porumbei și câți iepuri are Andrei?

Evaluează-te

1. În blocul cel nou din cartier sunt 25 de apartamente cu două sau cu trei camere. Determină câte apartamente sunt din fiecare fel, dacă blocul are 65 de camere. **3 puncte**

2. Câte pixuri și câte creioane a cumpărat Miruna de la librărie, dacă are în total 14 instrumente de scris pentru care a plătit 66 de lei, iar prețurile lor sunt 6 lei și, respectiv, 3 lei bucata? **3 puncte**

3. La un test cu 10 întrebări, Darius a obținut 22 de puncte. Știind că pentru un răspuns corect a primit 3 puncte, iar pentru unul greșit i s-a scăzut un punct, calculează la câte întrebări a răspuns corect băiatul. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă 4 caiete costă 20 de lei, atunci 3 caiete de același fel costă:
a) 30 de lei; **b)** 15 lei; **c)** 12 lei; **d)** 24 de lei.

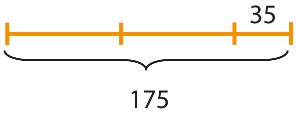
(5p) **2.** Știind că 8 robinete pot umple un bazin în 3 ore, atunci 6 robinete vor umple bazinul în:
a) 4 ore; **b)** 8 ore; **c)** 3 ore; **d)** 6 ore.

(5p) **3.** Suma dintre 18 și produsul lui 9 cu un număr natural este 153. Numărul este:
a) 15; **b)** 35; **c)** 17; **d)** 33.

(5p) **4.** Cinci căciuli și două fulare costă 150 de lei, iar trei căciuli și două fulare de același fel costă 110 lei. O căciulă costă:
a) 10 lei; **b)** 30 de lei; **c)** 25 de lei; **d)** 20 de lei.

(5p) **5.** Alin citește o carte cu 95 de pagini în două zile, astfel: în prima zi cu 13 pagini mai puțin decât a doua zi. Alin a citit în prima zi:
a) 41 de pagini; **b)** 40 de pagini; **c)** 31 de pagini; **d)** 30 de pagini.

(5p) **6.** Dacă în desenul de mai jos este reprezentat numărul natural 175, atunci un segment are valoarea:

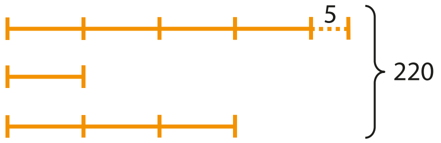


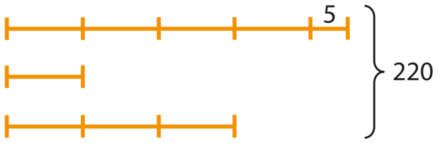
a) 75; **b)** 80; **c)** 70; **d)** 85.

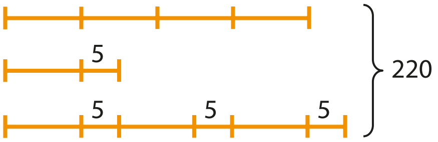
Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

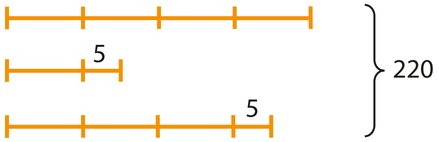
(5p) **1.** Suma a două numere este 80, iar diferența 14. Cel mic dintre numere este:
a) 47; **b)** 33; **c)** 40; **d)** 7.

(5p) **2.** Suma a trei numere este 220. Un sfert din primul număr este cu 5 mai mic decât al doilea număr, iar al treilea număr este de 3 ori mai mare decât al doilea. Stabilește care dintre reprezentările grafice următoare se potrivește cu enunțul problemei.

a)


b)


c)


d)


(5p) **3.** Din dublul unui număr natural se scade câtul dintre pătratul lui 12 și cubul lui 2, se înmulțește rezultatul cu 5 și se obține 510. Exercițiul care corespunde datelor din enunț este:

a) $(2 \cdot a - 144 : 8) \cdot 5 = 510$;
b) $2 \cdot (a - 144 : 8) \cdot 5 = 510$;
c) $2 \cdot a - 144 : 8 \cdot 5 = 510$;
d) $2 \cdot (a - 144 : 8 \cdot 5) = 510$.

(5p) **4.** Pentru 4 cărți și 15 pixuri, George plătește 130 de lei, iar pentru 4 cărți și două pixuri, George plătește 104 lei. Pentru 3 cărți și 12 pixuri George ar trebui să achite:

a) 79 de lei; **b)** 77 de lei; **c)** 99 de lei; **d)** 27 de lei.

(5p) **5.** Alina scoate din pușculița sa 750 de lei, în bancnote de 50 de lei și de 10 lei, în total 23 de bancnote. Câte bancnote de 50 de lei și câte bancnote de 10 lei a scos Alina?

a) 12 bancnote de 50 de lei și 11 bancnote de 10 lei;
b) 13 bancnote de 50 de lei și 10 bancnote de 10 lei;
c) 10 bancnote de 50 de lei și 13 bancnote de 10 lei;
d) 14 bancnote de 50 de lei și 9 bancnote de 10 lei.

(5p) **6.** Alexandra parcurge un traseu în trei zile, astfel: în prima zi a parcurs o treime din traseu, a doua zi jumătate din distanța rămasă, iar în a treia zi ultimii 33 km. Întregul traseu are:

a) 83 km; **b)** 66 km; **c)** 90 km; **d)** 99 km.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

(10p) **1.** Dacă elevii unei clase sunt așezați câte doi în bancă, se ocupă toate băncile, iar într-o bancă stă un singur elev. Dacă se așază câte 3 elevi în bancă, rămân 5 bănci libere, iar într-o bancă stă un singur elev. Determină câți elevi și câte bănci sunt în clasă.

(10p) **2.** Suma a trei numere este 800. Dacă împărțim ultimul număr la cel de-al doilea, se obțin câtul 2 și restul 7, iar dacă împărțim primul număr la ultimul, se obțin câtul 3 și restul 7. Determină cele trei numere.

(10p) **3.** La un concurs, Darius a avut de răspuns la 20 de întrebări. Conform regulamentului concursului, pentru un răspuns corect a primit 10 puncte, iar pentru unul greșit, i s-au scăzut 4 puncte. La câte întrebări a răspuns corect băiatul, dacă din oficiu a primit 10 puncte, iar la final a obținut 154 de puncte?

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

FIȘA DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI:

Autoevaluarea comportamentului elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unei unități de învățare. Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l și adaugă-l la portofoliul personal.

	Răspunsuri (da, nu, parțial)
Am participat activ la fiecare lecție.	
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior.	
Am pus întrebări profesorului atunci când am avut nelămuriri.	
Am răspuns întrebărilor adresate de profesor sau de colegi.	
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate.	
	Punctajul tău
Am obținut la testul de recapitulare și evaluare:	

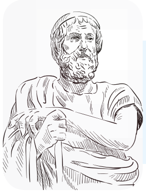
Notă: Poți completa o astfel de fișă la finalul oricărei unități de învățare.

3

UNITATEA III

Divizibilitatea numerelor naturale

CUPRINS



Cel care nu știe să tacă nu poate vorbi.

Pitagora a fost un mare educator și învățător al spiritului grecesc, primul care a afirmat că Pământul este rotund și că se învârte în jurul Soarelui.

III.1. Divizor. Multiplu

Descoperă

Se spune că pe vremea lui Pitagora (sec. VI î.Hr.) un negustor grec care avea 19 cămile, simțindu-și sfârșitul aproape, și-a chemat cei trei copii și le-a spus ca după moartea lui să împartă cămilele, astfel: fiul cel mare să ia jumătate din numărul cămilelor, cel mijlociu un sfert din numărul lor, iar cel mai mic o cincime.

După moartea tatălui lor, cei trei feciori au încercat să împartă între ei cămilele așa cum le ceruse părintele lor. Dar, neizbutind să facă împărțeala, unul dintre frați a cerut sfatul învățatului Pitagora. Astfel că Pitagora se duse împreună cu tânărul în grajd și îi dădu acestuia o cămilă, spunându-i că acum, dacă va merge acasă, va putea rezolva problema moștenirii fără nicio dificultate. Tânărul se duse acasă puțin nedumerit, dar când ajunse acasă își dădu seama că acum avea 20 de cămile și totul se putea rezolva mai ușor. Feciorii făcură următoarele împărțiri:

$20 : 2 = 10$ cămile îi reveneau fratelui cel mare

$20 : 4 = 5$ cămile îi reveneau fratelui mijlociu

$20 : 5 = 4$ cămile îi reveneau fratelui cel mic

$10 + 5 + 4 = 19$ cămile

După împărțirea făcută, cei trei feciori au observat că au o cămilă în plus, pe care au dus-o înapoi marelui învățat Pitagora, mulțumindu-i pentru ajutorul dat.

Reține!

- Un număr natural ***a* este divizibil cu un număr natural *b*** dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul a se numește **multiplu** al lui b, iar b se numește **divizor** al lui a.

Exemple: $20 \vdots 2$ sau $2 \mid 20$, deoarece există numărul natural 10 astfel încât $20 = 2 \cdot 10$;

$19 \not\vdots 4$ sau $4 \nmid 19$, deoarece nu există niciun număr natural c astfel încât $19 = 4 \cdot c$ (19 nu se împarte exact la 4).

- Divizorii lui a se notează cu $\mathcal{D}_a$, iar multiplii lui a se notează cu $\mathcal{M}_a$.

Exemple: $\mathcal{D}_{18}$: 1, 2, 3, 6, 9, 18;

$\mathcal{M}_{18} : 18 \cdot 0, 18 \cdot 1, 18 \cdot 2, ...$, adică $\mathcal{M}_{18} : 0, 18, 36, ...$.

Scriem	Citim
$a \vdots b$	*a* este divizibil cu *b* *a* se divide cu *b* *a* este multiplu al lui *b*
$b \mid a$	*b* divide pe *a* *b* este un divizor al lui *a*
$a \not\vdots b$	*a* nu este divizibil cu *b*
$b \nmid a$	*b* nu divide pe *a*

- Divizorii 1 și a ai numărului natural a se numesc **divizori improprii**.
- Divizorii numărului natural a diferiți de 1 și a, în cazul în care există, se numesc **divizori proprii**.

Observație: $1 \mid a$, $a \mid 0$ și $a \mid a$, pentru orice număr natural a.

Exemple: $1 \mid 20$, $20 \mid 20$.

Regulă: Pentru a afla dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural nenul b, împărțim pe a la b.

- Dacă restul obținut este egal cu 0, atunci a este divizibil cu b.
- Dacă restul obținut este diferit de 0, atunci a nu este divizibil cu b.

Exersează

1. a) Care sunt divizorii numărului natural 64? Dar divizorii proprii?
b) Scrie multiplii mai mici decât 59 ai numărului natural 8.

Rezolvare:

a) Divizorii numărului natural 64 sunt toate numerele naturale la care 64 se împarte exact, adică: 1, 2, 4, 8, 16, 32 și 64. Divizorii proprii sunt cei diferiți de 1 și 64, adică 2, 4, 8, 16 și 32.

b) Multiplii mai mici decât 59 ai numărului natural 8 sunt: $8 \cdot 0$, $8 \cdot 1$, $8 \cdot 2$, $8 \cdot 3$, $8 \cdot 4$, $8 \cdot 5$, $8 \cdot 6$ și $8 \cdot 7$, adică 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48 și 56.

Rezolvă

1. Completează spațiile libere, pe caiet, cu: *este divizibil cu*, *divide pe*, *nu este divizibil cu*, *nu divide pe*.
a) 5 … 20; b) 30 … 5; c) 7 … 21; d) 4 … 21; e) 40 … 8; f) 12 … 35.

2. Apreciază cu **A** (adevărat) sau **F** (fals) următoarele afirmații:
a) $3 \mid 12$; ☐ b) $5 \mid 18$; ☐ c) $4 \nmid 20$; ☐ d) $34 \not\vdots\, 7$; ☐
e) $8 \vdots 2$; ☐ f) $25 \vdots 7$; ☐ g) $72 \not\vdots\, 9$; ☐ h) $70 \not\vdots\, 14$. ☐

3. **Activitate în perechi.** Completați tabelul următor:

Numărul	4	6	12	21
Divizorii improprii				
Divizorii proprii				

4. Completează tabelul următor:

Numărul	2	3	4	5
Multiplii de două cifre				

5. Scrie divizorii numerelor naturale 2, 3, 5, 8, 10 și precizează pentru fiecare divizor dacă este propriu sau impropriu.

6. Scrie multiplii numerelor naturale 6, 7, 8, 9 și 10, mai mici decât 65.

7. Dintre numerele naturale 2, 3, 5, 8, 12, 15, 18, 24, 35, 42, 50 precizează care sunt:
a) divizibile cu 2; b) divizibile cu 5; c) multiplii ai lui 3; d) multiplii ai lui 7.

8. Care sunt numerele naturale divizibile cu 6 mai mari decât 25 și mai mici decât 45?

9. Care sunt multiplii lui 7 mai mari decât 39 și mai mici decât 75?

10. Arată că:
a) $5^{37} \vdots 25^{15}$; b) $49^{19} \vdots 7^{28}$; c) $9^{15} \mid 27^{13}$; d) $16^{10} \mid 8^{15}$.

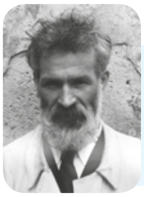
Evaluează-te

1. Câte numere naturale de două cifre sunt divizibile cu 12? Calculează suma lor. **3 puncte**

2. Scrie toți multiplii numărului 13 care sunt mai mici decât 65. **3 puncte**

3. Demonstrează că numărul $n = 2^{25} - 3 \cdot 2^{20} + 5 \cdot 2^{21}$ se divide cu 13. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct



Simplitatea este partea esențială a lucrurilor complicate.

Constantin Brâncuși (19 februarie 1876 – 16 martie 1957) a fost un sculptor român și este considerat geniul artei moderne. Trei opere monumentale ale lui Brâncuși pot fi admirate la Târgu Jiu: *Coloana Infinitului*, *Poarta sărutului* și *Masa tăcerii*.

III.2. DIVIZORI COMUNI

Descoperă

Alina a primit cadou de ziua ei un kit pentru confecționarea brățărilor, care conține 24 de mărgele albastre, 32 de mărgele verzi și 40 de mărgele roșii. Împreună cu mama ei, vrea să confecționeze cel puțin 5 brățări identice, care să conțină aceeași combinație de mărgele. Câte brățări poate face Alina?

Răspuns:

Numărul de brățări trebuie să se cuprindă exact și în numărul mărgelelor albastre, și în numărul mărgelelor verzi, și în numărul mărgelelor roșii, deci numărul brățărilor divide și pe 24, și pe 32, și pe 40. Adică numărul de brățări este un *divizor comun* al numerelor 24, 32 și 40.

$\mathcal{D}_{24}$	1	2	3	4		6	8		12			24		
$\mathcal{D}_{32}$	1	2		4			8			16			32	
$\mathcal{D}_{40}$	1	2		4	5		8	10			20			40

Observăm că ***divizorii comuni*** sunt 1, 2, 4 și 8. Cum Alina și mama sa au nevoie de cel puțin 5 brățări, înseamnă că ele vor face 8 brățări, fiecare conținând câte 3 mărgele albastre, 4 mărgele verzi și 5 mărgele roșii.

Reține!

- Un număr natural ***d***, *d* ≠ 0, se numește **divizor comun** al numerelor naturale *a* și *b*, dacă $\boldsymbol{d \mid a}$ și $\boldsymbol{d \mid b}$.
- Numărul natural **1** este divizor comun al tuturor numerelor naturale.

Exemplu:

$\mathcal{D}_{18}$	**1**	2	**3**	6	**9**	18
$\mathcal{D}_{27}$	**1**	**3**	**9**	27		

Divizorii comuni ai numerelor 18 și 27 sunt 1, 3 și 9.

Exersează

1. Arată că 45 de caiete și 30 de pixuri se pot împărți în mod egal la 15 copii.

Rezolvare:
Deoarece 45 : 15 = 3 și 30 : 15 = 2, rezultă că fiecare copil primește trei caiete și două pixuri. Cum numerele 45 și 30 se divid cu 15, numărul natural 15 este un divizor comun al lor.

2. Scrie divizorii numerelor naturale 36 și 60, apoi alege divizorii lor comuni.

Rezolvare:
Divizorii numerelor 36 și 60 sunt:

$\mathcal{D}_{36}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	9	**12**	18	36			
$\mathcal{D}_{60}$	**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	10	**12**	15	20	30	60

Divizorii comuni ai lui 36 și 60 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12.

Rezolvă

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Divizorii comuni ai numerelor 24, 32 și 80 sunt:
A. 2, 4, 8; **B.** 4, 8; **C.** 1, 2, 4, 8; **D.** 2, 4.

2. **Activitate în perechi.** Completați tabelul:

Numerele	18 și 27	56 și 80	18, 36 și 54	12, 24 și 48
Divizorii comuni				

3. Scrie numărul 180 ca sumă de:
a) două numere naturale divizibile cu 3;
b) două numere naturale divizibile cu 30;
c) trei numere naturale divizibile cu 18;
d) patru numere naturale divizibile cu 5.

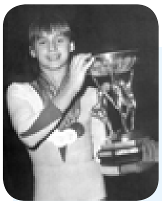
4. Arată că 25 de lalele și 35 de trandafiri se pot pune în mod egal în 5 vaze.

5. Determină cel mai mare număr de echipe care se pot forma din 50 de fete și 75 de băieți, fiecare echipă având același număr de fete și același număr de băieți.

6. Care este numărul maxim de ghiozdane care se pot echipa cu 45 de caiete dictando, 60 de caiete de matematică și 90 de truse de geometrie, astfel încât fiecare ghiozdan să conțină aceeași combinație de obiecte?

7. Într-o zi, toți nepoții bunicii s-au adunat în grădina ei. Bunica a cules 24 de pere și 40 de caise, pe care le-a împărțit în mod egal nepoților, fiecare primind același număr de pere și același număr de caise.
a) Este posibil ca bunica să aibă 6 nepoți?
b) Determină numărul maxim de nepoți pe care îl poate avea bunica.

8. Scrie toate numerele naturale nenule mai mici decât 99 care îndeplinesc condiția:
a) se divid cu 18, dar nu se divid cu 12;
b) se divid cu 12, dar nu se divid cu 18.



Munca grea face totul mai ușor. Acesta este secretul meu. De aceea am câștigat.

Nadia Elena Comăneci (12 noiembrie 1961) este prima gimnastă din lume care a primit nota zece într-un concurs olimpic de gimnastică, fiind supranumită „Zeița de la Montreal”. Este câștigătoare a șase medalii olimpice de aur, fiind considerată una dintre cele mai bune sportive ale secolului XX și una dintre cele mai bune gimnaste ale lumii din toate timpurile.

III.3. MULTIPLI COMUNI

Descoperă

Primăria a reabilitat cei 960 de metri ai unei străzi, plantând pe o parte copaci din 80 în 80 de metri, iar pe partea cealaltă montând stâlpi de iluminat din 120 în 120 de metri. La ce distanțe față de punctul de plecare se află un copac așezat în dreptul unui stâlp de iluminat?

Răspuns:

Copacii s-au plantat din 80 în 80 de metri, iar stâlpii de iluminat din 120 în 120 de metri.

- Multiplii lui 80 mai mici sau egali cu 960 sunt: 0, 80, 160, **240**, 320, 400, **480**, 560, 640, **720**, 800, 880 și **960**.
- Multiplii lui 120 mai mici sau egali cu 960 sunt: 0, 120, **240**, 360, **480**, 600, **720**, 840 și **960**.

Ca urmare, un copac și un stâlp se vor afla unul în dreptul celuilalt la distanțele: 240 m, 480 m, 720 m și 960 m (adică în dreptul multiplilor comuni ai numerelor 80 și 120).

Reține!

- Un număr natural *m* este **multiplu comun** a două numere naturale *a* și *b*, dacă: $m \vdots a$ și $m \vdots b$.
- Numărul natural **0** este multiplu comun al tuturor numerelor naturale.

Exemplu:

Multiplii comuni ai numerelor 12 și 18 sunt: 36, 72, 108 etc.

$\mathcal{M}_{12}$	0	12	24	**36**	48	60	**72**	84	96	**108**	120	...
$\mathcal{M}_{18}$	0	18	**36**	54	**72**	90	**108**	126	144	162	180	...

Exersează

1. Arată că 40 de biscuiți pot fi împachetați și în pachete de câte 5 biscuiți, și în pachete de câte 10 biscuiți.

Rezolvare:

Deoarece 40 : 5 = 8 și 40 : 10 = 4, rezultă că 40 de biscuiți se pot împărți și în 8 pachete a câte 5 biscuiți, dar și în 4 pachete a câte 10 biscuiți. Cum numărul 40 este divizibil și cu 5, și cu 10, el este un multiplu comun al celor două numere.

2. Scrie multiplii mai mici decât 75 ai numerelor naturale 6 și 9, apoi alege multiplii lor comuni.

Rezolvare:

Multiplii mai mici decât 75 ai numerelor 6 și 9 sunt:

$\mathcal{M}_6$	**0**	6	12	**18**	24	30	**36**	42	48	**54**	60	66	**72**
$\mathcal{M}_9$	**0**	9	**18**	27	**36**	45	**54**	63	**72**				

Multiplii comuni ai lui 6 și 9 din acest interval sunt: 0, 18, 36, 54 și 72.

Rezolvă

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Multiplii comuni diferiți de zero, mai mici decât 100, ai numerelor 6, 8 și 24 sunt:

A. 24, 48; **B.** 24, 48, 72, 96; **C.** 24; **D.** 48, 96.

2. **Activitate în perechi.** Completați tabelul:

Numerele	6, 9, 18 și 27	4, 7, 14 și 21	18, 24 și 36	12, 21 și 28
Doi multipli comuni diferiți de zero				

3. Determină cel mai mic număr de bomboane care ar putea fi ambalate și câte 20 într-o cutie, și câte 25 într-o cutie.

4. Determină suma primilor cinci multipli nenuli ai lui 7.

5. Verifică dacă 814 este multiplu comun al numerelor 37 și 11.

6. Scrie multiplii mai mici decât 70 ai numerelor naturale 4 și 14, apoi alege-i pe cei comuni.

7. Determină cel mai mic număr de flori care pot fi plantate și câte 10 pe un rând, și câte 16 pe un rând, și câte 20 pe un rând.

8. Arată că suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3.

9. Restul împărțirii numărului natural n la 69 este 46. Arată că n este un multiplu de 23.

10. Un montaj electronic are două becuri care clipesc la intervale diferite de timp. Inițial, cele două becuri sunt aprinse, apoi unul se reaprinde din 6 în 6 secunde, iar celălalt din 8 în 8 secunde. De câte ori se vor reaprinde simultan cele două becuri în 3 minute?

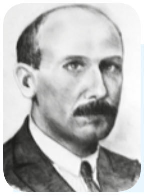
Evaluează-te

1. Verifică dacă: **a)** 56 este divizibil cu 8; **b)** 5 îl divide pe 76. **3 puncte**

2. Verifică dacă: **a)** 64 este multiplu de 12; **b)** 18 este divizor al lui 90. **3 puncte**

3. Demonstrează că toate numerele naturale de forma $\overline{abcabc}$ se divid cu 7, cu 11 și cu 13. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct



Matematicile pun în joc puteri sufletești nu mult mai diferite de cele solicitate de poezie și artă.

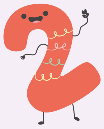
Ion Barbu (18 martie 1895 – 11 august 1961) a fost poet și matematician român. Ca matematician este cunoscut sub numele Dan Barbilian. A fost unul dintre cei mai importanți poeți români interbelici.

III.4. CRITERII DE DIVIZIBILITATE CU 2, 5, 10, 10^n, 3 ȘI 9

Descoperă

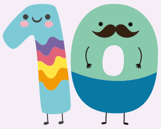
Ştim că un număr natural *n* este divizibil cu *d*, dacă numărul *n* se împarte exact la *d* (restul este 0).

Există, însă, câteva reguli cu ajutorul cărora putem indica rapid dacă un număr este divizibil sau nu cu un altul, fără a face operația de împărțire! Aceste reguli se numesc **criterii de divizibilitate** și pe unele dintre acestea le vom deduce.



Să studiem mulțimea multiplilor lui 2: **0, 2, 4, 6, 8**, 1**0**, 1**2**, 1**4**, 1**6**, 1**8**, 2**0**, 2**2**, … . Observăm că multiplii lui 2 au ultima cifră pară, adică 0, 2, 4, 6 sau 8. Deducem, astfel, că **un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este pară**.

Multipli lui **5** sunt: **0**, **5**, 1**0**, 1**5**, 2**0**, 2**5**, 3**0**, 3**5**, 4**0**, … . Observăm că multiplii lui 5 au ultima cifră 0 sau 5. Deducem, astfel, că **un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5**.



Observăm că $\mathcal{M}_{10}$: **0**, 1**0**, 2**0**, 3**0**, 4**0**, 5**0**, …, adică toți multiplii lui 10 au ultima cifră 0. Deducem, astfel, că **un număr natural este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0**.

Reține!

- **Criteriul de divizibilitate cu 2**

Un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este pară (0, 2, 4, 6 sau 8).

- **Criteriul de divizibilitate cu 5**

Un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.

- **Criteriul de divizibilitate cu 10**

Un număr natural este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0.

- **Criteriul de divizibilitate cu 10^n**

Un număr natural este divizibil cu 10^n dacă ultimele *n* cifre ale sale sunt egale cu 0.

- **Criteriul de divizibilitate cu 3**

Un număr natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.

- **Criteriul de divizibilitate cu 9**

Un număr natural este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

Exemple: Numere divizibile cu 2: 8, 12, 16, 24, 36, 48, 80, 130.
Numere divizibile cu 5: 20, 35, 165, 240, 360, 485, 870, 2 135.
Numere divizibile cu 10: 40, 350, 1 650, 2 470, 3 670, 48 500, 87 390.
Numere divizibile cu 10^2: 700, 3 500, 4 600, 71 400, 391 600, 748 500.
Numere divizibile cu 10^3: 3 000, 72 000, 7 469 000.
Numere divizibile cu 3: 18 ($1 + 8 = 9 \vdots 3$), 45 ($4 + 5 = 9 \vdots 3$), 477 ($4 + 7 + 7 = 18 \vdots 3$).
Numere divizibile cu 9: 45 ($4 + 5 = 9 \vdots 9$), 108 ($1 + 0 + 8 = 9 \vdots 9$), 1 485 ($1 + 4 + 8 + 5 = 18 \vdots 9$).

Rezolvă

1. Scrie DA sau NU în dreptul numerelor următoare, stabilind dacă acestea sunt divizibile sau nu cu 2.

a) 17 ☐; **b)** 28 ☐; **c)** 34 ☐; **d)** 57 ☐; **e)** 106 ☐;

f) 127 ☐; **g)** 134 ☐; **h)** 150 ☐; **i)** 272 ☐; **j)** 1010 ☐.

2. Determină toate numerele de forma $\overline{3a}$ divizibile cu 2.

3. **a)** Care este cel mai mic număr natural de trei cifre distincte divizibil cu 2?
b) Care este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte divizibil cu 2?

4. Scrie toate numerele de două cifre care au suma cifrelor 11 și sunt divizibile cu 2.

5. Notează DA sau NU în dreptul numerelor următoare, stabilind dacă acestea sunt divizibile sau nu cu 5.

a) 15 ☐; **b)** 23 ☐; **c)** 30 ☐; **d)** 45 ☐; **e)** 64 ☐;

f) 85 ☐; **g)** 120 ☐; **h)** 235 ☐; **i)** 304 ☐; **j)** 1010 ☐.

6. Determină toate numerele de forma $\overline{31a}$ divizibile cu 5.

7. **a)** Care este cel mai mic număr natural de trei cifre distincte divizibil cu 5?
b) Care este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte divizibil cu 5?

8. Câte numere de forma $\overline{a3b}$ sunt divizibile cu 5?

9. **Activitate în perechi.** Se dă șirul de numere: 2, 5, 14, 20, 38, 45, 64, 82, 93, 100, 235, 297, 360, 8 400, 9 032, 15 000, 430 000. Grupați aceste numere în tabel, urmând modelul:

Numere divizibile cu 2	Numere divizibile cu 5	Numere divizibile cu 10	Numere divizibile cu 100	Numere divizibile cu 1 000	Numere divizibile cu 10 000
2, ...		20, ...	100, ...		

10. Scrie toate numerele de forma $\overline{43a}$ divizibile cu: **a)** 2; **b)** 5; **c)** 10.

11. Notează DA sau NU în dreptul numerelor următoare, stabilind dacă acestea sunt divizibile sau nu cu 3.

a) 18 ☐; **b)** 32 ☐; **c)** 57 ☐; **d)** 128 ☐; **e)** 150 ☐.

12. Scrie toate numerele de forma $\overline{3a2}$ divizibile cu 3.

13. Scrie toate numerele de forma $\overline{a1b}$, divizibile cu 3 și cu 5.

14. Notează DA sau NU în dreptul numerelor următoare, stabilind dacă acestea sunt divizibile sau nu cu 9.

a) 29 ☐; **b)** 30 ☐; **c)** 45 ☐; **d)** 234 ☐; **e)** 819 ☐.

15. Arată că:
a) $10^{2025} - 1$ este divizibil cu 9; **b)** $2^6 \cdot 5^8 + 29$ este divizibil cu 9.

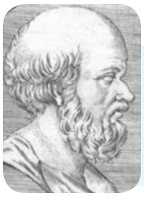
Evaluează-te

1. Scrie toate numerele naturale de forma $\overline{25a}$ divizibile cu: **a)** 2; **b)** 5; **c)** 10. **3 puncte**

2. Determină toate numerele naturale de forma $\overline{a32b}$ divizibile cu 2 și cu 9. **3 puncte**

3. Determină cifrele *a* și *b*, știind că $\overline{6ab}$ se divide cu 9 și $635 < \overline{6ab} < 652$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct



Nevoia învață totul.

Eratostene (276 – 195 î.Hr.) a fost matematician, poet, geograf și astronom antic grec, care a aparținut școlii din Alexandria. El a reușit, în premieră, să calculeze circumferința planetei noastre.

III.5. Numere prime. Numere compuse

Descoperă

Reamintim că orice număr natural are întotdeauna doi divizori (improprii): pe 1 și pe el însuși, restul divizorilor, dacă există, fiind divizori proprii.

Unele numere naturale au numai divizori improprii, pe când altele au și divizori proprii. De exemplu, numerele 2, 3, 5, 13, 17 au numai divizori improprii, iar numerele 4, 6, 8, 20 au și divizori proprii.

Reține!

- Un număr natural nenul care are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși se numește număr **prim**.
- Numerele naturale nenule care nu sunt prime se numesc numere **compuse**.
- Numerele 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse.
- Singurul număr prim și par este 2. Toate numerele prime mai mari decât 2 sunt numere impare.

Algoritm de recunoaștere a numerelor prime

Este ușor de verificat că numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sunt numere prime, deoarece au doar doi divizori, pe 1 și pe ele însele.

Pentru a determina dacă un număr natural este prim sau nu, procedăm astfel:

- împărțim, pe rând, numărul respectiv la toate numerele prime mai mici decât el, în ordine crescătoare, până când câtul împărțirii devine mai mic decât împărțitorul;
- dacă toate împărțirile au restul nenul, numărul dat este prim, în caz contrar numărul este compus.

Exemple:

$37 : 2 = 18$ rest 1
$37 : 3 = 12$ rest 1
$37 : 5 = 7$ rest 2
$37 : 7 = 5$ rest 2

$5 < 7$ (câtul este mai mic decât împărțitorul)
$\Downarrow$
37 este număr prim

$137 : 2 = 68$ rest 1
$137 : 3 = 45$ rest 2
$137 : 5 = 27$ rest 2
$137 : 7 = 19$ rest 4
$137 : 11 = 12$ rest 5
$137 : 13 = 10$ rest 7

$10 < 13$ (câtul este mai mic decât împărțitorul)
$\Downarrow$
137 este număr prim

$143 : 2 = 71$ rest 1
$143 : 3 = 47$ rest 2
$143 : 5 = 28$ rest 3
$143 : 7 = 20$ rest 3
$143 : 11 = 13$ rest 0
$\Downarrow$
143 este număr compus
$143 = 11 \cdot 13$

Exersează

1. Scrie numărul natural 14 ca:

a) sumă de două numere prime;

b) sumă dintre un număr prim și unul compus;

c) produs de două numere prime.

Rezolvare:

a) $14 = 3 + 11$; b) $14 = 2 + 12$; c) $14 = 2 \cdot 7$.

2. Determină numerele prime a și b, știind că $3a + 2b = 28$.

Rezolvare: Din $3a + 2b = 28$ deducem că $3a = 28 - 2b$. Cum orice număr înmulțit cu 2 este un număr par, rezultă că $2b$ este număr par. Cum diferența a două numere pare are ca rezultat tot un număr par, rezultă că $28 - 2b$ este număr par, de unde $3a$ este număr par. Dar 3 este număr impar, de unde deducem că a trebuie să fie număr par. Fiind și prim, și par, rezultă că a nu poate fi decât 2. Înlocuind, obținem: $3 \cdot 2 + 2b = 28$ sau $2b = 28 - 6$ sau $2b = 22$, de unde $b = 11$, care este număr prim. Prin urmare, numerele căutate sunt 2 și 11.

Rezolvă

1. Scrie în caietul tău numerele prime mai mici decât 100.

2. Verifică care dintre următoarele numere sunt prime și care sunt compuse: 137, 263, 403, 1 001, 2 027, 2 029, 2 167.

3. Scrie numerele 6, 14, 26, 42, 108 ca sume de două numere prime.

4. Scrie numerele 15, 20, 21 și 26 ca sume de trei numere prime.

5. Determină numerele prime a și b, astfel încât $a + 2b = 108$.

6. Determină numerele prime a, b și c, astfel încât $2a + b + 4c = 136$.

7. Arată că $a = 2^{13} \cdot 5^{12} + 1$ este număr compus.

8. Determină numerele prime de forma $\overline{2xx}$.

9. Suma a două numere prime este 61. Calculează produsul lor.

10. Determină cifra x pentru care numerele naturale de forma $\overline{4x}$ și $\overline{7x}$ sunt simultan prime.

11. Arată că numărul $N = 1^n + 5^n + 6^n + 10^n$ nu este număr prim, oricare ar fi numărul natural n.

Activitate în echipă

Un număr N se numește ***perfect*** dacă suma S, a divizorilor săi mai mici decât N, este egală cu N. De exemplu, numărul 28 este perfect, deoarece $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Dacă suma $S < N$, numărul se numește ***deficient***, iar dacă $S > N$, numărul se numește ***abundent***.

Împărțiți în trei echipe, găsiți numerele *perfecte*, *deficiente* și *abundente* mai mici decât 200.

Evaluează-te

1. Verifică dacă numărul 251 este prim sau nu. **3 puncte**

2. Determină numerele prime a, b și c, astfel încât: $4a + 6b + 5c = 66$. **3 puncte**

3. Determină numerele prime a și b, știind că $\overline{ab} + \overline{ba} = 110$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Scrierea 6 | 126 se citește:
a) 6 se divide cu 126; **b)** 6 este divizibil cu 126;
c) 6 divide pe 126; **d)** 126 divide pe 6.

(5p) **2.** Divizorii numărului natural 32 sunt:
a) 1, 2, 3, 4, 8, 16, 32; **b)** 1, 2, 4, 8, 16, 32; **c)** 2, 4, 8, 16; **d)** 1, 4, 8, 16, 32.

(5p) **3.** Multiplii numărului natural 9, mai mici decât 32, sunt:
a) 0, 9, 18, 32; **b)** 0, 9; **c)** 9, 18; **d)** 0, 9, 18, 27.

(5p) **4.** Câte numere naturale divizibile cu 7 există între 23 și 87?
a) 13 numere; **b)** 7 numere; **c)** 9 numere; **d)** 10 numere.

(5p) **5.** Diferența dintre suma divizorilor numărului 36 și suma primelor opt numere prime este:
a) 14; **b)** 11; **c)** 13; **d)** 24.

(5p) **6.** Elevii primesc următoarea problemă: „Care este cel mai mic număr de pomi fructiferi care se pot planta și câte 12 pe un rând, și câte 15 pe un rând?”. Alina răspunde: „120”. Afirmația Alinei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** În tabelul alăturat sunt trecute cantitățile de fructe din care se vor face pachete pentru copii. Care este numărul maxim de pachete care se pot face, știind că fiecare copil va primi aceeași combinație de fructe?

Denumire produse	**pere**	**banane**	**mere**
Număr de fructe	75	45	105

a) 3; **b)** 15; **c)** 5; **d)** 25.

(5p) **2.** Suma divizorilor comuni ai numerelor 18, 24 și 48 este:
a) 28; **b)** 16; **c)** 12; **d)** 18.

(5p) **3.** Cel mai mic număr de pixuri care se pot împărți și la 16, și la 18, dar și la 24 de copii este:
a) 124; **b)** 144; **c)** 96; **d)** 48.

(5p) **4.** Restul împărțirii unui număr natural n la 75 este 15. Numărul n este:
a) un număr prim; **b)** multiplu de 7; **c)** multiplu de 15; **d)** multiplu de 25.

(5p) **5.** Câte numere de forma $\overline{5a4a}$ sunt divizibile și cu 2, și cu 3?
a) 2 numere; **b)** 3 numere; **c)** 4 numere; **d)** 5 numere.

(5p) **6.** Suma tuturor numerelor de forma $\overline{5x94}$, care sunt divizibile cu 9, este:
a) 0; **b)** 9; **c)** 11 088; **d)** 9 090.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră șirul de numere naturale: 5, 6, 8, 9, 12, 34, 81, 122, 303, 524, 327, 625, 900, 1 025.
(5p) **a)** Determină termenii șirului care se divid cu 3, dar nu se divid cu 2.
(5p) **b)** Calculează suma numerelor determinate la subpunctul a).

(5p) **2.** **a)** Demonstrează că numerele $72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 21, oricare ar fi numărul natural n.
(5p) **b)** Arată că numărul $7^{2028} - 3^{2028}$ este divizibil cu 10.

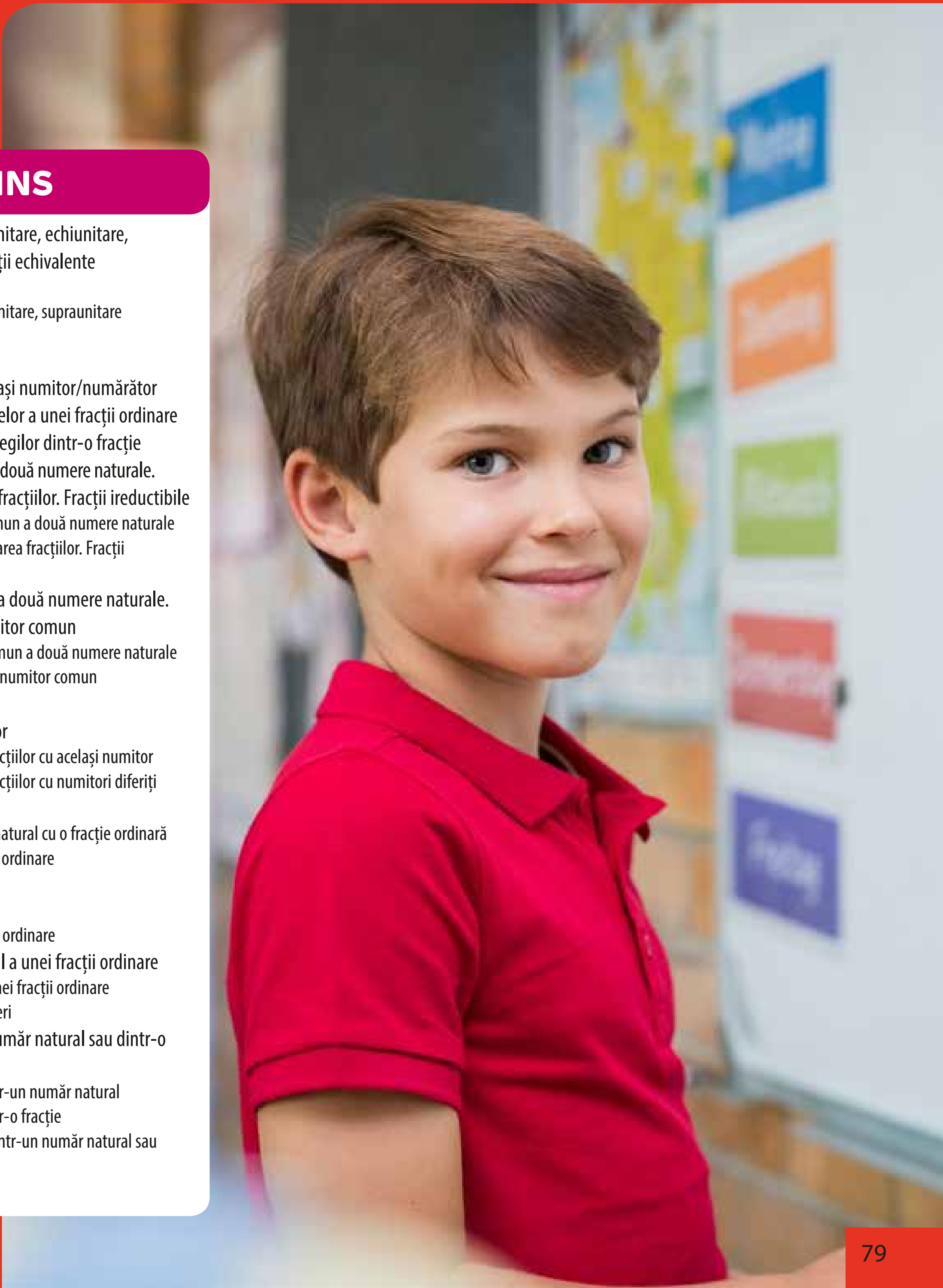
(5p) **3.** **a)** Găsește numerele prime x, y care îndeplinesc condiția $13x + 4y = 70$.
(5p) **b)** Determină cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $\overline{2a6b}$ care sunt divizibile cu 2 și cu 9.

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

4

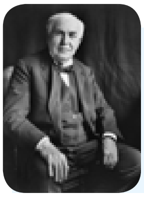
UNITATEA IV

Fracții ordinare



CUPRINS

Geniul este un procent inspirație și 99 de procente transpirație.



Thomas Alva Edison (11 februarie 1847 – 18 octombrie 1931) a fost inventator și om de afaceri american, având peste 1 000 de invenții care au revoluționat lumea: becul, sistemul electric de iluminat, difuzorul, telegraful, fonograful, telefonul cu bobină de inducție, prima centrală electrică, cinematograful sonor etc.

IV.1. FRACȚII ORDINARE. FRACȚII SUBUNITARE, ECHIUNITARE, SUPRAUNITARE. PROCENTE. FRACȚII ECHIVALENTE

IV.1.1. Fracții ordinare

Descoperă

Să urmărim împreună desenele.

- În figura 1, un dreptunghi este împărțit în două părți egale și o parte dintre cele două este hașurată; vom scrie, astfel, că partea hașurată reprezintă $\frac{1}{2}$ din întregul dreptunghi și citim: *unu pe doi* sau *unu supra doi*.
- În figura 2 sunt reprezentate două cercuri de aceeași mărime, fiecare dintre ele fiind împărțit în câte trei părți de aceeași mărime. Deoarece au fost hașurate patru părți, iar fiecare cerc a fost împărțit în trei părți egale, scriem că partea hașurată reprezintă $\frac{4}{3}$ din cele două cercuri și citim: *patru pe trei* sau *patru supra trei*.
- În figura 3, un pătrat este împărțit în opt părți de aceeași mărime și trei dintre aceste părți sunt hașurate. Arătăm că trei părți au fost hașurate, din cele opt, scriind $\frac{3}{8}$ și citim *trei pe opt*. Tot în figura 3, cinci dintre cele opt părți nu sunt hașurate. Scriem că partea nehașurată reprezintă $\frac{5}{8}$ din întregul pătrat și citim: *cinci pe opt*.

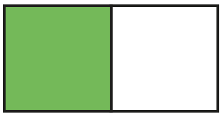


Figura 1

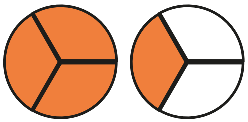


Figura 2

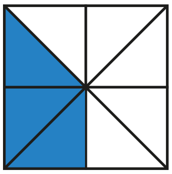


Figura 3

Reține!

- O parte dintr-un întreg împărțit în părți egale se numește **unitate fracționară**. Una sau mai multe unități fracționare reprezintă o fracție ordinară.

Forma generală a unei fracții ordinare este $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$.

- Numitorul unei fracții nu poate fi 0 (nu putem împărți niciodată un întreg în 0 părți egale)!
- **Elementele** unei fracții ordinare:

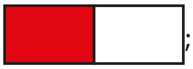
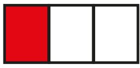
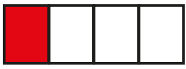
$$\frac{a}{b}$$

a → **numărătorul** fracției (ne arată câte părți egale se iau în considerare);
— → **linia de fracție** (semnifică o împărțire);
b → **numitorul** fracției (ne arată în câte părți egale se împarte întregul).

Observație: Orice număr natural se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Exemple: $1=\frac{4}{4}$; $2=\frac{8}{4}$; $8=\frac{16}{2}$; $3=\frac{45}{15}$.

Observație: Pentru orice număr natural nenul *n*, avem: $\frac{0}{n}=0$, $\frac{n}{1}=n$.

- Fracțiile se pot reprezenta cu ajutorul desenelor, astfel: „o doime” sau „o jumătate” sau „unu pe doi” se scrie $\frac{1}{2}$ ; „o treime” sau „unu pe trei” se scrie $\frac{1}{3}$ ; „o pătrime” sau „un sfert” sau „unu pe patru” se scrie $\frac{1}{4}$ .
- Citirea fracțiilor

Fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ se citesc: *o doime*, *o treime*, *o pătrime*, *o cincime*, *o șesime*, *o șeptime*, *o optime*, *o noime*, respectiv *o zecime*. Fracția $\frac{1}{2}$ se mai citește *jumătate*, iar fracția $\frac{1}{4}$ se mai citește *un sfert*.

Fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{9}{10}$ se citesc *două treimi*, *patru șeptimi*, *trei optimi*, respectiv *nouă zecimi*.

IV.1.2. Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare

Descoperă

- Să comparăm numărătorul și numitorul următoarelor fracții: $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{9}{4}, \frac{3}{3}, \frac{14}{9}, \frac{3}{2}$ și $\frac{4}{5}$. Se observă că fracțiile: $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ și $\frac{4}{5}$ au numărătorul mai mic decât numitorul ($2 < 3$, $5 < 7$ și $4 < 5$); fracțiile $\frac{9}{4}, \frac{14}{9}$ și $\frac{3}{2}$ au numărătorul mai mare ca numitorul ($9 > 4$, $14 > 9$ și $3 > 2$); fracția $\frac{3}{3}$ are numărătorul egal cu numitorul și reprezintă întregul sau unitatea. Comparând numărătorul cu numitorul, putem clasifica fracțiile.

Reține!

Fracția $\frac{a}{b}$, unde *a* și *b* sunt numere naturale, $b \neq 0$, este:

- **subunitară**, dacă $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1$ (numărătorul este mai mic decât numitorul, adică fracția este mai mică decât întregul); ***exemple:*** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{90}, \frac{12}{21}, \frac{n+1}{n+3}, \frac{3n}{3n+7}$, unde *n* este număr natural;
- **echiunitară**, dacă $a = b$ (numărătorul este egal cu numitorul); ***exemple:*** $\frac{2}{2}, \frac{17}{17}, \frac{102}{102}$;
- **supraunitară**, dacă $a > b \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$ (numărătorul este mai mare decât numitorul sau fracția este mai mare decât întregul); ***exemple:*** $\frac{6}{5}, \frac{14}{9}, \frac{5}{2}, \frac{17}{13}, \frac{n+7}{n+3}, \frac{2n+5}{2n+1}$, unde *n* este număr natural.

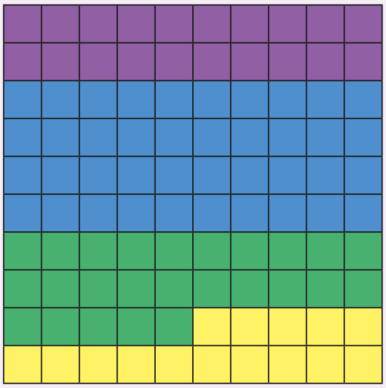
IV.1.3. Procente

Descoperă

În desenul alăturat, din cele 100 de pătrățele, 20 de pătrățele sunt colorate cu mov, 40 cu albastru, 25 cu verde și 15 cu galben.

Cum scriem ce fracție reprezintă fiecare dintre zonele colorate?

Răspuns: Cele 20 de pătrățele colorate cu mov reprezintă fracția $\frac{20}{100}$, cele 40 de pătrățele colorate cu albastru reprezintă fracția $\frac{40}{100}$, cele 25 de pătrățele colorate cu verde reprezintă fracția $\frac{25}{100}$, iar cele 15 pătrățele colorate cu galben reprezintă fracția $\frac{15}{100}$.



Reține!

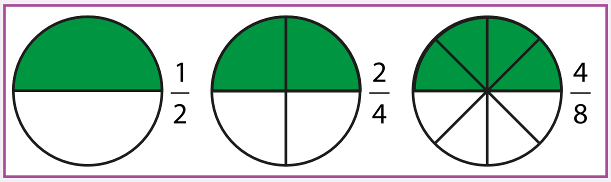
O fracție cu numitorul 100 se numește procent. Fracția $\frac{p}{100}$ se scrie *p%* și se citește *p la sută* sau *p procente*.

Exemple: $\frac{3}{100}=3\%$; $\frac{20}{100}=20\%$; $\frac{30}{100}=30\%$; $\frac{40}{100}=40\%$; $\frac{60}{100}=60\%$; $\frac{100}{100}=100\%$.

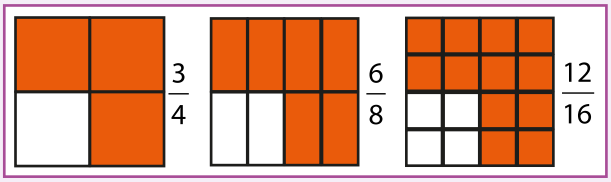
IV.1.4. Fracții echivalente

Descoperă

Fracțiile $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ și $\frac{4}{8}$ reprezintă aceeași cantitate din întreg.



Fracțiile $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ și $\frac{12}{16}$ reprezintă, de asemenea, aceeași cantitate din întreg.



Reține!

Două fracții care reprezintă aceeași parte dintr-un întreg se numesc **fracții echivalente**.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ $(b \neq 0$ și $d \neq 0)$ sunt echivalente (egale) și scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ $(b \neq 0$ și $d \neq 0)$ nu sunt echivalente și scriem $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$.

Exemple: $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ deoarece $5 \cdot 6 = 15 \cdot 2$; dar $\frac{5}{13}\neq\frac{20}{39}$ deoarece $5 \cdot 39 \neq 13 \cdot 20$.

Exersează

1. Găsește numărul natural x pentru care fracțiile următoare nu sunt definite: **a)** $\frac{5}{x-2}$; **b)** $\frac{1}{x(x-1)}$.

Rezolvare:

a) Fracția $\frac{5}{x-2}$ nu este definită dacă numitorul ei este egal cu 0, adică dacă $x - 2 = 0$ sau $x = 2$.

b) Fracția $\frac{1}{x(x-1)}$ nu este definită dacă numitorul ei este egal cu 0, adică pentru $x(x - 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0$ sau $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 1$.

2. Determină numărul natural x, astfel încât:

a) fracția $\frac{2x+1}{x+5}$ să fie supraunitară; **b)** fracția $\frac{205}{20x+5}$ să fie echiunitară;

c) fracția $\frac{x^2+1}{9}$ să fie subunitară; **d)** fracțiile $\frac{3x-4}{x}$ și $\frac{5}{2}$ să fie echivalente.

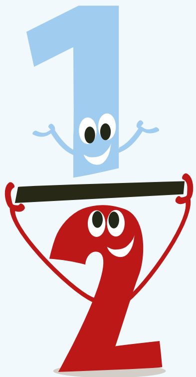
Rezolvare:

a) Fracția $\frac{2x+1}{x+5}$ este supraunitară pentru $2x + 1 > x + 5$; obținem $2x - x > 5 - 1$, de unde $x > 4$, deci x poate fi 5, 6, 7, ...

b) Fracția $\frac{205}{20x+5}$ este echiunitară pentru $205 = 20x + 5$; obținem $20x = 205 - 5$ sau $20x = 200$, de unde $x = 10$.

c) Fracția $\frac{x^2+1}{9}$ este subunitară pentru $x^2 + 1 < 9$; obținem $x^2 < 8$, de unde x poate fi 0, 1 sau 2.

d) Fracțiile $\frac{3x-4}{x}$ și $\frac{5}{2}$ sunt echivalente dacă $\frac{3x-4}{x} = \frac{5}{2}$; obținem: $2(3x - 4) = 5x$ sau $6x - 8 = 5x$, de unde $x = 8$.



3. Arată că dacă $\frac{a}{5} = \frac{b}{8}$, atunci $120a = 75b$.

Rezolvare: Fracțiile $\frac{a}{5}$ și $\frac{b}{8}$ sunt echivalente, deci $8a = 5b$. Înmulțind relația cu 15, obținem $8a \cdot 15 = 5b \cdot 15$, adică $120a = 75b$.

Rezolvă

1. **Activitate în perechi.** Selectați fracțiile subunitare, echiunitare și supraunitare din următorul șir de fracții ordinare, grupându-le într-un tabel, ca în model:

$$\frac{5}{2}, \frac{8}{9}, \frac{11}{14}, \frac{27}{25}, \frac{32}{32}, \frac{21}{17}, \frac{2}{2}, \frac{29}{15}, \frac{18}{29}, \frac{135}{134}, \frac{2019}{2022}, \frac{2015}{2018}, \frac{3^2}{3^7}, \frac{2^{20}}{5^{30}}, \frac{2a+5}{2a+3}.$$

Fracții subunitare	Fracții echiunitare	Fracții supraunitare
$\frac{8}{9}$	$\frac{32}{32}$	$\frac{5}{2}$

2. Scrie ca procente următoarele fracții:

a) $\frac{7}{100}$; **b)** $\frac{21}{100}$; **c)** $\frac{13}{100}$; **d)** $\frac{131}{100}$; **e)** $\frac{180}{100}$; **f)** $\frac{300}{100}$.

3. Scrie ca fracții ordinare următoarele procente:

a) 2%; **b)** 25%; **c)** 50%; **d)** 100%; **e)** 150%; **f)** 230%.

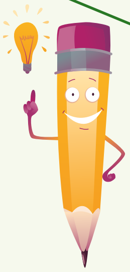
4. Determină valorile numărului natural x pentru care fracția $\frac{3^x}{2^x}$ este:

a) subunitară; **b)** echiunitară; **c)** supraunitară.

5. Scrie toate fracțiile supraunitare $\frac{a}{b}$ cu numărătorul și numitorul numere prime cuprinse între 3 și 15.

6. Scrie perechi de fracții echivalente folosind câte o fracție din fiecare coloană, **A** și **B**.

A	B
$\frac{1}{3}$;	$\frac{1}{4}$;
$\frac{5}{20}$;	$\frac{30}{45}$;
$\frac{6}{9}$;	$\frac{4}{12}$;
$\frac{2}{7}$.	$\frac{4}{18}$;
	$\frac{30}{105}$.

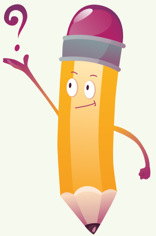


7. Stabilește valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții:

$p: \frac{8^{15}}{32^9}$ este fracție echiunitară;

$q: \frac{2^{93}}{3^{62}}$ este fracție supraunitară;

$r: \frac{n+8}{n-8}$, $n > 8$, este fracție subunitară.



8. Scrie toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{\overline{a6}}{\overline{b3}}$, astfel încât numărătorul să fie un număr natural pătrat perfect, iar numitorul un număr prim.

9. Determină numărul $\overline{xy}$, astfel încât fracția $\frac{4}{x+y}$ să fie supraunitară.

10. Determină toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule, știind că:

a) sunt subunitare și $a + b = 15$; **b)** sunt supraunitare și $a \cdot b = 36$.

Evaluează-te

1. **a)** Scrie toate fracțiile subunitare cu numitorul 65 și numărătorul o putere a lui 2.
b) Scrie toate fracțiile supraunitare cu numărătorul 2^3 și numitorul număr natural, divizor al lui 36.
c) Scrie toate fracțiile echiunitare cu numitorul cel mult 5. **3 puncte**

2. Scrie în casetă litera A, dacă afirmația este adevărată sau litera F, dacă afirmația este falsă.

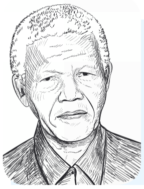
a) $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$; ☐ **b)** $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; ☐ **c)** $\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$. ☐ **3 puncte**

3. Determină numerele naturale n, știind că fracția:

a) $\frac{12}{2n+4}$ este subunitară; **b)** $\frac{3n+2}{2n+7}$ este echiunitară; **c)** $\frac{13}{n^2+1}$ este supraunitară. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Educația este cea mai puternică armă pe care o poți folosi pentru a schimba lumea.

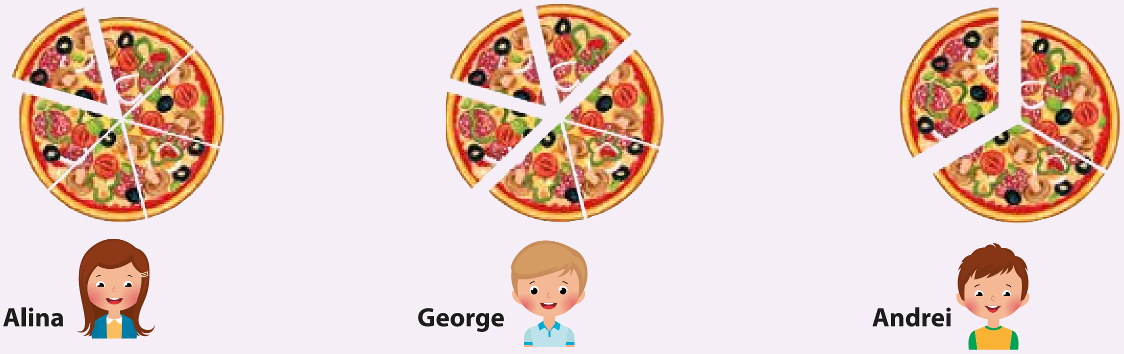


Nelson Mandela (18 iulie 1918 – 5 decembrie 2013) a fost primul președinte al Africii de Sud, ales prin vot universal. Pentru lupta sa împotriva sărăciei și inegalității, a primit în 1993 Premiul Nobel pentru Pace.

IV.2. COMPARAREA FRACȚIILOR CU ACELAȘI NUMITOR/NUMĂRĂTOR

Descoperă

Trei copii, Alina, George și Andrei, au primit la petrecerea unei colege câte o pizza de aceeași mărime. Alina a împărțit pizza sa în 6 felii și a luat o felie, George a împărțit-o în 6 felii și a luat trei felii, iar Andrei a împărțit pizza sa în 3 felii, din care a luat una.



Observă desenele și spune cine a mâncat cel mai puțin? Justifică!

Răspuns: Scriind sub formă de fracții cantitățile de pizza servite de fiecare copil, obținem că Alina a mâncat $\frac{1}{6}$, George a mâncat $\frac{3}{6}$, iar Andrei $\frac{1}{3}$. Comparând cantitățile Alinei și ale lui George, se observă că George a mâncat mai mult decât Alina, deoarece trei felii din 6 reprezintă mai mult decât o felie din 6. Comparând acum cantitățile Alinei și ale lui Andrei, observăm că și Andrei a mâncat mai mult decât Alina, deoarece o felie din 3 este mai mare decât o felie din 6.

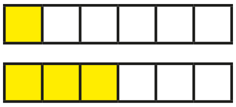
Reține!

- Dintre două fracții care au același numitor este mai mare fracția cu numărătorul mai mare.

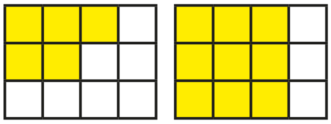
1. Dacă $a < b$, atunci $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ (m nenul).

2. Dacă $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$, atunci $a < b$ (m nenul).

Exemple: $\frac{1}{6} < \frac{3}{6}$;



$\frac{5}{12} < \frac{9}{12}$.

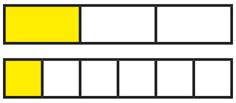


- Dintre două fracții cu același numărător este mai mare fracția cu numitorul mai mic.

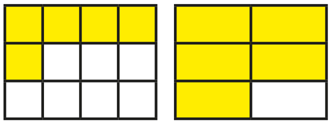
1. Dacă $m < n$, atunci $\frac{a}{m} > \frac{a}{n}$ (m, n nenule).

2. Dacă $\frac{a}{m} < \frac{a}{n}$, atunci $m > n$ (m, n nenule).

Exemple: $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$;



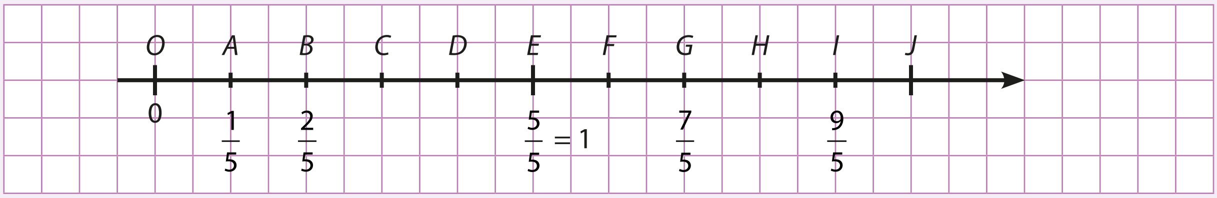
$\frac{5}{12} < \frac{5}{6}$.



IV.3. REPREZENTAREA PE AXA NUMERELOR A UNEI FRACȚII ORDINARE

Descoperă

Observă desenul și răspunde la întrebările de mai jos.



- Ce fracție corespunde punctului *B*? Dar punctului *D*?
- Ce reprezintă punctul notat cu *O*?
- Cu ce litere s-au notat punctele corespunzătoare fracțiilor $\frac{1}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$ și $\frac{10}{5}$?

Răspuns:

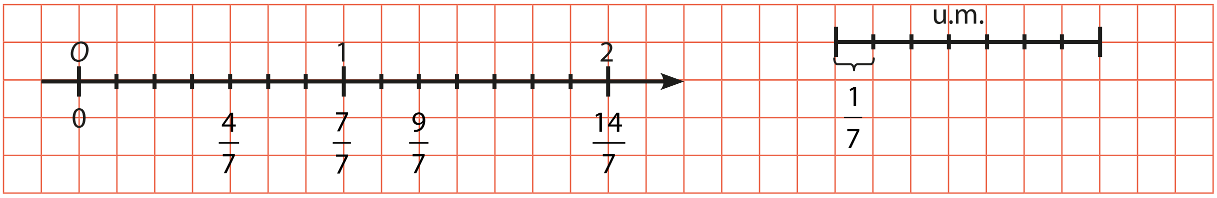
Ne amintim că axa numerelor este o dreaptă pe care se fixează: un punct numit *origine*, *un sens de parcurgere* de la stânga la dreapta, indicat de o săgeată (numit sens pozitiv), și o *unitate de măsură* indicată de un segment. De asemenea, știm că fiecărui număr natural îi corespunde, pe axa numerelor, un punct . Numărul respectiv se numește *coordonata punctului*, originea având coordonata 0 (zero).

Deducem că punctul *O* din desen reprezintă *originea* axei și are coordonata 0, punctului *B* îi corespunde fracția $\frac{2}{5}$, iar punctului *D* îi corespunde fracția $\frac{4}{5}$. Punctele corespunzătoare fracțiilor $\frac{1}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$ și $\frac{10}{5}$ sunt, în ordine: *A*, *F*, *I* și *J* .

Reține!

- Fiecărei fracții ordinare îi corespunde un punct pe axa numerelor.
- **Pentru a reprezenta o fracție pe axa numerelor**, împărțim unitatea de măsură în atâtea părți egale câte arată numitorul și considerăm, începând din origine, atâtea părți câte arată numărătorul.
- Dintre două fracții reprezentate pe axa numerelor este mai mare fracția reprezentată de punctul din dreapta.

Exemplu: Pentru a reprezenta pe axa numerelor fracțiile $\frac{4}{7}$ și $\frac{9}{7}$, împărțim unitatea de măsură în 7 părți de aceeași mărime și numărăm, începând din origine, 4 părți, respectiv 9 părți.



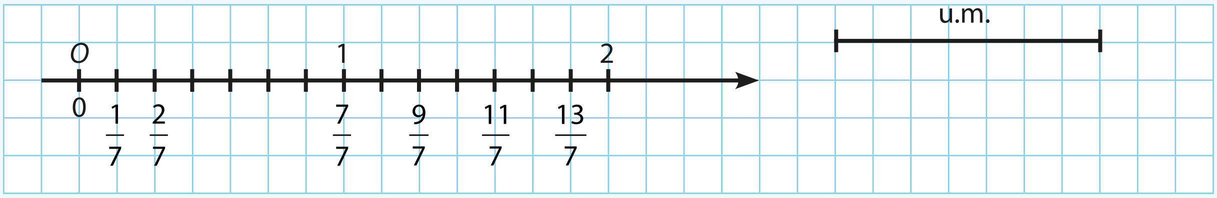
Exersează

1. Determină numerele naturale n pentru care $\frac{n+2}{6} < \frac{5}{6}$.

Rezolvare: Cum $\frac{n+2}{6} < \frac{5}{6}$ înseamnă că $n + 2 < 5$, de unde $n < 3$. Deci n poate fi 0, 1 sau 2.

2. Reprezintă pe axa numerelor trei fracţii supraunitare diferite, de forma $\frac{2x+5}{7}$, unde x este un număr natural.

Rezolvare: Fracţia $\frac{2x+5}{7}$ este supraunitară dacă $2x + 5 > 7$; $2x > 2$; deci $x > 1$. Pentru $x = 2$ obţinem fracţia supraunitară $\frac{9}{7}$. Pentru $x = 3$ obţinem fracţia supraunitară $\frac{11}{7}$. Pentru $x = 4$ obţinem fracţia supraunitară $\frac{13}{7}$.



3. Scrie toate fracţiile de forma $\frac{17}{2n+7}$, unde n este număr natural, ştiind că $\frac{17}{2n+7} > \frac{17}{11}$.

Rezolvare: Cum $\frac{17}{2n+7} > \frac{17}{11}$ rezultă că $2n + 7 < 11$, adică $2n < 4$ sau $n < 2$. Deci n poate fi 0 sau 1.

Pentru $n = 0$ obţinem fracţia $\frac{17}{2 \cdot 0+7} = \frac{17}{7}$. Pentru $n = 1$ obţinem fracţia $\frac{17}{2 \cdot 1+7} = \frac{17}{9}$.

Rezolvă

1. Scrie în ordine crescătoare fracţiile:

a) $\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}, \frac{16}{5}, \frac{1}{5}$; **b)** $\frac{7}{12}, \frac{7}{9}, \frac{7}{14}, \frac{7}{2}, \frac{7}{8}$; **c)** $\frac{10}{93}, \frac{6}{93}, \frac{99}{93}, \frac{37}{93}, \frac{58}{93}, \frac{93}{93}$.

2. Scrie în ordine descrescătoare fracţiile:

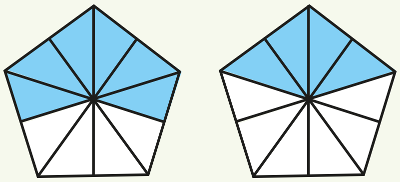
a) $\frac{9}{14}, \frac{9}{2}, \frac{9}{100}, \frac{9}{25}, \frac{9}{43}$; **b)** $\frac{7}{11}, \frac{9}{11}, \frac{23}{11}, \frac{2}{11}, \frac{13}{11}, \frac{8}{11}$; **c)** $\frac{23}{15}, \frac{23}{105}, \frac{23}{25}, \frac{23}{23}, \frac{23}{83}, \frac{23}{12}$.

3. Compară fracţiile:

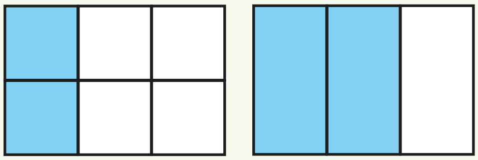
a) 1 cu $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{4}{5}$ cu $\frac{7}{5}$; **c)** $\frac{29}{33}$ cu $\frac{23}{33}$; **d)** $\frac{83}{94}$ cu $\frac{15}{94}$;

e) $\frac{3}{4}$ cu $\frac{3}{8}$; **f)** $\frac{54}{13}$ cu $\frac{54}{15}$; **g)** $\frac{100}{106}$ cu $\frac{100}{103}$; **h)** $\frac{13}{27}$ cu $\frac{13}{47}$.

4. Scrie fracțiile ordinare corespunzătoare părților colorate din fiecare întreg și apoi compară-le.



— ☐ —



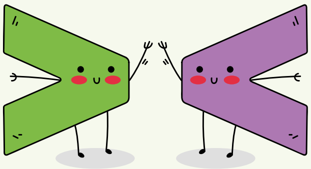
— ☐ —

5. Determină numărul natural *x*, astfel încât:

a) $\frac{2}{x} < \frac{2}{5}$; b) $\frac{x}{9} \le \frac{7}{9}$; c) $\frac{6}{x} > \frac{6}{7}$;

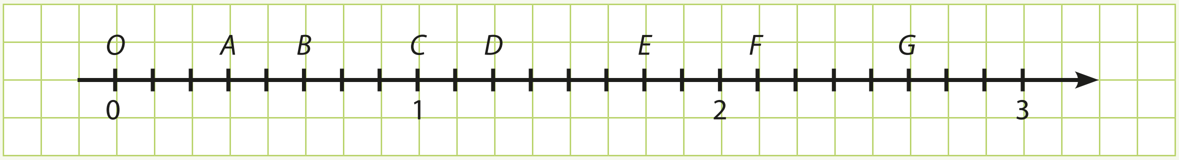
d) $\frac{3}{7} \ge \frac{3}{x}$; e) $\frac{10}{4} > \frac{10}{x} \ge \frac{10}{8}$; f) $\frac{3}{13} < \frac{x}{13} < \frac{7}{13}$.

6. Reprezintă pe axa numerelor fracțiile: $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{14}{7}$ și $\frac{18}{7}$.



7. Scrie coordonata fiecărui punct reprezentat pe axa de mai jos.

Model: $A\left(\frac{3}{8}\right)$.



8. Reprezintă pe axa numerelor fracțiile subunitare de forma $\frac{3x+2}{11}$, unde *x* este un număr natural.

9. Determină numerele naturale *x* și *y*, știind că fracțiile $\frac{2}{13}$, $\frac{x+1}{13}$, $\frac{y-1}{13}$, $\frac{2x+y}{13}$, $\frac{11}{13}$ sunt ordonate crescător.

10. Care este cea mai mică fracție care are numărătorul egal cu cel mai mic număr natural de patru cifre, divizibil cu 7, iar numitorul un număr impar de două cifre?

Evaluează-te

1. Reprezintă prin desen fracțiile ordinare: $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{3}{5}$. **3 puncte**

2. Care număr este mai mic? Justifică răspunsul.

a) $\frac{5}{8}$ sau $\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{17}$ sau $\frac{5}{13}$; c) $\frac{103}{102}$ sau $\frac{101}{102}$. **3 puncte**

3. Care este cea mai mare fracție care are numitorul egal cu cel mai mic număr natural de trei cifre, divizibil cu 3, iar numărătorul un număr prim de două cifre? **3 puncte**

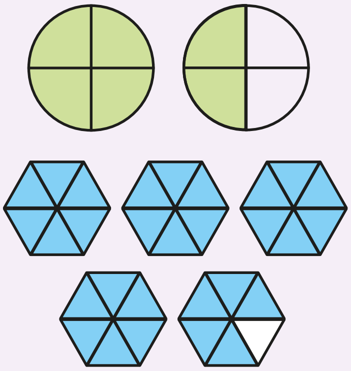
Din oficiu: 1 punct

Cel ce știe să fie atent, știe să reţină.

Samuel Johnson (18 septembrie 1709 – 13 decembrie 1784) a fost unul dintre principalii autori ai literaturii engleze din secolul XVIII: poet, eseist, bibliograf, lexicograf și de asemenea unul dintre cei mai fini critici ai acestei literaturi.

IV.4. INTRODUCEREA ȘI SCOATEREA ÎNTREGILOR DINTR-O FRACŢIE

Descoperă



- Privește următoarele desene.
- În prima imagine, partea colorată reprezentată de un întreg și $\frac{2}{4}$ poate fi descrisă și prin fracţia $\frac{6}{4}$. Numărătorul acestei fracţii este 6, care se obţine din 1 · 4 + 2. Pentru a nota numărul alcătuit dintr-un întreg și două pătrimi, utilizăm scrierea $1\frac{2}{4}$. Așadar, $1\frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 2}{4} = \frac{6}{4}$.
- În a doua imagine, partea colorată este reprezentată de 4 întregi și $\frac{5}{6}$ sau, echivalent, prin fracţia $\frac{29}{6}$. Așadar, $4\frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{29}{6}$.

Reţine!

- O fracţie de tipul $a\frac{b}{n}$, unde a, b, n sunt numere naturale cu $a \neq 0$ și $n \neq 0$, se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m = a \cdot n + b$. Spunem că **am introdus întregii în fracţie** și scriem $a\frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + b}{n}$.

Exemple: $7\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{23}{3}$; $10\frac{1}{7} = \frac{10 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{71}{7}$; $34\frac{2}{13} = \frac{34 \cdot 13 + 2}{13} = \frac{444}{13}$.

Descoperă

Un set de pixuri conţine 7 bucăţi. George și Alina calculează, utilizând fracţii, câte seturi se pot completa folosind 30 de pixuri.

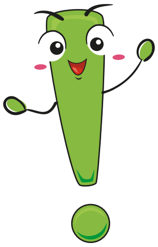
- Alina spune că fiecare pix reprezintă $\frac{1}{7}$ din set și astfel, cu 30 de pixuri se pot umple $\frac{30}{7}$ seturi.
- George, afirmă că, împărţind pe 30 la 7, obţinem câtul 4 și restul 2. Prin urmare, cu 30 de pixuri putem completa 4 seturi, deci avem patru întregi, iar în cel de-al cincilea putem pune doar două pixuri, adică $\frac{2}{7}$ dintr-un set. Răspunsul său este $4\frac{2}{7}$ seturi.

Ambele răspunsuri sunt corecte, așadar $\frac{30}{7} = \frac{4 \cdot 7 + 2}{7} = 4\frac{2}{7}$.

Reține!

- O fracție supraunitară de forma $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt numere naturale, $n \neq 0$, se poate scrie sub forma $c\frac{r}{n}$, unde c reprezintă câtul și r restul împărțirii lui m la n. Spunem că **am scos întregii din fracție** și scriem $\frac{m}{n} = c\frac{r}{n}$.

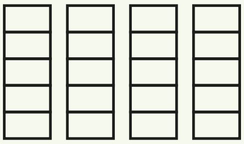
Exemplu: Pentru a scoate întregii din fracția $\frac{55}{4}$ efectuăm împărțirea lui 55 la 4; obținem câtul 13 și restul 3, deci $\frac{55}{4} = 13\frac{3}{4}$.



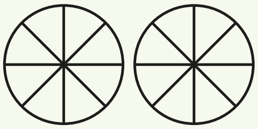
Rezolvă

1. Reprezintă în desene fracțiile următoare:

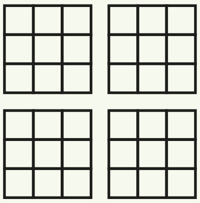
a) $3\frac{3}{5}$;



b) $1\frac{7}{8}$;



c) $3\frac{4}{9}$.



2. Introdu întregii în fracțiile:

a) $2\frac{1}{3}$; **b)** $3\frac{7}{10}$; **c)** $11\frac{3}{7}$; **d)** $12\frac{10}{12}$; **e)** $107\frac{7}{10}$; **f)** $304\frac{45}{77}$; **g)** $2132\frac{5}{8}$; **h)** $87\frac{4}{21}$.

3. Scoate întregii din fracțiile:

a) $\frac{19}{3}$; **b)** $\frac{7}{6}$; **c)** $\frac{72}{17}$; **d)** $\frac{103}{21}$; **e)** $\frac{503}{103}$; **f)** $\frac{1002}{43}$; **g)** $\frac{14}{3}$; **h)** $\frac{92}{5}$.

4. Asociază fiecare fracție din coloana **A** cu fracția echivalentă din coloana **B**.

A	**B**
$3\frac{1}{4}$;	$\frac{103}{9}$;
$\frac{19}{4}$;	$5\frac{2}{5}$;
$\frac{27}{5}$;	$\frac{13}{4}$;
$11\frac{4}{9}$;	$4\frac{3}{4}$;
$\frac{37}{7}$.	$5\frac{2}{7}$;
	$5\frac{3}{5}$.

5. Determină între ce numere naturale consecutive se află fracțiile:

a) $\frac{15}{6}$; **b)** $\frac{18}{7}$; **c)** $\frac{195}{14}$; **d)** $\frac{823}{100}$.

Model: a) $\frac{15}{6} = 2\frac{3}{6}$ (am scos întregii din fracție).

Ca urmare, fracția $\frac{15}{6}$ se află între numerele 2 și 3.

Putem scrie $2 < \frac{15}{6} < 3$ sau $2 < 2\frac{3}{6} < 3$.

6. Determină numărul natural x pentru care următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $x\frac{5}{6} = \frac{29}{6}$; **b)** $x\frac{12}{13} = \frac{129}{13}$;

c) $\frac{193}{14} = 13\frac{x}{14}$; **d)** $\frac{823}{113} = 7\frac{x}{113}$.

IV.5. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN A DOUĂ NUMERE NATURALE. AMPLIFICAREA ŞI SIMPLIFICAREA FRACŢIILOR. FRACŢII IREDUCTIBILE

IV.5.1. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale

Descoperă

Andrei are 18 caiete şi 24 de creioane pe care trebuie să le împartă unor colegi. Care este numărul maxim de colegi cărora le poate împărţi rechizitele, astfel încât fiecare copil să primească acelaşi număr de caiete şi acelaşi număr de creioane? În acest caz, câte caiete şi câte creioane primeşte fiecare?

Răspuns: Numărul de colegi cărora li se pot împărţi caietele şi creioanele este un divizor comun al numerelor 18 şi 24. Divizorii lui 18 sunt 1, 2, 3, 6, 9, 18, iar divizorii lui 24 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Divizorii comuni sunt 1, 2, 3 şi 6, iar cel mai mare dintre aceştia este 6. Deci numărul colegilor este 6.

Se observă că orice alt divizor comun al numerelor 18 şi 24 este divizor al lui 6.

Fiecare coleg va primi 18 : 6 = 3 caiete şi 24 : 6 = 4 creioane.

Reţine!

- Numărul natural d, $d \neq 0$, este **cel mai mare divizor comun** al numerelor naturale nenule a şi b, dacă $d \mid a$, $d \mid b$ şi d se divide cu orice divizor comun al numerelor a şi b.
- Notăm $d = (a, b)$ sau $d = \text{c.m.m.d.c.}(a, b)$.
- Pentru a afla cel mai mare divizor comun a două numere naturale nenule a şi b se procedează astfel:

1) se scriu divizorii fiecărui număr natural a şi b;
2) se aleg divizorii comuni ai celor două numere naturale;
3) cel mai mare dintre divizorii găsiţi la punctul 2) este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Exemplu: Divizorii comuni ai numerelor 18 şi 27 sunt 1, 3 şi 9. Cel mai mare divizor comun al numerelor 18 şi 27 este, aşadar, 9.

$\mathcal{D}_{18}$	**1**	2	**3**	6	**9**	18
$\mathcal{D}_{27}$	**1**	3	**9**	27		

- Dacă cel mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale este 1, atunci numerele sunt **prime între ele**.

Exemplu: (3, 7) = 1, deci numerele 3 şi 7 sunt prime între ele.

Rezolvă

1. Determină divizorii numerelor 4 şi 12, apoi alege-i pe cei comuni.

2. Află cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 2 şi 6; **b)** 9 şi 27; **c)** 3, 6 şi 9; **d)** 12, 4 şi 6;
e) 5, 25 şi 110; **f)** 81 şi 27; **g)** 14, 15 şi 7; **h)** 100 şi 25.

3. Se dau numerele 24 şi 30. Care dintre numerele $2, 2^2, 2^3, 3, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ sunt divizori comuni ai celor două numere?

4. Determină perechile de numere naturale a şi b care au suma 49 şi $\text{c.m.m.d.c.}(a, b) = 7$.

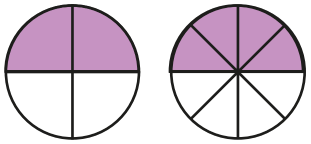
5. Stabileşte dacă următoarele numere sunt prime între ele:

a) 5 şi 9; **b)** 15 şi 25; **c)** 24 şi 25; **d)** 14 şi 17.

IV.5.2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

Descoperă

Fie fracția $\frac{2}{4}$. Înmulțind numărătorul și numitorul fracției cu 2, obținem fracția $\frac{4}{8}$ cu care fracția $\frac{2}{4}$ este echivalentă. Spunem că fracția $\frac{4}{8}$ a fost obținută din fracția $\frac{2}{4}$ prin amplificare cu 2.



$$\frac{2}{4} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{4}{8}$$

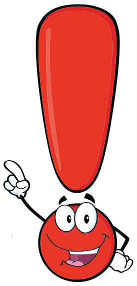
Reține!

- **A amplifica o fracție** cu un număr natural nenul înseamnă a înmulți atât numărătorul, cât și numitorul fracției, cu acel număr.

Notăm: $^{n)}\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, unde a, b, n sunt numere naturale, $b \neq 0$ și $n \neq 0$.

- Prin amplificare se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.

Exemple: $^{3)}\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$; $^{4)}\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{20}{16}$.



Rezolvă

1. Amplifică cu 2 fracțiile: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{10}{13}, \frac{102}{101}, \frac{81}{83}, \frac{2x}{2y}, \frac{x+3}{y+2}, \frac{a+b+1}{x+y-3}$.

2. **a)** Cu ce număr trebuie amplificată fracția $\frac{1}{3}$ pentru a obține numitorul 9?

b) Cu ce număr trebuie amplificată fracția $\frac{3}{7}$ pentru a obține numărătorul 12?

c) Cu ce număr trebuie amplificată fracția $\frac{4}{5}$ pentru a obține fracția $\frac{20}{25}$?

3. Amplifică fracția $\frac{7}{5}$, astfel încât să obții o fracție echivalentă cu ea, care are numărătorul:

a) 14; **b)** 42; **c)** 175;
d) 672; **e)** 1 806; **f)** 2 247.

4. Asociază fiecare fracție din coloana **A** cu fracția echivalentă din coloana **B**.

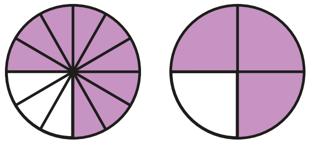
A	B
$\frac{6}{7}$;	$\frac{27}{63}$;
$\frac{9}{21}$;	$\frac{45}{114}$;
$\frac{14}{43}$;	$\frac{18}{21}$;
$\frac{15}{38}$.	$\frac{6}{15}$;
	$\frac{42}{129}$.

5. **Activitate în perechi.** Completați tabelul:

$^{n)}\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$	$^{n)}\frac{5}{9}=\frac{30}{54}$	$^{n)}\frac{8}{9}=\frac{72}{81}$	$^{n)}\frac{13}{14}=\frac{143}{154}$	$^{n)}\frac{15}{23}=\frac{75}{115}$	$^{n)}\frac{12}{7}=\frac{84}{49}$
$n=$	$n=$	$n=$	$n=$	$n=$	$n=$

Descoperă

Fie fracţia $\frac{9}{12}$. Împărţind numărătorul şi numitorul fracţiei la 3, obţinem fracţia $\frac{3}{4}$ cu care fracţia $\frac{9}{12}$ este echivalentă. Spunem că fracţia $\frac{3}{4}$ a fost obţinută din fracţia $\frac{9}{12}$ prin simplificare cu 3. Se constată că 3 este divizor comun al numerelor 9 şi 12, deoarece 9 = = 3 · 3 şi 12 = 4 · 3.



$$\frac{9}{12}\overset{:3}{\underset{:3}{=}}\frac{3}{4}$$

Reţine!

- **A simplifica o fracţie** $\frac{a}{b}$ cu un număr natural nenul n înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul fracţiei la n. Numărul natural nenul n prin care se simplifică este divizor comun al numărătorului şi numitorului fracţiei date. Notăm: $\frac{a^{(n}}{b}=\frac{a:n}{b:n}$, unde a, b, n sunt numere naturale, $b \neq 0$ şi $n \neq 0$.
- Prin simplificare se obţine o fracţie echivalentă cu fracţia dată. ***Exemple:*** $\frac{15^{(3}}{9}=\frac{5}{3}$; $\frac{25^{(5}}{20}=\frac{5}{4}$.

Rezolvă

1. Simplifică prin 5 următoarele fracţii: $\frac{10}{15}$, $\frac{15}{45}$, $\frac{5a}{10b}$, $\frac{55}{75}$, $\frac{125}{100}$, $\frac{10x+10y}{15a+15b}$, $\frac{3^2\cdot 5}{2\cdot 5}$.

2. Simplifică fracţiile:

a) $\frac{2+6}{2}$; **b)** $\frac{15}{3+12}$; **c)** $\frac{1+2+3+4}{2+4+6+8}$; **d)** $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$; **e)** $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}$; **f)** $\frac{20+10+50}{160}$.

3. Uneşte prin săgeţi fiecare fracţie din coloana **A** cu fiecare fracţie din coloana **B** obţinută prin simplificare.

A	B
$\frac{4}{10}$;	$\frac{1}{9}$;
$\frac{12}{16}$;	$\frac{3}{4}$;
$\frac{3}{27}$.	$\frac{1}{2}$;
	$\frac{2}{5}$.

4. Indică divizorii comuni cu care se poate simplifica fracţia:

a) $\frac{18}{24}$; **b)** $\frac{18}{36}$; **c)** $\frac{80}{40}$; **d)** $\frac{12}{90}$;

e) $\frac{12}{19}$; **f)** $\frac{7\cdot 2^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}$; **g)** $\frac{9\cdot 11\cdot 3^2}{9^2\cdot 3^2\cdot 2^4}$.

5. Folosind simplificarea, scrie toate fracţiile echivalente cu:

a) $\frac{20}{10}$; **b)** $\frac{48}{36}$; **c)** $\frac{26}{143}$; **d)** $\frac{150}{36}$;

e) $\frac{24}{16}$; **f)** $\frac{56}{42}$; **g)** $\frac{72}{120}$; **h)** $\frac{84}{210}$.

6. **Activitate în perechi.** Completaţi tabelul:

$\frac{27^{(n}}{18}=\frac{3}{2}$	$\frac{15^{(n}}{51}=\frac{5}{17}$	$\frac{35^{(n}}{105}=\frac{7}{21}$	$\frac{22^{(n}}{121}=\frac{2}{11}$	$\frac{24^{(n}}{36}=\frac{4}{6}$	$\frac{88^{(n}}{96}=\frac{11}{12}$
$n =$	$n =$	$n =$	$n =$	$n =$	$n =$

Reține!

- O fracție care nu se mai poate simplifica prin niciun număr natural se numește **fracție ireductibilă**.
- O fracție se numește **reductibilă** dacă se poate simplifica.
- O fracție este **ireductibilă** dacă cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului este egal cu 1 (dacă numărătorul și numitorul sunt prime între ele).

Exemple: Fracțiile $\frac{2}{5}, \frac{7}{3}, \frac{19}{12}, \frac{50}{27}, \frac{53}{100}, \frac{203}{15}$ sunt ireductibile.

Fracțiile $\frac{3}{9}$ și $\frac{18}{24}$ sunt reductibile, deoarece se pot simplifica prin 3.

Observații:

- Pentru a obține o fracție ireductibilă este *recomandabil* să simplificăm fracția prin cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.
- Pentru a obține o fracție ireductibilă, putem simplifica fracția, succesiv, prin divizori comuni ai numărătorului și numitorului, până când fracția nu se mai poate simplifica. Această metodă este foarte utilă atunci când numărătorul și numitorul au valori mari.

Exemplu: $\frac{120}{180}^{(2} = \frac{60}{90}^{(5} = \frac{12}{18}^{(3} = \frac{4}{6}^{(2} = \frac{2}{3}$ → fracție ireductibilă.

Exersează

1. Determină numărul natural x cu care trebuie amplificată fracția $\frac{6}{7}$ pentru a obține:

a) o fracție cu numărătorul 54; **b)** o fracție cu numitorul 35.

Rezolvare:

a) $6 \cdot x = 54$, deci $x = 54 : 6 = 9$; **b)** $7 \cdot x = 35$, deci $x = 35 : 7 = 5$.

2. Simplifică fracțiile următoare, obținând fracții ireductibile:

a) $\frac{315}{420}$; **b)** $\frac{5^{24}}{25^{14}}$.

Rezolvare:

a) $\frac{315}{420}^{(5} = \frac{63}{84}^{(3} = \frac{21}{28}^{(7} = \frac{3}{4}$; **b)** $\frac{5^{24}}{25^{14}} = \frac{5^{24}}{(5^2)^{14}} = \frac{5^{24}}{5^{28}}^{(5^{24}} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$.

3. Determină cifra x pentru care:

a) fracția $\frac{\overline{3x}}{25}$ este reductibilă; **b)** fracția $\frac{21}{\overline{5x}}$ este ireductibilă.

Rezolvare:

a) Divizorii lui 25 sunt 1, 5 și 25. Fracția $\frac{\overline{3x}}{25}$ este reductibilă dacă $\overline{3x}$ și 25 au divizori comuni diferiți de 1. Cum $\overline{3x}$ nu se divide cu 25 pentru nicio valoare a lui x, rămâne să găsim valorile lui x pentru care $\overline{3x} \vdots 5$. Obținem $x = 0$ și $x = 5$.

b) Căutăm valorile cifrei x pentru care fracția $\frac{21}{\overline{5x}}$ este reductibilă. Divizorii lui 21 sunt 1, 3, 7 și 21. $\overline{5x} \not\vdots\ 21$ pentru nicio valoare a lui x; $\overline{5x} \vdots 3$ pentru valorile 1, 4, 7 și $\overline{5x} \vdots 7$ pentru $x = 6$. Dacă x ia valorile 1, 4, 6, 7, fracția este reductibilă. Deci, fracția este ireductibilă dacă x este 0, 2, 3, 5, 8 sau 9.

Rezolvă

1. Încercuieşte răspunsul corect. Cel mai mare divizor comun al numerelor 15, 24, 27 şi 36 este:
A. 2; **B.** 3; **C.** 6; **D.** 9.

2. Amplifică următoarele fracţii cu 7:
a) $\frac{5}{8}$; **b)** $\frac{16}{11}$; **c)** $\frac{17}{9}$; **d)** $\frac{4}{13}$; **e)** $\frac{100}{125}$; **f)** $\frac{307}{673}$; **g)** $\frac{1212}{724}$.

3. Simplifică fracţiile următoare şi scrie rezultatele sub formă de fracţii ireductibile:
a) $\frac{18}{24}, \frac{15}{25}, \frac{18}{81}, \frac{35}{40}, \frac{49}{56}, \frac{70}{91}$; **b)** $\frac{90}{120}, \frac{84}{144}, \frac{111}{259}, \frac{186}{217}, \frac{1092}{1638}$.

4. Simplifică fracţiile: **a)** $\frac{476476}{971971}$; **b)** $\frac{\overline{ab0ab}}{16016}$; **c)** $\frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{6a+6b+6c}$.

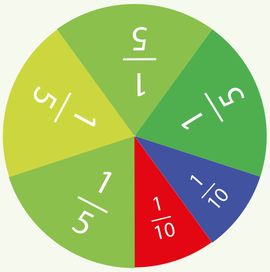
5. Determină numerele naturale *x* şi *y*, astfel încât următoarele egalităţi să fie adevărate:
a) $\frac{6}{8}=\frac{3}{y}$; **b)** $\frac{x+1}{15}=\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{x-2}{9}=\frac{4}{12}$.

6. Simplifică fracţiile: **a)** $\frac{4+8+12+...+204}{3+6+9+...+153}$; **b)** $\frac{11111+22222-33333+44444}{55555}$.

7. Scrie toate fracţiile de forma: **a)** $\frac{\overline{aa}}{\overline{bb}}=\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{\overline{xxx}}{\overline{yyy}}=\frac{2}{3}$.

8. Determină toate fracţiile de forma $\frac{\overline{1x7}}{\overline{yx}}$ care se simplifică prin 3.

9. Scrie toate fracţiile de forma $\frac{\overline{2x}}{72}$ care se pot simplifica prin:
a) 2; **b)** 3; **c)** 9; **d)** 6.



10. Determină numărul natural *x*, astfel încât fracţia să fie supraunitară şi ireductibilă:
a) $\frac{7}{x}$; **b)** $\frac{5}{x-1}$; **c)** $\frac{6}{x-3}$; **d)** $\frac{30}{x+5}$; **e)** $\frac{12}{x+3}$.

Model: **c)** $\frac{6}{x-3}$ este supraunitară pentru $6 > x - 3 \Rightarrow x < 6 + 3 \Rightarrow x < 9$, adică *x* poate lua valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sau 8, valori pentru care se verifică dacă fracţia este sau nu ireductibilă. Obţinem $x = 8$ pentru care fracţia $\frac{6}{8-3}=\frac{6}{5}$ este ireductibilă.

Evaluează-te

1. Amplifică fracţiile $\frac{3}{5}, \frac{13}{20}$ şi $\frac{7}{25}$ pentru a obţine numitorii 100. **3 puncte**

2. Simplifică fracţiile $\frac{64}{24}$ şi $\frac{125}{75}$ pentru a obţine fracţii ireductibile. **3 puncte**

3. Simplifică fracţia $\frac{19^n+19^{n+1}}{4^n+4^{n+1}}$, unde *n* este număr natural nenul. Este fracţia obţinută ireductibilă?
3 puncte
Din oficiu: 1 punct

Dacă doriți să aveți succes, trebuie să vă purtați ca și cum l-ați avea.

Thomas More (7 februarie 1478 – 6 iulie 1535) a fost avocat, scriitor și om de stat englez, personalitate reprezentativă a umanismului din Europa.

IV.6. CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN A DOUĂ NUMERE NATURALE. ADUCEREA FRACȚIILOR LA UN NUMITOR COMUN

IV.6.1. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale

Descoperă

Care este cel mai mic număr de cărți care se pot așeza în teancuri de câte 6 cărți, 8 cărți și 12 cărți?

Răspuns: Numărul total de cărți trebuie să fie un multiplu comun al numerelor 6, 8 și 12, adică 24, 48 etc.

$\mathcal{M}_6$	0	6	12	**24**	30	36	42	**48**	54	...
$\mathcal{M}_8$	0	8	16	**24**	32	40	**48**	56	64	...
$\mathcal{M}_{12}$	0	12	**24**	36	**48**	60	72	84	96	...

Se observă că cel mai mic multiplu comun al acestor numere este 24, deci cel mai mic număr de cărți ce pot fi așezate în teancuri de câte 6 cărți, 8 cărți și 12 cărți este 24.

Reține!

- Numărul natural m, $m \neq 0$, este **cel mai mic multiplu comun** al numerelor naturale nenule a și b dacă m se divide cu a, m se divide cu b și orice multiplu comun al numerelor naturale a și b se divide cu m. Notăm $m = [a, b]$ sau $m =$ c.m.m.m.c.(a, b).
- Pentru a afla cel mai mic multiplu comun a două numere naturale nenule a și b se procedează astfel:

1) se scriu multiplii fiecărui număr natural a și b;
2) se aleg multiplii comuni ai celor două numere naturale;
3) cel mai mic dintre multiplii găsiți la punctul 2), diferit de zero, este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Exemplu: Multiplii comuni ai numerelor 12 și 18 sunt 0, 36, 72, 108 etc., iar cel mai mic multiplu comun al lor, diferit de 0, este 36.

$\mathcal{M}_{12}$	0	12	24	**36**	48	60	**72**	84	96	**108**	120	...
$\mathcal{M}_{18}$	0	18	**36**	54	**72**	90	**108**	126	144	162	180	...

Proprietăți:

1. Dacă a și b sunt două numere naturale astfel încât $a \mid b$, iar $a \neq 0$, atunci $[a, b] = b$.
2. Dacă numerele naturale a și b sunt prime între ele, atunci $[a, b] = a \cdot b$.
3. Dacă $d = (a, b)$, iar $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, atunci $[a, b] = d \cdot x \cdot y$.
4. Produsul dintre cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun a două numere naturale este egal cu produsul celor două numere: $\mathbf{(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b}$.
5. Prin cel mai mic multiplu comun a trei sau mai multor numere naturale nenule se înțelege cel mai mic număr natural nenul care se divide cu toate numerele date.

Exersează

1. Determină în două moduri cel mai mic multiplu comun al numerelor 10 şi 15.

Rezolvare:

Modul 1: Scriem multiplii fiecărui număr şi dintre cei comuni îl alegem pe cel mai mic. Observăm că cel mai mic multiplu comun al numerelor 10 şi 15 este 30.

$\mathcal{M}_{10}$	0	10	20	**30**	40	50	**60**	70	80	**90**	100	...
$\mathcal{M}_{15}$	0	15	**30**	45	**60**	75	**90**	105	120	135	150	...

Modul 2: Găsim cel mai mare divizor comun al numerelor 10 şi 15. Folosim apoi relaţia $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

$\mathcal{D}_{10}$	1	2	**5**	10
$\mathcal{D}_{15}$	1	3	**5**	15

Din tabel deducem că $(10, 15) = 5$.
$(10, 15) \cdot [10, 15] = 10 \cdot 15$;
$5 \cdot [10, 15] = 150 \Rightarrow [10, 15] = 150 : 5 \Rightarrow [10, 15] = 30$.

2. Determină cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 7 şi 14.

Rezolvare: Scriem multiplii fiecărui număr şi dintre cei comuni îl alegem pe cel mai mic. Observăm că cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 7 şi 14 este 28.

$\mathcal{M}_4$	0	4	8	12	16	20	24	**28**	32	36	40	...
$\mathcal{M}_7$	0	7	14	21	**28**	35	42	49	56	63	70	...
$\mathcal{M}_{14}$	0	14	**28**	42	56	70	84	98	112	126	140	...

3. Determină numerele de trei cifre care împărţite la 15, la 18 şi la 24 dau de fiecare dată restul egal cu 3.

Rezolvare: Notăm cu n numărul căutat; $n = 15 \cdot c_1 + 3$, $n = 18 \cdot c_2 + 3$, $n = 24 \cdot c_3 + 3$, deci $n - 3$ este multiplu comun al numerelor 15, 18 şi 24. Multiplii comuni de trei cifre ai numerelor 15, 18 şi 24 sunt 360 şi 720 $\Rightarrow n = 363$ sau $n = 723$.

Rezolvă

1. Scrie primii 6 multipli comuni ai numerelor 2 şi 3.

2. Scrie multiplii comuni ai numerelor 3 şi 6 cuprinşi între 10 şi 30.

3. Calculează:

a) [3, 4]; **b)** [2, 4, 8]; **c)** [10, 15, 30]; **d)** [2, 3, 4]; **e)** [4, 8, 16]; **f)** [7, 9];
g) [4, 6, 12]; **h)** [90, 100]; **i)** [20, 40, 50]; **j)** [12, 15]; **k)** [60, 80]; **l)** [15, 18].

4. **Activitate în perechi.** Completaţi tabelul:

Numerele	6, 9, 18 şi 27	4, 7, 14 şi 21	18, 24 şi 36	12, 21 şi 28
Cel mai mic multiplu comun diferit de 0				

5. Determină cel mai mic număr de prăjituri care pot fi aşezate pe platouri şi câte 6, şi câte 8 şi câte 9.

IV.6.2. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

Descoperă

Știm că pentru a putea compara două fracții, acestea trebuie să aibă fie același numărător, fie același numitor. Cum comparăm, însă, două fracții care nu au nici același numărător, nici același numitor?

Spre exemplu, fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{6}$?

Răspuns: Știm că prin amplificarea unei fracții obținem fracții echivalente cu cea dată. Observăm că amplificând prima fracție cu 3 și pe a doua cu 2 obținem două fracții cu același numitor, 12, echivalente cu cele date, pe care le putem compara ușor.

$$\left.\begin{aligned} {}^{3)}\frac{3}{4} &= \frac{9}{12} \\ {}^{2)}\frac{5}{6} &= \frac{10}{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$$

Reține!

- Prin aducerea la același numitor (sau aducerea la un numitor comun) a două sau mai multor fracții se înțelege procedeul prin care se obțin fracții cu numitori egali, echivalente cu cele inițiale.
- Pentru a aduce două sau mai multe fracții la un numitor comun, se procedează astfel:

1. se simplifică fiecare fracție până devine ireductibilă;
2. se calculează cel mai mic multiplu comun al numitorilor;
3. se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor și numitorul fracției respective.

Exersează

1. Adu la același numitor fracțiile $\frac{24}{32}, \frac{5}{30}$.

Rezolvare:

Pasul 1. Simplificăm fracțiile date până devin ireductibile: $\frac{24}{32}^{(2} = \frac{12}{16}^{(2} = \frac{6}{8}^{(2} = \frac{3}{4}$ și $\frac{5}{30}^{(5} = \frac{1}{6}$.

Pasul 2. Găsim cel mai mic multiplu comun al numitorilor: $[4, 6] = 12$.

Pasul 3. Împărțind pe 12 la 4, obținem 3, adică numărul cu care amplificăm prima fracție: ${}^{3)}\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Împărțind pe 12 la 6, obținem 2, adică numărul cu care amplificăm a doua fracție: ${}^{2)}\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

Am obținut fracțiile $\frac{9}{12}$ și $\frac{2}{12}$, cu același numitor.

2. Scrie în ordine crescătoare fracțiile $\frac{11}{9}, \frac{7}{6}$ și $\frac{5}{4}$.

Rezolvare: Pentru a putea ordona cele trei fracții, trebuie să le aducem la același numitor. Cele trei fracții date sunt ireductibile. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $[4, 6, 9] = 36$, deci vom amplifica prima fracție cu 4, a doua cu 6 și a treia cu 9: ${}^{4)}\frac{11}{9} = \frac{44}{36}$, ${}^{6)}\frac{7}{6} = \frac{42}{36}$ și ${}^{9)}\frac{5}{4} = \frac{45}{36}$. Obținem fracțiile cu același numitor: $\frac{44}{36}, \frac{42}{36}$ și $\frac{45}{36}$. Ordinea crescătoare a fracțiilor din enunț este: $\frac{7}{6}, \frac{11}{9}, \frac{5}{4}$.

Rezolvă

1. Adu fracțiile la același numitor:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$; **b)** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$; **c)** $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$; **d)** $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}$; **e)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$;

f) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$; **g)** $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$; **h)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}$; **i)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8}$; **j)** $\frac{2}{35}, \frac{1}{70}, \frac{3}{140}$.

2. Indică pentru fiecare dintre perechile de fracții următoare cel mai mic multiplu comun al numitorilor și adu fracțiile la un numitor comun:

a) $\frac{7}{2}$ și $\frac{4}{5}$; **b)** $\frac{2}{9}$ și $\frac{7}{4}$; **c)** $\frac{5}{6}$ și $\frac{3}{8}$; **d)** $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{5}$; **e)** $\frac{13}{21}$ și $\frac{5}{63}$.

3. Adu fracțiile următoare la un numitor comun prin simplificare:

a) $\frac{30}{40}, \frac{20}{80}$; **b)** $\frac{24}{32}, \frac{5}{20}$; **c)** $\frac{40}{80}, \frac{90}{60}$; **d)** $\frac{80}{160}, \frac{270}{180}$; **e)** $\frac{12}{60}, \frac{30}{50}, \frac{30}{75}$.

4. Determină numerele naturale *a* și *b*, astfel încât $\frac{3a}{2} < \frac{36}{12}$ și $\frac{1}{5} < \frac{3}{b} < \frac{5}{8}$.

5. Ordonează crescător fracțiile: $\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{6}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{13}{12}, \frac{13}{30}, \frac{17}{60}, \frac{13}{15}$.

6. Ordonează descrescător fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \frac{11}{6}, \frac{13}{2}, \frac{9}{8}, \frac{17}{4}$.

7. Săritura unei girafe este de $1\frac{1}{5}$ metri, a unei zebre de $7\frac{1}{2}$ metri, iar a unei maimuțe de $\frac{18}{25}$ metri. În cadrul unei întreceri de sărituri, pe un traseu de 100 de metri, cine crezi că ar ajunge pe locul doi? Justifică!

8. Alina și George au primit aceeași sumă de bani de la părinții lor, la plecarea în tabără. La întoarcere, Alina a observat că cheltuise $\frac{5}{6}$ din suma primită, iar George, $\frac{4}{7}$ din suma primită. Care dintre copii a cheltuit o sumă mai mare de bani în tabără?

Evaluează-te

1. Determină cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor $\frac{7}{10}, \frac{13}{6}$ și $\frac{8}{15}$, apoi adu-le la același numitor. **3 puncte**

2. Compară fracțiile ordinare: **a)** $\frac{3}{7}$ și $\frac{2}{5}$; **b)** $\frac{10}{17}$ și $\frac{3}{5}$; **c)** $\frac{7}{24}$ și $\frac{11}{36}$. **3 puncte**

3. Determină valorile numărului natural *n*, știind că cel mai mic numitor comun al fracțiilor $\frac{3}{4}$ și $\frac{7}{n+2}$ este 12. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE

TESTUL 1

(1 punct) **1.** Reprezintă prin desen fracțiile ordinare: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ și $\frac{1}{5}$.

(1 punct) **2.** Determină numărul natural *x*, astfel încât fracția:

a) $\frac{6}{x}$ să fie subunitară; **b)** $\frac{x+3}{14}$ să fie echiunitară; **c)** $\frac{5}{2x-1}$ să fie supraunitară.

(1 punct) **3.** Verifică dacă următoarele fracții sunt echivalente: $\frac{2}{9}$ și $\frac{6}{27}$.

(1 punct) **4.** Compară fracțiile: **a)** $\frac{7}{11} \square \frac{7}{9}$; **b)** $\frac{5}{6} \square \frac{17}{6}$; **c)** $\frac{8}{11} \square \frac{13}{9}$.

(1 punct) **5.** Introdu întregii în fracția $11\frac{54}{123}$.

(1 punct) **6.** Scoate întregii din fracția $\frac{432}{17}$.

(1 punct) **7.** Simplifică fracția ordinară $\frac{4500}{8100}$ până obții o fracție ireductibilă.

(1 punct) **8.** Cu ce număr trebuie amplificată fracția $\frac{2}{3}$ pentru a obține fracția $\frac{72}{108}$?

(1 punct) **9.** Determină cifra *x* pentru care fracția $\frac{\overline{x5}}{42}$ este ireductibilă.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 30 de minute.

TESTUL 2

(1 punct) **1.** Reprezintă pe axă fracțiile ordinare: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ și $\frac{5}{12}$.

(1 punct) **2.** Determină numărul natural *x*, astfel încât:

a) $\frac{x}{9}$ să fie subunitară; **b)** $\frac{2x+1}{15}$ să fie echiunitară; **c)** $\frac{7}{3x-2}$ să fie supraunitară.

(1 punct) **3.** Scrie trei fracții echivalente cu fracția $\frac{4}{7}$.

(1 punct) **4.** Compară fracțiile: **a)** $\frac{6}{9} \square \frac{4}{9}$; **b)** $\frac{5}{12} \square \frac{5}{9}$; **c)** $\frac{3}{7} \square \frac{4}{9}$.

(1 punct) **5.** Introdu întregii în fracțiile: **a)** $1\frac{1}{4}$; **b)** $13\frac{5}{11}$; **c)** $2\frac{100}{121}$.

(1 punct) **6.** Determină numărul natural *x* pentru care fracțiile $x\frac{5}{9}$ și $\frac{23}{9}$ sunt echivalente.

(1 punct) **7.** Determină numărul natural *n* care verifică relația: ${}^{n)}\frac{7}{9}=\frac{84}{108}$.

(1 punct) **8.** Cu ce număr trebuie simplificată fracția $\frac{24}{36}$ pentru a obține fracția $\frac{6}{9}$?

(1 punct) **9.** Determină cifra *x* pentru care fracția $\frac{\overline{2x}}{35}$ este ireductibilă.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 30 de minute.

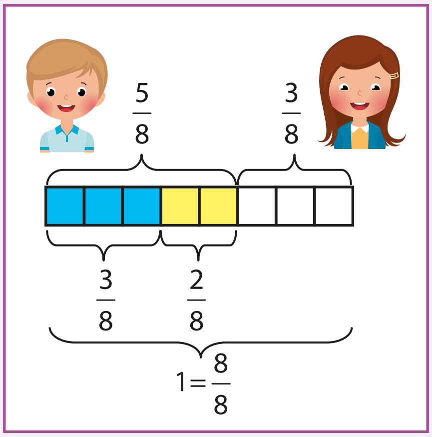
Nimic nu este mai agil ca gândul; el te poartă prin întregul Univers.

Thales din Milet (625 – 540 î.Hr.) a fost un filozof grec, care a contribuit la dezvoltarea matematicii, astronomiei, filozofiei. Este considerat părintele ştiinţelor.

IV.7. ADUNAREA ŞI SCĂDEREA FRACŢIILOR

IV.7.1. Adunarea şi scăderea fracţiilor cu acelaşi numitor

Descoperă



Priveşte desenul alăturat, în care întregul este reprezentat prin opt părţi de aceeaşi mărime. Din cele opt părţi, trei sunt colorate cu albastru, corespunzătoare fracţiei $\frac{3}{8}$, şi două cu galben, corespunzătoare fracţiei $\frac{2}{8}$.

- **George:** părţile colorate cu albastru şi cu galben reprezintă $\frac{5}{8}$ din întreg. Numărătorul 5 se poate obţine prin adunarea numărătorilor celorlalte două fracţii, 3 şi 2. Deci $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$.
- **Alina:** părţile rămase necolorate reprezintă $\frac{3}{8}$ din întreg. Numărătorul 3 se poate obţine prin scăderea numărătorilor fracţiilor $\frac{8}{8}$ şi $\frac{5}{8}$. Deci $\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

Reţine!

- **Suma a două sau mai multor fracţii** cu acelaşi numitor este fracţia care are numitorul egal cu numitorul fracţiilor date, iar numărătorul egal cu suma numărătorilor fracţiilor date:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}, \text{ pentru orice numere naturale } a, b, n, \text{ cu } n \geq 1.$$

- **Diferenţa a două sau mai multor fracţii** cu acelaşi numitor este fracţia care are numitorul egal cu numitorul fracţiilor date, iar numărătorul egal cu diferenţa numărătorilor fracţiilor date:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}, \text{ pentru orice numere naturale } a, b, n, \text{ cu } a \geq b, n \geq 1.$$

Exersează

Efectuează următoarele operaţii de adunare şi scădere cu fracţii cu acelaşi numitor:

a) $\frac{93}{107}+\frac{13}{107}$;

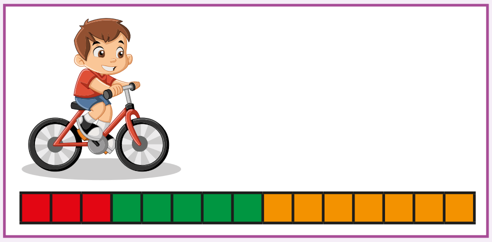
b) $\frac{49}{73}-\frac{11}{73}$.

Rezolvare:

a) $\frac{93}{107}+\frac{13}{107}=\frac{93+13}{107}=\frac{106}{107}$; **b)** $\frac{49}{73}-\frac{11}{73}=\frac{49-11}{73}=\frac{38}{73}$.

IV.7.2. Adunarea și scăderea fracțiilor cu numitori diferiți

Descoperă



Andrei a parcurs cu bicicleta un traseu, în trei zile. În prima zi a parcurs $\frac{1}{5}$ din traseu, în a doua zi $\frac{1}{3}$ din traseu, iar în a treia zi restul.

a) Ce parte din traseu a parcurs Andrei în primele două zile?

b) Ce parte din traseu a parcurs Andrei în a treia zi?

Răspuns: Știind că putem efectua suma sau diferența a două fracții doar dacă acestea au același numitor, vom aduce la un numitor comun fracțiile care reprezintă părțile din traseu parcurse de Andrei în primele două zile. Pentru asta:

- aflăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor celor două fracții: [5, 3] = 15;
- aducem fracțiile la același numitor, prin amplificare, obținând: $^{3)}\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ (traseul parcurs în prima zi, reprezentat cu roșu) și $^{5)}\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ (traseul parcurs a doua zi, reprezentat cu verde);
- întregul traseu poate fi reprezentat prin fracția $\frac{15}{15}$.

a) În primele două zile, Andrei a parcurs: $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{3}{15}+\frac{5}{15}=\frac{8}{15}$ din traseu.

b) În a treia zi, Andrei a parcurs: $\frac{15}{15}-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$ din traseu (reprezentat cu portocaliu).

Reține!

Pentru **a aduna/scădea două fracții cu numitori diferiți**, se aduc mai întâi fracțiile la același numitor și apoi se aplică regula de adunare/scădere a fracțiilor cu același numitor.

Observații:

- Dacă fracțiile care se adună sau se scad nu sunt ireductibile, este preferabil să se simplifice până devin ireductibile și apoi să se aducă la același numitor.
- Rezultatul adunării sau scăderii trebuie, de asemenea, să fie exprimat printr-o fracție ireductibilă.
- Adunarea (scăderea) dintre un număr natural și o fracție ordinară se efectuează scriind numărul natural ca fracție ordinară cu numitor 1 astfel:

$$n+\frac{a}{b}={}^{b)}\frac{n}{1}+\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b}{b}+\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b+a}{b};$$

$$n-\frac{a}{b}={}^{b)}\frac{n}{1}-\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b}{b}-\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b-a}{b}.$$

Proprietățile adunării:

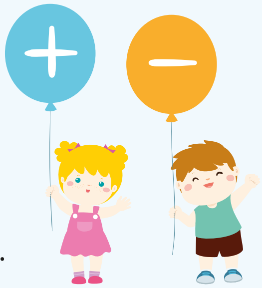
- Adunarea fracțiilor ordinare este **comutativă** (termenii pot fi adunați în orice ordine și rezultatul adunării nu se modifică): $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$.
- Adunarea fracțiilor ordinare este **asociativă** (dacă o adunare are trei sau mai mulți termeni, aceștia pot fi grupați în moduri diferite și rezultatul nu se modifică): $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$.
- **0** este **element neutru** la adunarea fracțiilor ordinare (numărul 0 nu schimbă rezultatul adunării): $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

Foarte important! Proprietățile adunării nu sunt adevărate pentru operația de scădere.

Exersează

1. Efectuează suma și diferența fracțiilor $\frac{11}{10}$ și $\frac{7}{15}$.

Rezolvare: Aflăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor: [10, 15] = 30.



- Amplificăm fracția $\frac{11}{10}$ cu câtul dintre 30 și 10, adică 3, și obținem $^{3)}\frac{11}{10}=\frac{33}{30}$.
- Amplificăm fracția $\frac{7}{15}$ cu câtul dintre 30 și 15, adică 2, și obținem $^{2)}\frac{7}{15}=\frac{14}{30}$.
- Suma fracțiilor astfel obținute este: $^{3)}\frac{11}{10}+{}^{2)}\frac{7}{15}=\frac{33}{30}+\frac{14}{30}=\frac{33+14}{30}=\frac{47}{30}$.
- Diferența fracțiilor astfel obținute este: $^{3)}\frac{11}{10}-{}^{2)}\frac{7}{15}=\frac{33}{30}-\frac{14}{30}=\frac{33-14}{30}=\frac{19}{30}$.

2. Calculează și exprimă rezultatul printr-o fracție ireductibilă: $6\frac{1}{4}+5\frac{2}{3}+1\frac{17}{24}$.

Rezolvare: $6\frac{1}{4}+5\frac{2}{3}+1\frac{17}{24}=\frac{6\cdot4+1}{4}+\frac{5\cdot3+2}{3}+\frac{1\cdot24+17}{24}=\frac{25}{4}+\frac{17}{3}+\frac{41}{24}={}^{6)}\frac{25}{4}+{}^{8)}\frac{17}{3}+\frac{41}{24}=$

$=\frac{150}{24}+\frac{136}{24}+\frac{41}{24}=\frac{150+136+41}{24}=\frac{327^{(3}}{24}=\frac{109}{8}=13\frac{5}{8}$.

Portofoliu

O **fracțiune** (din latinescul *fractus* – „frânt”) reprezintă o parte dintr-un întreg, dintr-un tot.

Abilitatea de a împărți întregul în părți a apărut acum mai mult de un mileniu pe teritoriul vechiului Egipt și Babilon. De-a lungul anilor, operațiile efectuate cu *fracțiuni* au devenit mai complicate, forma scrierii lor s-a schimbat continuu. Fiecare stat din lumea antică avea propriile caracteristici în „relația” cu această secțiune de matematică.

Îmbogățește-ți portofoliul personal, realizând o scurtă istorie a *fracțiunilor* (fracțiilor). Documentează-te din cărți de la bibliotecă, surse online etc.

Rezolvă

1. Calculează și scrie rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{5}{18}+\frac{4}{18}$; b) $\frac{11}{75}+\frac{23}{75}+\frac{16}{75}$; c) $\frac{23}{17}-\frac{3}{17}-\frac{5}{17}$; d) $\frac{21}{20}-\frac{9}{20}+\frac{3}{20}$; e) $3+\frac{1}{7}$;

f) $\frac{8}{5}-1$; g) $4\frac{2}{7}+3\frac{3}{7}$; h) $42\frac{89}{100}-11\frac{39}{100}$; i) 45% + 37%; j) 100% – 13% – 37%.

2. Patru elevi efectuează calculul: $\frac{139}{13}+\frac{49}{13}-\frac{158}{13}+\frac{10}{13}$ și obțin rezultatele din tabelul alăturat.

Teodora	Mihai	Andra	Laurențiu
$\frac{356}{13}$	$\frac{20}{13}$	$\frac{179}{13}$	$\frac{40}{13}$

Cel care a efectuat calculul corect este:

A. Teodora; **B.** Mihai; **C.** Andra; **D.** Laurențiu.

3. a) Cât trebuie adăugat numărului $\frac{3}{48}$ pentru a obține $\frac{23}{24}$?

b) Cu cât trebuie micșorat numărul $\frac{77}{144}$ pentru a obține $\frac{5}{12}$?

c) Cu cât este mai mic numărul $\frac{39}{143}$ decât $\frac{8}{11}$?

4. Calculează, aducând la același numitor:

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}$; b) $\frac{7}{8}-\frac{7}{9}$; c) $\frac{1}{6}+\frac{4}{30}+\frac{1}{4}$; d) $\frac{23}{24}-\frac{1}{48}-\frac{1}{6}$;

e) $\frac{5}{18}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$; f) $\frac{11}{36}-\frac{2}{9}-\frac{1}{12}$; g) $\frac{7}{5}+1\frac{1}{2}+\frac{5}{20}-2\frac{1}{4}$; h) $6\frac{1}{4}+5\frac{2}{3}+1\frac{17}{24}$.

5. Efectuează calculele și scrie rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\ldots+\frac{26}{27}$; b) $\frac{1}{103}+\frac{2}{103}+\frac{3}{103}+\ldots+\frac{103}{103}$;

c) $100+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\ldots+\frac{99}{100}$; d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$;

e) $\frac{1}{5}+\frac{11}{55}+\frac{111}{555}+\ldots+\frac{1111111}{5555555}$; f) $\frac{1}{2022}+\frac{2}{2022}+\frac{3}{2022}+\ldots+\frac{2021}{2022}$.

Evaluează-te

1. a) Dacă $a=6\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}-4\frac{1}{6}$ și $b=11\frac{5}{6}-8\frac{5}{12}-1$, calculează $N=\frac{2}{3}+a-b$.

b) Folosind proprietățile adunării, calculează $1\frac{2}{5}+3\frac{3}{5}+\frac{11}{30}+\frac{19}{30}$. **3 puncte**

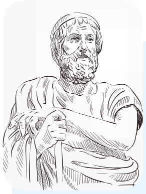
2. Fie $a=1+\frac{1}{2}$, $b=\frac{8}{5}+\frac{1}{10}$, $c=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$. Dintre propozițiile de mai jos, cea adevărată este:

a) $c<b<a$; b) $a<c<b$; c) $b<a<c$; d) $c<a<b$. **3 puncte**

3. Arată că $a=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{5}{6}$ și $b=\frac{17}{34}+\frac{29}{87}+\frac{31}{186}$ sunt numere naturale. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Gândește-te, cercetează, reflectează înainte de a lucra.



Pitagora stabilește raporturile numerice pentru principalele intervale muzicale, astfel: *octava* 2 : 1, *cvinta* 3 : 2, *cvarta* 4 : 3, *tonul* 9 : 8. Sunetele muzicale sunt explicate de pitagoricieni prin teoria armoniei numerice.

IV.8. ÎNMULȚIREA FRACȚIILOR

IV.8.1. Înmulțirea unui număr natural cu o fracție ordinară

Descoperă

Prin produsul $3 \cdot \frac{2}{7}$ înțelegem $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$ (înmulțirea fiind o adunare repetată).

Dar $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)+\frac{2}{7}=\frac{2+2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 2}{7}$. Deci, $3\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{7}$.

Reține!

- **Produsul dintre un număr natural și o fracție ordinară** este o fracție în care numărătorul este egal cu produsul dintre acel număr și numărătorul fracției date, iar numitorul este același cu numitorul fracției date.

$n\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{b}$, pentru orice numere naturale a, b, n, unde $b \neq 0$.

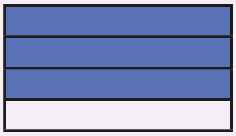
Exemple: $7\cdot\frac{3}{25}=\frac{7\cdot 3}{25}=\frac{21}{25}$; $9\cdot\frac{8}{14}=\frac{72^{(2}}{14}=\frac{36}{7}$; $\frac{4}{15}\cdot 5=\frac{4\cdot 5}{15}=\frac{20^{(5}}{15}=\frac{4}{3}$.

IV.8.2. Înmulțirea a două fracții ordinare

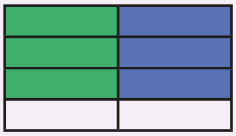
Descoperă

Cum se poate reprezenta grafic operația de înmulțire $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$?

1. Reprezentăm cele 3 pătrimi cu albastru:



2. Împărțim zona colorată în două părți și colorăm o jumătate cu verde. Zona necolorată se împarte și ea în două părți.



Am obținut $4 \cdot 2 = 8$ părți egale, din care sunt colorate cu verde $3 \cdot 1 = 3$ părți.

Observăm că $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}=\frac{3}{8}$, așadar suprafața colorată cu verde reprezintă $\frac{3}{8}$ din suprafața totală.

Reține!

- **Produsul a două fracții ordinare** este o fracție care are numărătorul egal cu produsul numărătorilor celor două fracții, iar numitorul egal cu produsul numitorilor celor două fracții.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, pentru orice numere naturale a, b, c, d, unde $b \neq 0$ și $d \neq 0$.

Dacă este posibil, rezultatul se simplifică.

- Pentru calcule mai rapide, se recomandă să se efectueze simplificări înainte de a calcula produsul numărătorilor și al numitorilor.
- Deoarece înmulțirea fracțiilor ordinare se reduce la înmulțiri între numere naturale, toate proprietățile înmulțirii numerelor naturale sunt valabile și pentru fracțiile ordinare:

– comutativitatea: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$, pentru orice numere naturale a, b, c, d, unde $b, d \neq 0$;

– asociativitatea: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$, pentru orice numere naturale a, b, c, d, e, f, unde $b, d, f \neq 0$;

– 1 este element neutru: $\frac{a}{b}\cdot 1 = 1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$, pentru orice numere naturale a, b, unde $b \neq 0$.

– distributivitatea față de adunare și scădere: $\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\cdot\frac{c}{d}$ și $\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=$ $=\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\cdot\frac{c}{d}$, pentru orice numere naturale a, b, c, d, e, f, unde $b, d, f \neq 0$.

Exersează

Efectuează următoarele operații de înmulțire cu fracții ordinare:

a) $5\cdot\frac{14}{17}$; **b)** $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{10}$; **c)** $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{6}$; **d)** $3\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9}$; **e)** $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{21}{18}$.

Rezolvare:

a) $5\cdot\frac{14}{17}=\frac{5\cdot 14}{17}=\frac{70}{17}$; **b)** $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{10}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 10}=\frac{21}{50}$; **c)** $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{6}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 6}=\frac{20}{90}^{(10}=\frac{2}{9}$;

d) $3\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 5+1}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{32}{45}$; **e)** $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{21}{18}=\frac{6}{35}\cdot\frac{21}{18}=\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{35}_{5}}\cdot\frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{18}_{3}}=\frac{3}{15}^{(3}=\frac{1}{5}$.

Activitate pe grupe

În matematică, o fracție *diadică* este o fracție al cărei numitor este o putere a lui 2, adică un număr de forma $\frac{a}{2^n}$. O proprietate interesantă a lor este aceea că suma, diferența și produsul dintre două fracții *diadice* generează o altă fracție *diadică*.

Grupa 1. Dați exemplu de două fracții *diadice* și aflați-le suma. Deduceți o formulă generală de calcul.
Grupa 2. Dați exemplu de două fracții *diadice* și aflați-le diferența. Deduceți o formulă generală de calcul.
Grupa 3. Dați exemplu de două fracții *diadice* și aflați-le produsul. Deduceți o formulă generală de calcul.
Prezentați în fața celorlalte grupe rezultatele găsite și dezbateți pe această temă.

Rezolvă

1. Asociază fiecărei operații rezultatul său, după model:

$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}$; $\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{3}$; $\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{7}$; $5\cdot\frac{3}{4}$; $\frac{2}{7}\cdot3$; $\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}$; $\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{9}$.

$\boxed{\frac{1}{3}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\frac{10}{63}}$ $\boxed{\frac{20}{33}}$ $\boxed{\frac{1}{9}}$ $\boxed{\frac{6}{7}}$ $\boxed{\frac{15}{4}}$

2. Calculează, scriind fracțiile sub formă ireductibilă:

a) $5\cdot\frac{4}{15}$; b) $\frac{21}{70}\cdot\frac{42}{18}$; c) $\frac{4}{15}\cdot\frac{60}{16}\cdot\frac{12}{20}$; d) $2\frac{3}{4}\cdot1\frac{5}{22}$;

e) $9\frac{2}{14}\cdot\frac{42}{128}\cdot11\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{68}$; f) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{18}$; g) $\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3}{24}$; h) $\frac{2^3\cdot3}{4\cdot5}\cdot\frac{2^2\cdot3^2}{3\cdot7}$.

3. Arată că următoarele numere sunt naturale: $x=\frac{6}{13}\cdot4\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}\cdot1\frac{1}{7}\cdot5\frac{1}{4}$, $z=\frac{10}{43}\cdot4\frac{2}{5}\cdot3\frac{10}{11}$.

4. Înmulțind numărul natural n cu fracțiile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{5}$, se obține de fiecare dată un număr natural. Determină cel mai mic număr natural nenul n cu această proprietate.

5. Calculează: $1\frac{1}{2}\cdot1\frac{1}{3}\cdot1\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot1\frac{1}{2021}$.

6. Se consideră numerele $a=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{34}{35}$ și $b=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{35}{36}$. Arată că $a\cdot b+\frac{8}{9}=1$.

7. Calculează în două moduri:

a) $\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{8}\right)$; b) $\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{10}\right)$; c) $\frac{3}{19}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{19}\cdot\frac{4}{7}$; d) $10\cdot\frac{7}{11}+10\cdot\frac{3}{22}+10\cdot\frac{1}{2}$.

8. Patru elevi aleg câte o fracție ordinară, așa cum este prezentat în tabelul alăturat. Produsul fracțiilor a doi dintre ei este egal cu $\frac{1}{2}$. Cei doi sunt:

Anca	Mihai	Antonia	Marcel
$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{5}$

a) Anca și Marcel; b) Antonia și Mihai;
c) Mihai și Marcel; d) Anca și Antonia.

Evaluează-te

1. Calculează: a) $14\cdot\frac{16}{21}$; b) $3\cdot1\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{21}$. **3 puncte**

2. Efectuează, ținând cont de ordinea operațiilor:

a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot3$; b) $\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{7}+\frac{1}{14}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{8}$. **3 puncte**

3. Calculează: $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022}\right)\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2022}{2021}\right)$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Părerile contrazic matematica. Cu cât sunt mai împărțite, cu atât sunt mai multe.

David Boia (18 iunie 1957) – poet, aforist și epigramist român.

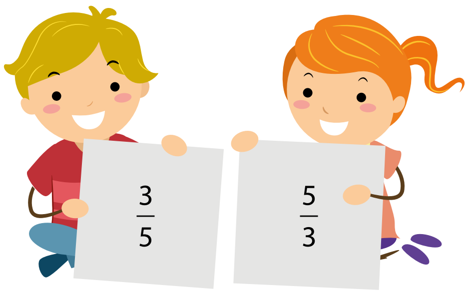
IV.9. ÎMPĂRȚIREA FRACȚIILOR

IV.9.1. Inversa unei fracții

Descoperă

Ionuț și Mihaela formează fracții folosind numerele 3 și 5. Ionuț scrie fracția $\frac{3}{5}$, iar Mihaela scrie fracția $\frac{5}{3}$, cele două fracții având numărătorul și numitorul schimbați între ei. Cei doi copii observă că produsul fracțiilor lor este egal cu 1.

Spunem că fracția $\frac{5}{3}$ este **inversa** fracției $\frac{3}{5}$ sau fracția $\frac{3}{5}$ este **inversa** fracției $\frac{5}{3}$.



$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=\frac{15}{15}=1$$

Reține!

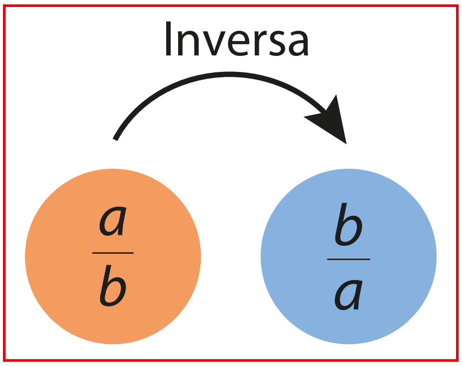
- **Inversa** fracției ordinare $\frac{a}{b}$ este fracția $\frac{b}{a}$, unde a și b sunt numere naturale nenule.
- Inversul unui număr natural nenul a este fracția ordinară $\frac{1}{a}$.
- Produsul dintre o fracție și inversa ei este egal cu 1: $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$ și $a\cdot\frac{1}{a}=1$, pentru orice numere naturale nenule a și b.

Exemple: Inversa fracției $\frac{4}{9}$ este fracția $\frac{9}{4}$.

Inversul numărului 2 este $\frac{1}{2}$.

Inversa fracției $\frac{1}{7}$ este numărul 7.

Observație: Fracția ordinară $\frac{0}{7}$ nu are inversă, deoarece $\frac{7}{0}$ nu este fracție (împărțirea la 0 nu are sens).



IV.9.2. Împărțirea a două fracții ordinare

Descoperă

Cum putem determina câtul împărțirii $\frac{21}{20} : \frac{3}{5}$?

Răspuns: Notăm câtul împărțirii cu *C*, deci $\frac{21}{20} : \frac{3}{5} = C$.

Știm că proba împărțirii se poate face prin înmulțire. Prin urmare, $\frac{21}{20} = C \cdot \frac{3}{5}$. Înmulțim egalitatea cu inversa fracției $\frac{3}{5}$ și obținem $\frac{21}{20} \cdot \frac{5}{3} = C \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}$, adică $\frac{21}{20} \cdot \frac{5}{3} = C$, deoarece $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$.

Deducem că $\frac{21}{20} : \frac{3}{5} = \frac{21}{20} \cdot \frac{5}{3}$.

Reține!

Câtul a două fracții ordinare se obține înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ unde } b, c, d \neq 0.$$

Exemple: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = {}^{(6}\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{16}{25} : \frac{4}{5} = \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{4}_{1}} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}$;

$\frac{4}{9} : \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{9} = \frac{8}{9}$.

Exersează

1. Calculează $\left(\frac{17}{3} : \frac{21}{4}\right) : \frac{34}{7}$.

Rezolvare: $\left(\frac{17}{3} : \frac{21}{4}\right) : \frac{34}{7} = \left(\frac{17}{3} \cdot \frac{4}{21}\right) \cdot \frac{7}{34} = \frac{17}{3} \cdot \frac{4}{21} \cdot \frac{7}{34} = \frac{\cancel{17}^{1}}{3} \cdot \frac{4}{\cancel{21}_{3}} \cdot \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{34}_{2}} = \frac{4}{18}^{(2} = \frac{2}{9}$.

2. Determină câtul împărțirii diferenței fracțiilor $2\frac{5}{9}$ și $\frac{1}{2}$ la suma fracțiilor $\frac{1}{3}$ și $1\frac{5}{27}$.

Rezolvare: Diferența fracțiilor $2\frac{5}{9}$ și $\frac{1}{2}$ este: $2\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{23}{9} - \frac{1}{2} = {}^{2)}\frac{23}{9} - {}^{9)}\frac{1}{2} = \frac{46-9}{18} = \frac{37}{18}$;

Suma fracțiilor $\frac{1}{3}$ și $1\frac{5}{27}$ este: $\frac{1}{3} + 1\frac{5}{27} = \frac{1}{3} + \frac{32}{27} = {}^{9)}\frac{1}{3} + \frac{32}{27} = \frac{9+32}{27} = \frac{41}{27}$;

Câtul împărțirii fracțiilor $\frac{37}{18}$ și $\frac{41}{27}$ este: $\frac{37}{18} : \frac{41}{27} = \frac{37}{18} \cdot \frac{27}{41} = \frac{37}{\cancel{18}_{2}} \cdot \frac{\cancel{27}^{3}}{41} = \frac{111}{82} = 1\frac{29}{82}$.

Rezolvă

1. Scrie inversele următoarelor fracții:

a) $\frac{2}{9}$; **b)** $\frac{8}{5}$; **c)** $3\frac{4}{7}$; **d)** $12\frac{3}{11}$.

2. Găsește greșelile și corectează-le:

a) $\frac{3}{2}:2=\frac{1}{3}$; **b)** $5:\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$; **c)** $\frac{7}{9}:\frac{9}{7}=1$; **d)** $\frac{1}{3}:\frac{5}{4}=\frac{5}{12}$.

3. De câte ori se cuprinde o cincime în două treimi? Dar invers?

4. **Activitate în perechi.** Completați tabelul următor:

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	**Inversa lui** $\frac{a}{b}$	**Inversa lui** $\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}:\frac{a}{b}$
$\frac{7}{8}$	$2\frac{15}{24}$				

5. Efectuează, scriind rezultatul ca fracție ireductibilă:

a) $\frac{2}{3}:2$; **b)** $7:\frac{1}{7}$; **c)** $\frac{5}{3}:\frac{15}{7}$; **d)** $1\frac{1}{4}:\frac{5}{12}$; **e)** $3\frac{5}{7}:1\frac{3}{49}$; **f)** $\frac{25}{7}:\frac{125}{14}:\frac{9}{21}$.

6. Într-o lădiță sunt $9\frac{1}{7}$ kilograme de mere. Câte pachete de câte $\frac{4}{7}$ kilograme de mere se pot face din două lădițe cu mere?

Evaluează-te

1. Scrie inversele fracțiilor: **a)** $\frac{5}{17}$; **b)** $7\frac{9}{16}$; **c)** $\frac{2^2}{3^3}$. **3 puncte**

2. Efectuează, ținând cont de ordinea operațiilor:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}:3$; **b)** $\frac{8}{3}:3\frac{1}{5}-\frac{5}{9}$; **c)** $\frac{49}{20}:2\frac{6}{4}-\frac{13}{16}:1\frac{5}{8}$. **3 puncte**

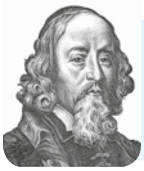
3. O croitoreasă taie o bucată de material de $5\frac{16}{21}$ metri în bucăți de $\frac{11}{7}$ metri. Câte bucăți obține și care este lungimea părții de material rămase? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Știai că...

O fracție *complexă* (sau *compusă*) este o fracție în care și numărătorul, și numitorul ei sunt tot fracții. De exemplu, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$. Din acest motiv, fracțiile *complexe* mai sunt denumite și „fracții stivuite”. Simplificarea lor se face foarte ușor. De fapt, este vorba de împărțirea a două fracții, pe care tocmai ai învățat-o! Se înmulțește numărătorul cu inversa fracției de la numitor: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=\frac{3}{2}$.

Cărţile sunt un instrument de răspândire a înţelepciunii.



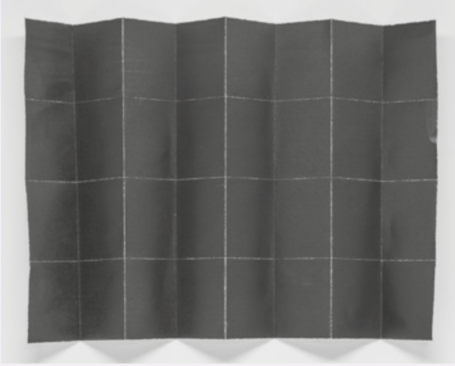
Comenius (n. **Jan Amos Komensky**, 28 martie 1592 – 15 noiembrie 1670) a fost un pedagog ceh, care s-a ocupat întreaga viaţă de perfecţionarea metodelor pedagogice, opera sa făcându-l să fie considerat, în momentul de faţă, părintele educaţiei moderne.

IV.10. PUTEREA CU EXPONENT NATURAL A UNEI FRACŢII ORDINARE

IV.10.1. Ridicarea la putere a unei fracţii ordinare

Descoperă

La ora de abilităţi practice, Andrei împătureşte o coală de hârtie în două părţi egale, apoi repetă acest procedeu de încă 4 ori. Despăturind coala, Andrei observă că prin îndoire s-au format dreptunghiuri. Ce fracţie din suprafaţa colii de hârtie reprezintă suprafaţa unui astfel de dreptunghi?



Răspuns: După fiecare împăturire, suprafaţa obţinută este egală cu jumătate din suprafaţa anterioară. După 5 îndoiri, suprafaţa unui dreptunghi reprezintă o fracţie egală cu $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}=\frac{1^5}{2^5}=\frac{1}{32}$ din suprafaţa totală.

Observăm că pentru determinarea rezultatului am înmulţit fracţia $\frac{1}{2}$ de cinci ori. Spunem că am ridicat fracţia $\frac{1}{2}$ la puterea a cincea.

Reţine!

- Fie $\frac{a}{b}$ o fracţie ordinară (a şi b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$) şi $n \geq 2$ un număr natural.

Produsul a n factori $\frac{a}{b}$ se numeşte **puterea a *n*-a** a fracţiei $\frac{a}{b}$, care se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ factori}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

- Pentru a ridica o fracţie ordinară la o putere, ridicăm atât numărătorul, cât şi numitorul la acea putere.
- Prin convenţie, $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$ şi $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$.
- În scrierea $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, fracţia $\frac{a}{b}$ se numeşte baza puterii, iar n se numeşte exponentul puterii.

Exemple: $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{9}$; $\left(\frac{75}{100}\right)^3=\left(\frac{75}{100}^{(25}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$; $\left(2\frac{1}{7}\right)^2=\left(\frac{15}{7}\right)^2=\frac{225}{49}=4\frac{29}{49}$.

IV.10.2. Reguli de calcul cu puteri

Reține!

Dacă sunt definite fracțiile ordinare $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, iar m și n sunt numere naturale nenule, atunci în calculele cu puteri de fracții se aplică următoarele reguli:

	Exemple:
1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază → se scrie baza și se adună exponenții: $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+7} = \left(\frac{2}{3}\right)^9$.
2. Împărțirea puterilor cu aceeași bază → se scrie baza și se scad exponenții: $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$, cu $m \geq n$.	$\left(\frac{5}{4}\right)^5 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^{5-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$.
3. Puterea unei puteri → se scrie baza și se înmulțesc exponenții: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$.	$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{4 \cdot 6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{24}$.
4. Puterea unui produs → se ridică la putere fiecare factor al produsului: $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$.	$\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2$.
5. Puterea unui cât → se ridică la putere fiecare factor al câtului: $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$.	$\left(\frac{2}{5} : \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Exersează

1. Scrie sub forma unei puteri, aplicând regulile de calcul: a) $\left(\frac{225}{36}\right)^5 \cdot \left(\frac{15}{6}\right)^{10}$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left(\frac{9}{25}\right)^4$.

Rezolvare: a) $\left(\frac{225}{36}\right)^5 \cdot \left(\frac{15}{6}\right)^{10} = \left[\left(\frac{15}{6}\right)^2\right]^5 \cdot \left(\frac{15}{6}\right)^{10} = \left(\frac{15}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{15}{6}\right)^{10} = \left(\frac{15}{6}\right)^{20}$;

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left(\frac{9}{25}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left(\frac{3}{5}\right)^8 = \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$.

2. Efectuează: $\left(\frac{7}{10}\right)^{40} : \left(\frac{7}{10}\right)^{30} - \left(\frac{7}{10}\right)^{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

Rezolvare: $\left(\frac{7}{10}\right)^{40} : \left(\frac{7}{10}\right)^{30} - \left(\frac{7}{10}\right)^{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$.

Rezolvă

1. Calculează:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; **c)** $\left(\frac{9}{4}\right)^3$; **d)** $\left(\frac{7}{11}\right)^2$; **e)** $\left(\frac{4}{4}\right)^{2022}$; **f)** $\left(\frac{23}{45}\right)^1$; **g)** $\left(\frac{1003}{1007}\right)^0$.

2. Scrie sub forma unei singure puteri, folosind regulile de calcul:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$; **b)** $\left(\frac{15}{17}\right)^5 \cdot \left(\frac{15}{17}\right)^{10}$; **c)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{13} : \left(\frac{4}{9}\right)^8$; **d)** $\left(\frac{19}{8}\right)^{52} : \left(\frac{19}{8}\right)^{31}$;

e) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^2$; **f)** $\left[\left(\frac{8}{3}\right)^4\right]^{11}$; **g)** $\left[\left(\frac{12}{29}\right)^0\right]^8$; **h)** $\left[\left(\frac{123}{209}\right)^{100}\right]^0$.

3. Efectuează, scriind rezultatul sub forma unei singure puteri:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^7$; **b)** $\left(\frac{40}{50}\right)^5 \cdot \left(\frac{25}{20}\right)^5$; **c)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{12} : \left(\frac{16}{36}\right)^{12}$; **d)** $\left(3\frac{2}{7}\right)^{20} : \left(2\frac{4}{21}\right)^{20}$.

4. Scrie fracţia: **a)** $\frac{64}{27}$ cu baza $\frac{4}{3}$; **b)** 1 cu baza $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{625}{81}$ cu baza $\frac{5}{3}$.

Model: Fracţia $\frac{27}{343}$ cu baza $\frac{3}{7}$ se scrie: $\frac{27}{343} = \frac{3^3}{7^3} = \left(\frac{3}{7}\right)^3$.

5. Scrie ca puteri cu acelaşi exponent:

a) 5^{18} şi 3^{45}; **b)** 7^{15} şi 2^{35}; **c)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{21}$ şi $\left(\frac{3}{5}\right)^{28}$.

Model: $5^{18} = (5^2)^9 = 25^9$ şi $3^{45} = (3^5)^9 = 243^9$.

6. Determină numărul natural *n* pentru care:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{16}{81}$; **b)** $\left(\frac{125}{50}\right)^n = \frac{625}{16}$; **c)** $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^n\right]^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \left(\frac{9}{49}\right)^5$.

Indicaţie: Se scriu fracţiile cu aceeaşi bază şi se aplică regulile de calcul cu puteri.

7. Arată că $\frac{2^{51}}{3^{34}}$ este o fracţie subunitară.

Indicaţie: Numitorul şi numărătorul se scriu ca puteri cu acelaşi exponent.

Evaluează-te

1. Scrie sub forma unei singure puteri:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{13}$; **b)** $\frac{12^5}{14^5} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7$; **c)** $\frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{23}$. **3 puncte**

2. Efectuează, scriind sub forma unei singure puteri:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{14} : \left(\frac{3}{5}\right)^9$; **b)** $\left(\frac{5}{6}\right)^7 : \frac{10^5}{12^5}$; **c)** $\left(\frac{1}{7}\right)^8 : \frac{1}{343}$. **3 puncte**

3. Stabileşte valoarea de adevăr a propoziţiei: „$\frac{8^{10}}{32^6}$ este fracţie echiunitară”. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Cu intuiția descoperi, cu logica stabilești!

Jacques Salomon Hadamard (8 decembrie 1865 – 17 octombrie 1963) a fost un matematician francez, membru al Academiei Franceze de Științe și membru de onoare al Academiei Române. Este cunoscut pentru contribuțiile sale în teoria numerelor, analiza matematică și criptologie.

IV.11. FRACȚII/PROCENTE DINTR-UN NUMĂR NATURAL SAU DINTR-O FRACȚIE ORDINARĂ

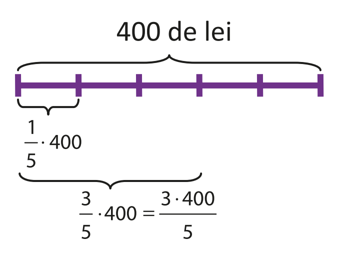
IV.11.1. Aflarea unei fracții dintr-un număr natural

Descoperă

Alina are 400 de lei. Cheltuiește $\frac{3}{5}$ din ei. Ce sumă de bani a cheltuit? Observă procedeul de calcul și spune ce s-a folosit.

Răspuns: Reprezentăm întreaga sumă printr-un segment, pe care îl împărțim în 5 părți egale. O parte reprezintă 400 : 5 = 80 de lei, iar 3 părți înseamnă 3 · 80 = 240 lei. Am aplicat *metoda reducerii la unitate*. ***Ce observăm?*** Soluția problemei poate fi găsită rapid efectuând calculul:

$$\frac{3}{5}\cdot 400=\frac{3}{5}\cdot\frac{400}{1}=\frac{3}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{400}^{80}}{1}=240 \text{ de lei.}$$



Reține!

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural, înmulțim numărul cu numărătorul fracției și împărțim rezultatul la numitor.

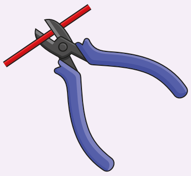
$$\frac{a}{b} \text{ din } m=\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a\cdot m}{b}, \text{ unde } a, b, m \text{ sunt numere naturale, } b\neq 0.$$

Exemple:

$\frac{1}{2}$ din 160 kg $=\frac{1}{2}\cdot 160=\frac{1\cdot 160}{2}=80$ kg; $1\frac{1}{13}$ din 1 001 $=\frac{14}{13}\cdot 1\,001=\frac{14\cdot 1001^{(13}}{13}=\frac{14\cdot 77}{1}=1\,078.$

IV.11.2. Aflarea unei fracții dintr-o fracție

Descoperă



O bucată de sârmă are lungimea de $\frac{11}{2}$ metri. Se taie $\frac{3}{4}$ din ea. Câți metri are bucata tăiată?

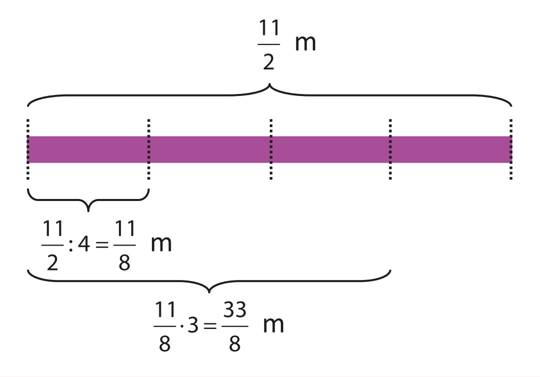
Răspuns: Aplicăm *metoda reducerii la unitate*, unde unitatea corespunde celor $\frac{11}{2}$ metri de sârmă.

La $\frac{4}{4}$ corespund $\frac{11}{2}$ m.

La $\frac{1}{4}$ corespund $\frac{11}{2}:4=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{8}$ m.

La $\frac{3}{4}$ corespund $\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{11}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{33}{8}$ m $=4\frac{1}{8}$ m.

Deducem că putem afla $\frac{3}{4}$ din $\frac{11}{2}$ înmulţind pe $\frac{3}{4}$ cu $\frac{11}{2}$, adică $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{2}=\frac{33}{8}=4\frac{1}{8}$.



Reţine!

Pentru a afla o fracţie dintr-o fracţie ordinară se efectuează produsul celor două fracţii.

$\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ **din** $\boldsymbol{\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$, unde a, b, c şi d sunt numere naturale, cu $b\neq 0$ şi $d\neq 0$.

Exemplu: $1\frac{4}{5}$ din $2\frac{1}{27}=1\frac{4}{5}\cdot 2\frac{1}{27}=\frac{9}{5}\cdot\frac{55}{27}=\frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{55}^{11}}{\cancel{27}_{3}}=\frac{11}{3}$.

IV.11.3. Aflarea unui procent dintr-un număr natural sau dintr-o fracţie ordinară

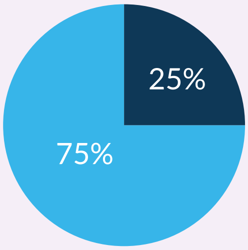
Descoperă

Dintre cei 1500 de elevi ai unei şcoli, 75% folosesc mijloace de transport în comun pentru a veni la şcoală, iar 25% nu folosesc mijloace de transport.

a) Câţi elevi vin la şcoală cu mijloacele de transport în comun?

b) Câţi elevi vin la şcoală fără mijloace de transport?

Răspuns: Ştim că procentul este o fracţie cu numitorul 100. Astfel, problema se reduce la a afla o fracţie dintr-un număr:



a) 75% din 1500 $=\frac{75}{100}\cdot 1500={\frac{75}{100}}^{(25}\cdot 1500=\frac{3}{4}\cdot 1500=\frac{4500}{4}=1\,125$ de elevi;

b) 25% din 1500 $=\frac{25}{100}\cdot 1500={\frac{25}{100}}^{(25}\cdot 1500=\frac{1}{4}\cdot 1500=\frac{1500}{4}=375$ de elevi.

Reţine!

Procentul este o fracţie cu numitorul 100. Se notează p%.

Pentru a calcula un procent p% dintr-un număr natural sau dintr-o fracţie ordinară înmulţim fracţia $\frac{p}{100}$ cu numărul natural dat sau cu fracţia ordinară dată.

Dacă p, n, a şi b sunt numere naturale, cu $b\neq 0$, atunci:

a) $\boldsymbol{p\%}$ **din** $\boldsymbol{n=\frac{p}{100}\cdot n}$; **b)** $\boldsymbol{p\%}$ **din** $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{p}{100}\cdot\frac{a}{b}}$.

Rezolvă

1. Calculează:

a) $\frac{1}{2}$ din 100; **b)** $\frac{2}{3}$ din 234; **c)** $\frac{4}{5}$ din 90; **d)** $\frac{7}{11}$ din 55;

e) $\frac{8}{9}$ din 702; **f)** $\frac{13}{7}$ din 91; **g)** $2\frac{1}{4}$ din 132; **h)** $7\frac{11}{12}$ din 144.

2. Calculează, aducând rezultatul la formă ireductibilă:

a) $\frac{1}{7}$ din $\frac{7}{2}$; **b)** $\frac{4}{5}$ din $\frac{5}{4}$; **c)** $\frac{2}{27}$ din $\frac{9}{4}$; **d)** $\frac{5}{13}$ din $\frac{39}{75}$;

e) $\frac{8}{11}$ din $\frac{55}{56}$; **f)** $\frac{2}{5}$ din $7\frac{9}{4}$; **g)** $3\frac{1}{13}$ din $4\frac{7}{8}$; **h)** $1\frac{2}{3}$ din $2\frac{1}{5}$.

3. Determină:

a) 25% din 30 litri; **b)** 10% din 60 de ore; **c)** 18% din 2 500 kg; **d)** 30% din 1 000 km;

e) 50% din 2 350 de lei; **f)** 45% din 300 m; **g)** 120% din 10 minute; **h)** 2% din 1 400 g.

4. Asociază fiecărui exercițiu din coloana **A** rezultatul corect din coloana **B**.

A	B
$\frac{1}{3}$ din 342;	1;
	$\frac{1}{9}$;
$\frac{5}{7}$ din $1\frac{6}{15}$;	900;
25% din $\frac{4}{9}$;	9;
	114.
75% din 1 200.	

5. **Activitate în perechi.** Rezolvați în două moduri următoarea problemă.

Dintre cei 25 de elevi ai clasei a V-a A, 12% participă la cursuri de chitară, iar 24% participă la cursuri de pian. Câți elevi nu iau nici cursuri de chitară, nici cursuri de pian?

6. Prețul unui obiect este 200 de lei. Prețul se mărește cu 10%, iar după câteva zile scade cu 10%. Care este prețul obiectului după cele două modificări?

Evaluează-te

1. Calculează:

a) $\frac{5}{4}$ din 120; **b)** $\frac{3}{7}$ din $\frac{63}{108}$; **c)** 12% din 300. **3 puncte**

2. Din cei 27 de elevi ai unei clase, $\frac{2}{3}$ sunt fete. Câți băieți sunt în acea clasă? **3 puncte**

3. Mihai parcurge cu bicicleta un traseu în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{2}{3}$ din traseu, în a doua zi parcurge jumătate din restul traseului, iar în a treia zi parcurge restul de 10 km. Câți kilometri are întregul traseu?

3 puncte

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE ŞI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** $\frac{3}{4}$ din $\frac{100}{81}$ este:

a) $\frac{50}{27}$; **b)** $\frac{25}{27}$; **c)** $\frac{20}{27}$; **d)** 1.

(5p) **2.** 24% din 1500 este:

a) 260; **b)** 360; **c)** 520; **d)** 160.

(5p) **3.** Fracția ordinară $\frac{60}{\overline{ab}}$, $a \neq 0$, este subunitară dacă:

a) $\overline{ab} = 50$; **b)** $\overline{ab} = 42$; **c)** $\overline{ab} = 65$; **d)** $\overline{ab} = 60$.

(5p) **4.** Dacă $\frac{a}{5} = \frac{9}{b}$, $b \neq 0$, atunci valoarea produsului $a \cdot b$ este egală cu:

a) 5; **b)** 9; **c)** 45; **d)** 54.

(5p) **5.** Rezultatul calculului $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{9}$ este:

a) 18; **b)** 9; **c)** $\frac{1}{6}$; **d)** 24.

(5p) **6.** Propoziția „$\frac{63}{18} = \frac{7}{2}$" este: **a)** adevărată; **b)** falsă.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Fracția ireductibilă obținută după simplificarea fracției $\frac{450}{8100}$ este:

a) $\frac{45}{810}$; **b)** $\frac{9}{162}$; **c)** $\frac{1}{18}$; **d)** $\frac{3}{54}$.

(5p) **2.** Dacă $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$, rezultatul calculului $3x - 4y$ este egal cu:

a) 0; **b)** 1; **c)** 3; **d)** 6.

(5p) **3.** Știind că $\frac{5}{x+2} = \frac{1}{8}$, atunci numărul natural x este egal cu:

a) 40; **b)** 38; **c)** 6; **d)** 42.

(5p) **4.** Rezultatul calculului $\frac{777}{555} + \frac{333}{222}$ este:

a) $\frac{29}{111}$; **b)** $\frac{10}{7}$; **c)** $\frac{29}{10}$; **d)** $\frac{1110}{777}$.

(5p) **5.** Anca, Dan, Corina și Tudor au avut de rezolvat următorul exercițiu $2\frac{7}{10} \cdot \frac{20}{63} - \frac{14}{15} : 1\frac{3}{25}$. Rezultatele lor sunt trecute în tabelul alăturat. Răspunsul corect este cel dat de:

Anca	Dan	Corina	Tudor
$\frac{1}{13}$	$\frac{15}{13}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{36}{42}$

a) Anca; **b)** Dan; **c)** Corina; **d)** Tudor.

(5p) **6.** Știind că $\frac{a+b}{7} = \frac{\overline{ab}}{25}$, atunci $\overline{ab}$ este:

a) 52; **b)** 72; **c)** 25; **d)** 75.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) **1.** **a)** Simplifică fracția $\frac{4^{2022}+4^{2022}+4^{2022}}{64^{673}}$ pentru a obține o fracție ireductibilă.

(5p) **b)** Arată că fracția $\frac{2^{2005}+3}{5}$ este reductibilă.

(5p) **2.** **a)** Numărul *a* este egal cu 25% din numărul *b*. Cât la sută din numărul *a* + *b* este egal cu numărul *b*?

(5p) **b)** Calculează 125% din [8% din (32% din 6 000)].

(10p) **3.** Fie $a = \left[\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]^2 : \left(1\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{2}{3}$ și $b = 2\frac{1}{2}\cdot\left(8\cdot\frac{2}{3}-4\cdot\frac{4}{9}\right)$.

a) Arată că $a = \frac{7}{12}$. **b)** Calculează $(a \cdot b) : \frac{140}{27}$.

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

PROIECT

PAHARE MUZICALE

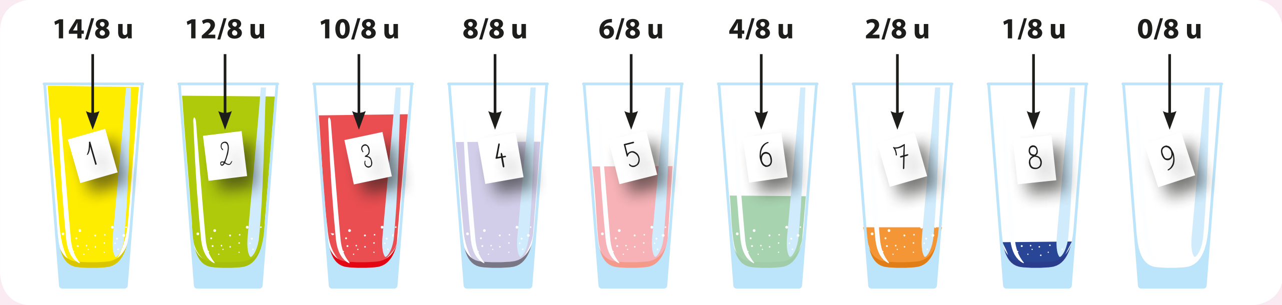
Planul proiectului

- Materiale necesare: 9 pahare identice din sticlă, apă, o măsură, colorant alimentar, o lingură din plastic, etichete, pix.
- Scopul: veți realiza o scală muzicală, integrând muzica, matematica și știința.

Realizarea proiectului

- Fiecare echipă va utiliza propriul set de materiale, pentru a realiza proiectul propus.
- Folosind măsura, umpleți fiecare pahar cu cantitatea corespunzătoare de apă și adăugați câte o picătură de colorant alimentar pentru a colora lichidul.
- Etichetați și numerotați paharele, în ordine, începând cu cel mai plin.
- Cântați! Folosind o lingură din plastic, atingeți ușor fiecare pahar și ascultați sunetele produse. Care dintre ele produce un sunet mai înalt și care produce un sunet mai grav? Încercați o melodie:

♪ *Melc, melc, codobelc / Scoate coarne boureşti / Şi te du la baltă, / Şi bea apă caldă* ♪
5 3 5 5 3 5 5 3 3 5 5 3 5 5 3 3 5 3 5 5 3 3 5 3



Discuții și interacțiuni

- Discutați cu ceilalți membri ai echipei etapele proiectului și împărțiți-vă sarcinile.
- Notați pentru fiecare pahar nota muzicală căreia îi corespunde sunetul produs.

Prezentarea proiectului

- Cântați în fața colegilor o piesă muzicală și explicați de ce fiecare pahar scoate un sunet diferit.

5

UNITATEA V

Fracții zecimale

CUPRINS

Astronomii folosesc fracții ale căror numitori consecutivi sunt 60 și puterile sale consecutive. Prin analogie, am introdus fracții în care numitorii consecutivi sunt 10 și puterile sale consecutive.

Jamshid Giyaseddin Al-Kashi (1380 – 1429) a fost un matematician și astronom persan; a avut contribuții importante în studiul fracțiilor zecimale.

V.1. FRACȚII ZECIMALE. SCRIEREA FRACȚIILOR ORDINARE CU NUMITORI PUTERI ALE LUI 10 SUB FORMĂ DE FRACȚII ZECIMALE. TRANSFORMAREA UNEI FRACȚII ZECIMALE CU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE ÎN FRACȚIE ORDINARĂ

Descoperă

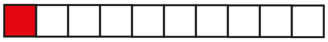
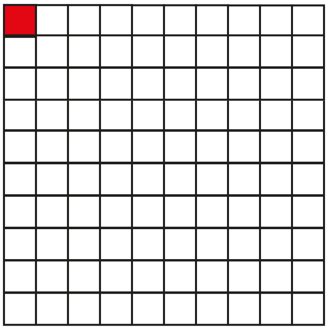
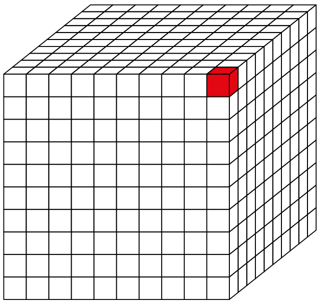
Pentru prima dată, conceptul de fracție zecimală a fost introdus de binecunoscutul matematician și astronom Al-Kashi, în lucrarea sa, *Cheia aritmeticii* (1427).

La fracții zecimale au ajuns și matematicienii din Asia și Europa. Originea și dezvoltarea fracțiilor zecimale au fost strâns legate de metrologie (doctrina măsurilor), unde, în secolul al II-lea. î.Hr. exista deja un sistem zecimal de măsuri de lungime.

Numere de tipul 1,62 sau 41,5 întâlnim deseori când vorbim despre înălțimea sau despre masa cuiva. Aceste numere reprezintă **fracții zecimale**.

Reține!

- O fracție ordinară care are numitorul o putere a lui 10 reprezintă o **fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule**.

Fracția ordinară $\frac{1}{10}$ reprezintă o zecime, se scrie 0,1 și se citește „zero virgulă unu”. Prima cifră din dreapta virgulei se numește zecime.	Fracția ordinară $\frac{1}{100}$ reprezintă o sutime, se scrie 0,01 și se citește „zero virgulă zero unu”. A doua cifră din dreapta virgulei se numește sutime.	Fracția ordinară $\frac{1}{1000}$ reprezintă o miime, se scrie 0,001 și se citește „zero virgulă zero zero unu”. A treia cifră din dreapta virgulei se numește miime.
 $\frac{1}{10}=0,1$	 $\frac{1}{100}=0,01$	 $\frac{1}{1000}=0,001$

$$\boxed{\frac{1}{10^n}=0,\underbrace{00\ldots01}_{n\text{ cifre}}}$$

- O **fracție zecimală** este formată din două părți despărțite de o virgulă: partea întreagă (aflată în stânga virgulei) și partea zecimală (aflată în dreapta virgulei). Cifrele de după virgulă se numesc zecimale.

Exemple: partea întreagă a numărului 4,102 este 4, iar partea zecimală este 0,102; partea întreagă a numărului 12,085 este 12, iar partea zecimală este 0,085.

Denumirea zecimalelor și numărul lor sunt prezentate în tabelul de mai jos, pentru două fracții zecimale:

Fracția zecimală	Cifra zecimilor	Numărul zecimilor	Cifra sutimilor	Numărul sutimilor	Cifra miimilor	Numărul miimilor
3,765	7	37	6	376	5	3 765
56,98	9	569	8	5 698	0	56 980

Observații:

1. Orice număr natural se poate scrie sub formă de fracție zecimală finită (exemplu: 213 = 213,0).

2. La sfârșitul părții zecimale se pot scrie oricâte zerouri, fără ca fracția zecimală să se schimbe (exemplu: 5,12 = 5,12000).

3. De la sfârșitul unei fracții zecimale se pot șterge oricâte zerouri, fără ca fracția zecimală să se schimbe (exemplu: 5,11200 = 5,112).

Regulă: Orice fracție ordinară care are numitorul egal cu o putere nenulă a lui 10 se scrie sub formă de fracție zecimală, astfel: se despart prin virgulă, de la dreapta spre stânga, un număr de cifre ale numărătorului egal cu exponentul lui 10 de la numitor. Dacă cifrele numărătorului nu sunt suficiente, se adaugă zerouri înaintea acestuia.

Exemple: $\frac{253}{10} = 25{,}3$; $\frac{8}{100} = 0{,}08$; $\frac{23}{1000} = 0{,}023$.

Regulă: Pentru a transforma o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale într-o fracție ordinară, se scrie la numărător grupul de cifre ale numărului zecimal, fără virgulă, iar la numitor se scrie o putere a lui 10 care are exponentul egal cu numărul de zecimale finite ale fracției date.

Exemple: $23{,}567 = \frac{23567}{10^3} = \frac{23567}{1000}$; $0{,}0435 = \frac{435}{10^4} = \frac{435}{10000}$; $306{,}7 = \frac{3067}{10}$.

Observație: O fracție ordinară care nu are la numitor o putere a lui 10, dar care prin amplificare sau simplificare poate fi scrisă ca o astfel de fracție, se poate transforma într-o fracție zecimală:

Exemple: ${}^{5)}\frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3{,}5$; ${}^{4)}\frac{5}{25} = \frac{20}{100} = 0{,}2$; ${}^{8)}\frac{30}{125} = \frac{240}{1000} = 0{,}24$.

- Orice fracție zecimală poate fi scrisă sub formă de sumă:, ca în următoarele exemple:

$234{,}549 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{9}{1000}$; $\overline{ab{,}cde} = a \cdot 10 + b \cdot 1 + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} + \frac{e}{1000}$.

Acest mod de scriere este cunoscut ca **descompunere zecimală**.

Exersează

Determină numărul natural *n*, astfel încât:

a) $0{,}71 = \frac{71}{10^n}$; b) $0{,}54 = \frac{n}{10^3}$; c) $\frac{n}{25} = 2{,}36$.

Rezolvare: a) $0{,}71 = \frac{71}{100} = \frac{71}{10^2} \Rightarrow n = 2$; b) $0{,}54 = \frac{n}{10^3} \Rightarrow {}^{10)}\frac{54}{100} = \frac{n}{1000} \Rightarrow \frac{540}{1000} = \frac{n}{1000} \Rightarrow n = 540$;

c) $\frac{n}{25} = 2{,}36 \Rightarrow {}^{4)}\frac{n}{25} = \frac{236}{100} \Rightarrow \frac{4n}{100} = \frac{236}{100} \Rightarrow 4n = 236 \Rightarrow n = 236 : 4 \Rightarrow n = 59$.

Rezolvă

1. Scrie următoarele fracții zecimale:
a) patru zecimi; b) opt sutimi; c) douăzeci și nouă de miimi;
d) șapte întregi și nouă sutimi; e) opt sute nouă zecimi; f) doi întregi și paisprezece miimi.

2. **Activitate în perechi.** Completează în caiet tabelul următor, apoi verifică-te cu colegul de bancă.

Fracția zecimală finită	13,2	105,6	43,56	14,347	25,08	561,9
Partea întreagă						
Partea zecimală						

3. Scrie sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{5}{10}; \frac{32}{10}; \frac{567}{10};$ b) $\frac{4}{100}; \frac{65}{100}; \frac{876}{100};$ c) $\frac{31}{1000}; \frac{123}{1000}; \frac{6879}{1000}.$

4. Amplifică fracțiile, apoi scrie-le sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{12}{2}; \frac{16}{5}; \frac{8}{4}; \frac{3}{25};$ b) $\frac{7}{125}; \frac{2}{8}; \frac{32}{250}; \frac{234}{2000};$ c) $\frac{3}{20}; \frac{231}{80}; \frac{372}{25}; \frac{51}{40}.$

5. Fie numărul 14,237. Completează spațiile libere:
a) cifra zecimilor este ___________; b) numărul sutimilor este ___________;
c) cifra miimilor este ___________; d) numărul miimilor este ___________.

6. Scrie sub formă de fracție ordinară următoarele fracții zecimale:
a) 3,7; b) 34,57; c) 531,215; d) 0,12; e) 1,034.

7. Scrie descompunerea zecimală a fiecărei fracții zecimale de mai jos:
a) 9,8; b) 81,23; c) 325,103; d) 5142,0234.

8. Scrie următoarele sume sub formă de fracții zecimale:

a) $200 + 40 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100};$ b) $5 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000}.$

9. Găsește numărul natural *n* știind că:

a) $8{,}46 = \frac{n}{100};$ b) $34{,}56 = \frac{3456}{n};$ c) $9{,}4567 = \frac{94567}{10^n}.$

10. Determină cifrele *a*, *b*, *c* și *d* în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\frac{\overline{7abc}}{1000} = \overline{d,235};$ b) $\overline{a5b,2c} = 7 \cdot 10^2 + d \cdot 10 + 8 + \frac{2}{10} + \frac{7}{10^2}.$

Evaluează-te

1. Transformă în fracții zecimale:

a) $\frac{34}{100};$ b) $\frac{6}{1000};$ c) $\frac{1235}{10^3}.$ **3 puncte**

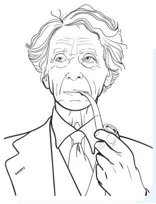
2. Scrie sub formă de fracție ordinară:

a) 0,504; b) 45,09; c) 0,006. **3 puncte**

3. Scrie partea întreagă și partea zecimală a numărului 34,563. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Matematica, văzută în mod corect, arată nu numai adevărul, ci și frumusețea supremă, o frumusețe rece și austeră, ca a unei sculpturi.



Bertrand Arthur William Russell (18 mai 1872 – 2 februarie 1970) a fost un matematician, logician și eseist britanic. În anul 1950 i-a fost acordat Premiul Nobel pentru Literatură.

V.2. APROXIMĂRI. COMPARAREA, ORDONAREA ȘI REPREZENTAREA PE AXA NUMERELOR A UNOR FRACȚII ZECIMALE CU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE

Descoperă

Pentru că le place să citească, Alina și George și-au cumpărat câte o carte. Alina a plătit 50,50 de lei, iar George a plătit 50,30 de lei.

a) Care dintre cei doi copii a plătit mai mult pe carte?

b) Care preț este mai apropiat de 50 de lei?

Răspuns:

a) Pentru a vedea care a plătit mai mult, comparăm cele două prețuri, exprimate prin fracții zecimale finite. Observăm că fiecare fracție are partea întreagă egală cu 50. Apoi comparăm zecimile și observăm că numărul zecimilor primei fracții este mai mare decât numărul zecimilor celei de a doua fracții (505 > 503), deci 50,50 > 50,30. Asta înseamnă că Alina a plătit mai mult decât George pe cartea ei.

b) Pentru a stabili care număr este mai apropiat de 50, facem rotunjirea celor două fracții zecimale (aproximarea prin lipsă sau prin adaos). Observăm că partea lor întreagă este aceeași (50). Cifra zecimilor primului număr este 5 (50,50), iar cifra zecimilor celui de-al doilea număr este 3 (50,30). Pentru că 5 ≥ 5, iar 3 < 5, aproximarea se face prin lipsă, deci mai aproape de 50 este numărul 50,30. Așadar prețul plătit de George este mai apropiat de 50 de lei.

Reține!

Compararea fracțiilor zecimale finite

- Dintre două fracții zecimale finite care au părțile întregi diferite este mai mare fracția zecimală care are partea întreagă mai mare.

Exemplu: Dintre numerele 26,12 și 23,34, mai mare este 26,12 , deoarece 26 > 23.

- Dacă părțile întregi a două fracții zecimale sunt egale, atunci se compară părțile lor zecimale, cifră cu cifră, de la stânga la dreapta, până când două zecimale de același ordin sunt diferite. Va fi mai mare fracția zecimală care are cifra respectivă mai mare.

Exemple: Dintre numerele 26,12 și 26,34 mai mare este 26,34, deoarece 3 > 1.
Dintre numerele 39,132 și 39,12 mai mare este 39,132, deoarece 3 > 2.

A ordona un șir de fracții zecimale finite înseamnă a scrie fracțiile respective în ordine crescătoare (de la mic la mare) sau descrescătoare (de la mare la mic), folosind compararea lor.

Aproximarea prin lipsă a unei fracții zecimale finite la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor ș.a.m.d. se obține prin ștergerea tuturor zecimalelor din dreapta cifrei de ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor ș.a.m.d.

Aproximarea prin adaos a unei fracții zecimale finite la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor ș.a.m.d. se obține prin mărirea cu o unitate a ultimei cifre a aproximării prin lipsă a fracției respective la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor ș.a.m.d.

Rotunjirea unei fracții zecimale finite se face astfel:

1. Citim cifra din dreapta ordinului la care trebuie să facem rotunjirea;

2. Dacă cifra este mai mică decât 5, atunci se face aproximare prin lipsă, neglijând restul cifrelor;

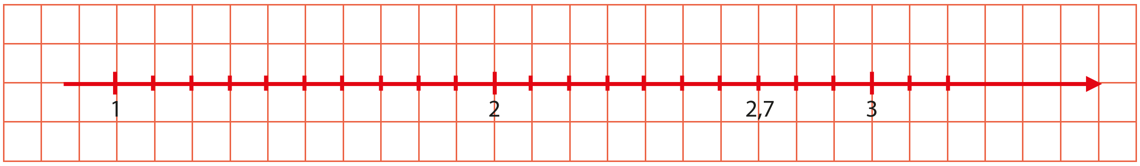
3. Dacă cifra este mai mare sau egală cu 5, atunci se face aproximare prin adaos, mărind cu o unitate cifra ordinului la care se face rotunjirea.

Exemple:

Fracția zecimală finită	Aproximarea prin lipsă la			Aproximarea prin adaos la			Rotunjirea la		
	zecimi	sutimi	miimi	zecimi	sutimi	miimi	zecimi	sutimi	miimi
13,3865	13,3	13,38	13,386	13,4	13,39	13,387	13,4	13,39	13,387
0,7153	0,7	0,71	0,715	0,8	0,72	0,716	0,7	0,72	0,715
3,9189	3,9	3,91	3,918	4,0	3,92	3,919	3,9	3,92	3,919

Pentru a **reprezenta pe axă** o fracție zecimală finită de forma $\overline{a,b}$, aceasta se încadrează între două numere naturale consecutive (*a* și *a* + 1), împărțim unitatea respectivă în 10 părți egale (fiecare parte reprezentând o zecime) și numărăm în sensul pozitiv al axei numărul corespunzător de zecimi (*b*).

Exemplu: 2,7 se încadrează între numerele naturale consecutive 2 și 3.



În același mod putem reprezenta pe axa numerelor și fracțiile cu două sau mai multe zecimale, însă dezavantajul constă în necesitatea împărțirii segmentului unitate în 100, 1000 ș.a.m.d. de părți egale. Este de preferat rotunjirea acestora înainte de a le reprezenta pe axă.

Exersează

1. Compară numerele:

a) 34,42 și 39,42; b) 123,456 și 123,432.

Rezolvare:

a) Comparând părțile întregi, 34 < 39, deducem că 34,42 < 39,42.

b) Cele două numere au părțile întregi egale. Comparăm, de la stânga spre dreapta zecimalele: cifrele zecimilor sunt identice; cifrele sutimilor sunt 5, respectiv 3, 5 > 3, deci putem spune că 123,456 > > 123,432.

2. Scrie trei fracții zecimale cuprinse între 5,2 și 5,28.

Rezolvare: Observăm că 5,2 = 5,20, iar 20 < 21 < 22 < 23 < ... < 28. Astfel, putem scrie, de exemplu, fracțiile: 5,22; 5,23; 5,25.

3. Câte numere naturale *n* verifică relația $3,7 < \frac{n}{100} < 4,25$?

Rezolvare: Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare, cu numitorul 100: $3,7 = \frac{37}{10} = \frac{370}{100}$ și $4,25 = \frac{425}{100}$. Obținem $\frac{370}{100} < \frac{n}{100} < \frac{425}{100}$, de unde 370 < *n* < 425. Numerele căutate sunt 371, 372, ..., 425, adică 425 – 371 + 1 = 55 de numere.

Rezolvă

1. Compară fracțiile zecimale:

a) 2,6 ☐ 2,9; **b)** 31,5 ☐ 31,54; **c)** 0,45 ☐ 0,405;
d) 709,25 ☐ 790,35; **e)** 12,29 ☐ 12,299; **f)** 0,404 ☐ 0,444.

2. În tabelul următor sunt înregistrate înălțimile (în metri) a patru copii.

Numele	Alexandra	Bogdan	Corina	Dragoș
Înălțimea (în metri)	1,53	1,55	1,57	1,52

Folosind informațiile din tabel, completează pe caiet spațiile libere cu răspunsul corect.

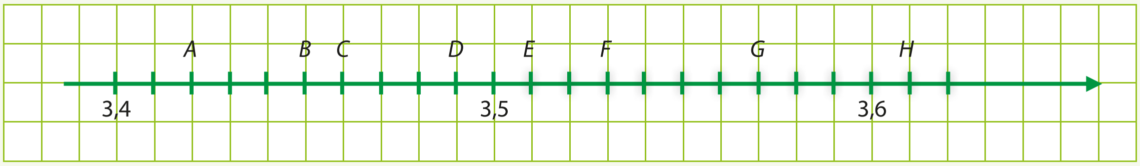
a) Cel mai înalt dintre cei patru copii este _______________.

b) Cel mai scund dintre cei patru copii este _______________.

3. Ordonează crescător fracțiile zecimale finite: 9,7; 36,23; 0,44; 8,45; 0,404; 3,62.

4. Scrie în ordine descrescătoare fracțiile zecimale finite: 9,07; 3,23; 0,48; 8,425; 0,04; 3,612.

5. Observă desenul de mai jos și scrie coordonatele punctelor reprezentate pe axa numerelor:



6. Încadrează fiecare fracție zecimală între două numere naturale consecutive:

a) 2,03; **b)** 3 ,12; **c)** 0,123; **d)** 7,0012.

7. Scrie câte trei fracții zecimale cuprinse între:

a) 5,12 și 5,14; **b)** 0,23 și 0,45; **c)** 6,345 și 6,349 **d)** 1,002 și 1,23.

8. Aproximează prin lipsă la zecimi, apoi la sutimi fracțiile zecimale: 9,98; 23,034; 109,211; 0,567.

9. Aproximează prin adaos la zecimi, apoi la sutimi fracțiile zecimale: 9,918; 3,034; 19,218; 0,067.

10. Rotunjește la zecimi, apoi la sutimi fracțiile zecimale: 34,57; 531,215; 0,12; 1,034.

11. Câte numere naturale *n* verifică relația $3,2 < \frac{n}{10} < 5,3$?

Evaluează-te

1. Compară numerele folosind semnele < , >, = :

a) 2,23 ☐ 2,03; **b)** 3,450 ☐ 3,45; **c)** 432,234 ☐ 432,324. **3 puncte**

2. Reprezintă pe axa numerelor următoarele fracții zecimale:

a) 0,50; **b)** 1,9; **c)** 0,6. **3 puncte**

3. Rotunjește fracția zecimală 4,5639 la zecimi, sutimi, miimi. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Matematica, în sensul cel mai larg, este dezvoltarea tuturor tipurilor de raționament formal, necesar și deductiv.

Alfred North Whitehead (15 februarie 1861 – 30 decembrie 1947) a fost matematician și filozof britanic. Lucrarea *Principia Mathematica*, scrisă în colaborare cu fostul său student Bertrand Russell, este considerată una dintre cele mai importante lucrări ale secolului XX.

V.3. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA FRACȚIILOR ZECIMALE CU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE

Descoperă

Elena a cumpărat o culegere de matematică ce a costat 20,35 de lei și un caiet special pentru matematică pe care a dat 10,23 de lei. Cât a plătit Elena în total pe culegere și caiet? Ce rest a primit ea dacă a avut 50 de lei?

Răspuns: Pentru a afla cât a plătit Elena în total, trebuie să efectuăm adunarea celor două prețuri, prin transformarea lor în fracții ordinare sau prin calcul direct:

$$20,35 + 10,23 = \frac{2035}{100} + \frac{1023}{100} = \frac{3058}{100} = 30,58 \text{ de lei.}$$

2	0,	3	5	+
1	0,	2	3	
3	0,	5	8	

Pentru a afla ce rest a primit, trebuie să scădem suma plătită din banii pe care i-a avut:

$$50 - 30,58 = {}^{100)}\frac{50}{1} - \frac{3058}{100} = \frac{5000}{100} - \frac{3058}{100} = \frac{1942}{100} = 19,42 \text{ de lei.}$$

–1	–1	–1		
5	0,	0	0	–
3	0,	5	8	
1	9,	4	2	

Reține!

Adunarea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule se efectuează așezând fracțiile una sub alta, astfel încât virgula să fie sub virgulă; dacă unul dintre termeni are mai puține zecimale nenule decât celălalt, adăugăm zerouri la partea sa zecimală, la final, astfel încât ambii termeni să aibă același număr de zecimale. Efectuăm adunarea ca la numere naturale, de la dreapta la stânga și așezăm virgula la rezultat sub virgulele termenilor.

Adunarea fracțiilor zecimale are aceleași proprietăți ca și adunarea fracțiilor ordinare: comutativitate, asociativitate, 0 este element neutru.

Scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule se efectuează așezând fracțiile una sub alta, astfel încât virgula să fie sub virgulă; dacă descăzutul/scăzătorul are mai puține zecimale decât scăzătorul/descăzutul, atunci adăugăm zerouri la partea zecimală la final, astfel încât ambii termeni să aibă același număr de zecimale. Efectuăm scăderea ca la numere naturale, de la dreapta la stânga și așezăm virgula la rezultat sub virgulele termenilor.

Exemple:

3,	5	+
2,	9	
6,	4	

2	0,	2	5	+
	2,	7	9	
2	3,	0	4	

2	9,	2	8	0	+
	0,	0	0	7	
2	9,	2	8	7	

2	3,	8	–
	8,	9	
1	4,	9	

0,	8	6	4	–
0,	2	7	8	
0,	5	8	6	

3,	8	0	0	–
1,	3	5	6	
2,	4	4	4	

Exersează

1. Folosind proprietățile adunării, efectuează:

a) 3,2 + 6,7 + 2,8 + 3,3; **b)** 0,7 + 1,11 + 2,3 + 98,89.

Rezolvare:

a) Pentru a calcula mai ușor, asociem termenii astfel: (3,2 + 2,8) + (6,7 + 3,3) = 6 + 10 = 16;

b) Pentru a calcula mai ușor, asociem termenii astfel: (0,7 + 2,3) + (1,11 + 98,89) = 3 + 100 = 103.

2. Determină cifrele nenule *a* și *b*, știind că $\overline{a,b} + \overline{b,a} = 3,3$.

Rezolvare: Egalitatea dată se mai poate scrie și astfel:

$$\frac{\overline{ab}}{10} + \frac{\overline{ba}}{10} = \frac{33}{10} \Rightarrow \overline{ab} + \overline{ba} = 33 \Rightarrow 10a + b + 10b + a = 33 \Rightarrow 11a + 11b = 33 \Rightarrow 11(a + b) = 33 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a + b = 33 : 11 \Rightarrow a + b = 3$; obținem $a = 2$ și $b = 1$ sau $a = 1$ și $b = 2$.

Rezolvă

1. Calculează:

a) 3,2 + 5,6; **b)** 2,45 + 0,24; **c)** 12,4 + 69,43;

d) 18,6 + 23,23 + 0,3; **e)** 62,03 + 4,236 + 12,3; **f)** 0,32 + 9,45 + 12.

2. Efectuează:

a) 8,7 – 3,4; **b)** 22,5 – 8,6; **c)** 32,43 – 18,4;

d) 69,13 – 22,803; **e)** 18,43 + 81,75 – 32,46; **f)** 81,453 – 8,02 + 20,302.

3. De pe un teren agricol s-au recoltat 18,27 tone de grâu și 23,36 tone de porumb. Câte tone de cereale s-au recoltat în total?

4. La o brutărie s-au adus 261,57 kg de făină, din care s-au folosit 192,04 kg pentru fabricarea pâinii. Câte kilograme de făină au mai rămas în brutărie?

5. Scrie numărul 8,36 ca sumă de două fracții zecimale și numărul 21,06 ca diferență de două fracții zecimale.

6. Dacă un număr se mărește cu 12,96, apoi se micșorează cu 7,06, se obține 35,07. Determină numărul inițial.

7. Calculează suma și diferența fracțiilor zecimale:

a) 333,333 și 222,222; **b)** 1,111 și 0,011.

8. Folosind proprietățile adunării, efectuează:

a) 1,11 + 2,22 + 3,33 + 4,44; **b)** 3,1 + 4,2 + 6,9 + 5,8 + 1,9 + 8,1.

9. Determină cifrele *a* și *b* nenule, care fac adevărată relația: $\overline{a,b} - \overline{b,a} = 4,5$.

10. Rotunjește la zecimi suma: 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,5.

Evaluează-te

1. Efectuează:

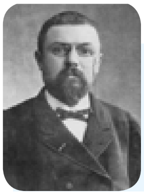
a) 43,61 + 2,423; **b)** 5,2 – 2,89; **c)** 125,76 – 34,9 + 11,38.

3 puncte

2. Maria a primit de ziua ei 50,50 de lei de la mama sa și 30,50 de lei de la bunica. Ea a cheltuit pe o carte 22,58 de lei. Câți lei i-au mai rămas Mariei? **3 puncte**

3. Determină numărul $\overline{abc}$, știind că $13,4 + 7,6 + 2,9 = \frac{\overline{abc}}{10}$. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct



Matematica este arta de a da același nume la diferite lucruri.

Jules Henri Poincaré (29 aprilie 1854 –17 iulie 1912) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni și fizicieni francezi. A avut contribuţii ştiinţifice importante și în domeniile: astronomie, geodezie, termodinamică, mecanică cuantică, teoria potențialelor și filozofie.

V.4. ÎNMULȚIREA FRACȚIILOR ZECIMALE CU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE

Descoperă

Mama Alinei i-a cumpărat acesteia pentru ora de matematică trei caiete a 4,3 lei bucata și două creioane a 1,9 lei bucata.

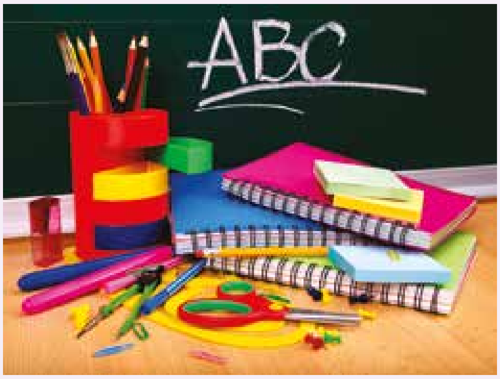
a) Cât a plătit mama Alinei pe caiete? Dar pe creioane?

b) Cât au costat în total rechizitele Alinei?

c) Cât ar fi plătit dacă ar fi cumpărat 10 caiete de același fel?

Răspuns:

a) Pentru a determina cât a plătit mama Alinei pentru caiete, efectuăm operația de înmulțire: 4,3 · 3 = 12,9 lei, iar pentru a afla cât au costat creioanele calculăm 1,9 · 2 = 3,8 lei.



b) Pentru a calcula cât au costat în total rechizitele, efectuăm adunarea celor două sume date pe caiete și, respectiv, pe creioane: 12,9 + 3,8 = 16,7 lei.

c) Pentru a vedea cât ar fi costat 10 caiete, înmulțim prețul unui caiet cu numărul acestora, adică 4,3 · 10 = 43 de lei.

Reține!

- La **înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu o putere a lui 10**, se mută virgula spre dreapta peste atâtea cifre cât arată exponentul lui 10 (dacă nu sunt cifre suficiente la partea zecimală, se completează cu zerouri la dreapta).

Exemple: 2,34 · 10 = 23,4; 2,34 · 1000 = 2,34 · 10^3 = 2340; 0,0345 · 10000 = 0,0345 · 10^4 = 345.

- La **înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu numere de forma 0,1, 0,01, 0,001**, se mută virgula spre stânga peste atâtea cifre câte zecimale are numărul cu care înmulțim. Dacă nu sunt cifre suficiente la partea zecimală, se completează cu zerouri în stânga.

Exemple: 2,34 · 0,1 = 0,234; 2,34 · 0,01 = 0,0234; 3,45 · 0,001 = 0,00345.

- La **înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu un număr natural**, se înmulțesc numerele ca și când ar fi numere naturale, fără a ține cont de virgulă, iar la produsul obținut se despart prin virgulă, numărând de la dreapta spre stânga, atâtea zecimale câte are fracția zecimală.

Exemple:

	3,	4	6	·
			5	
1	7,	3	0	

0,	3	8	·
	1	1	
	3	8	
3	8		
4,	1	8	

- Pentru **a înmulți două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule**, se înmulțesc numerele ca și când ar fi numere naturale, fără a ține cont de virgulă, iar la rezultat se despart prin virgulă, numărând de la dreapta spre stânga, atâtea cifre câte zecimale au împreună cele două fracții.

Exemple:

		4,	5	6	·
			5,	4	
	1	8	2	4	
2	2	8	0		
2	4,	6	2	4	

		2,	5	1	·
		0,	1	2	
		5	0	2	
	2	5	1		
0,	3	0	1	2	

- Înmulțirea fracțiilor zecimale finite are aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor naturale:
  1. comutativitate;
  2. asociativitate;
  3. numărul 1 este element neutru;
  4. distributivitate față de adunare și scădere;
  5. produsul este 0 dacă un factor este 0.

Exersează

1. Folosind proprietățile înmulțirii, efectuează:
a) 4 · 4,44 · 25; **b)** 5 · 53,257 · 2 · 10.

Rezolvare:

a) Asociem termenii astfel: 4 · 25 · 4,44 = 100 · 4,44 = 444;
b) Asociem termenii astfel: 5 · 2 · 10 · 53,257 = 10 · 10 · 53,257 = 100 · 53,257 = 5325,7.

2. Pentru a face zacuscă, bunica a cumpărat 5 kg de vinete a 2,5 lei kilogramul, 7 kg de ardei a 4,5 lei kilogramul și 4 kg de ciuperci a 3,5 lei kilogramul. Cât a plătit bunica pentru toate legumele?

Rezolvare:

Calculăm cât a plătit pentru fiecare fel de legume:
5 · 2,5 lei = 12,5 lei pentru vinete;
7 · 4,5 lei = 31,5 lei pentru ardei;
4 · 3,5 lei = 14 lei pentru ciuperci.
Adunăm toate rezultatele pentru a calcula costul total: 12,5 + 31,5 + 14 = 58 de lei.

Rezolvă

1. Calculează:
a) 4,7 · 10; **b)** 95,432 · 100; **c)** 2,32 · 1000; **d)** 0,4 · 10; **e)** 0,204 · 100; **f)** 0,123 · 1000;
g) 5,1 · 5; **h)** 12,14 · 15; **i)** 0,32 · 32; **j)** 2,31 · 4; **k)** 0,205 · 8; **l)** 21,213 · 20;
m) 5,2 · 0,23; **n)** 24,23 · 2,5; **o)** 0,13 · 1,21; **p)** 6,39 · 0,4; **q)** 0,5 · 0,2; **r)** 3,123 · 2,321.

2. Efectuează, folosind proprietățile înmulțirii:
a) 4 · 0,2 · 25; **b)** 10 · 2,53 · 2 · 5; **c)** 5 · 2,34 · 20; **d)** 8 · 3,02 · 125;
e) 2,8 · (3,49 + 6,51); **f)** (9,23 – 4,03) · 100; **g)** (7,13 – 3,56) · (0,32 + 1,68).

3. **a)** O pâine cântărește 0,40 kg. Cât cântăresc 20 de pâini de același fel?
b) O sticlă conține 0,25 litri de apă. Câți litri de apă sunt în 6 sticle identice?

4. Determină numărul:
a) cu 15 mai mare decât triplul numărului 2,5;
b) de 3 ori mai mare decât dublul lui 5,5;
c) cu 55,55 mai mic decât împătritul lui 25,5.

5. Scrie următoarele fracții zecimale ca produse dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:
a) 35,6; **b)** 281,02; **c)** 21514,503; **d)** 0,231.

Model: $82,4 = 82,4 \cdot 10^1 = 0,824 \cdot 10^2 = 0,0824 \cdot 10^3$.

6. Calculează, folosind factorul comun:
a) 13,5 · 2,6 + 13,5 · 1,8; **b)** 0,53 + 0,53 · 2 + 0,53 · 3 + ... + 0,53 · 10;

7. Asociază fiecare operație din stânga cu rezultatul corect din dreapta:

$1{,}432 \cdot 10$	$143{,}2$
$1{,}432 \cdot 100$	$1{,}432$
$1{,}432 \cdot 1000$	$14{,}32$
$14{,}32 \cdot 0{,}1$	1432
$14{,}32 \cdot 0{,}01$	$0{,}01432$
$14{,}32 \cdot 0{,}001$	$0{,}1432$

8. Aproximează prin adaos la zecimi rezultatele următoarelor calcule:
a) $15{,}63 \cdot 10 \cdot 0{,}2$; **b)** $4 \cdot 2{,}34 \cdot 2{,}5$; **c)** $2{,}75 \cdot 500 \cdot 0{,}1 + 3{,}42$; **d)** $80 \cdot 1{,}25 - 5{,}4 \cdot 0{,}3$.

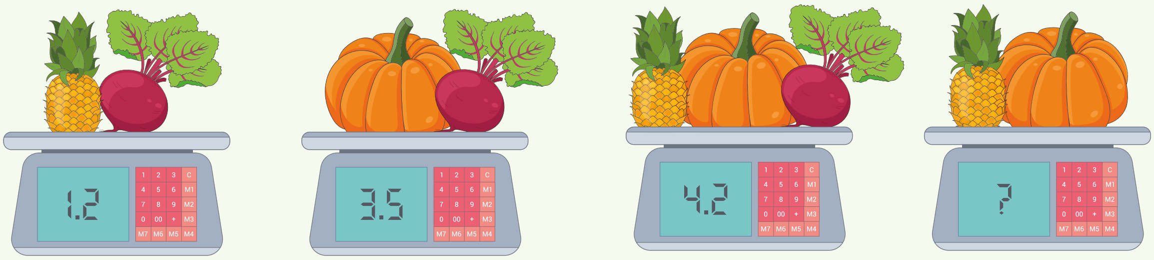
9. Dacă $a + b = 4{,}3$ și $b + c = 5{,}7$, calculează:
a) $a + 2b + c$; **b)** $2a + 3b + c$; **c)** $a + 4b + 3c$; **d)** $2a + 4b + 2c$.

10. Calculează suma a trei numere știind că primul număr este 32,5, al doilea este de două ori mai mare decât primul, iar al treilea este cu 12,4 mai mic decât al doilea.

11. **Activitate în perechi.** Copiați pe o foaie A4 și completați tabelul.

a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$b \cdot c$	$a \cdot (b + c)$	$b \cdot (a + c)$	$c \cdot (a + b)$
1,2	1,5	0,8						
0,4	1,6			1,2				
2,4		3,6	10,32					
0,6	0,5				0,45			

12. Cât indică ultimul cântar?



Evaluează-te

1. Efectuează:
a) $2{,}23 \cdot 1000$; **b)** $3{,}45 \cdot 1{,}3$; **c)** $432{,}23 \cdot 0{,}01$. **3 puncte**

2. Calculează în două moduri:
a) $0{,}5 \cdot (1{,}2 + 2{,}4)$; **b)** $1{,}9 \cdot (32{,}56 - 29{,}23)$. **3 puncte**

3. Dacă o banană cântărește 0,25 kg și o portocală cântărește 0,35 kg, determină cât cântăresc împreună 12 banane și 15 portocale de aceeași mărime. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

În infinita complexitate a lucrurilor se pot stabili anumite corespondenţe care se traduc prin formule simple şi uşor de înţeles.

Jules Tannery (24 martie 1848 – 11 decembrie 1910) a fost un matematician francez, ale cărui eforturi s-au îndreptat în principal spre studiul fundamentelor matematice şi al ideilor filozofice implicate în gândirea matematică.

V.5.

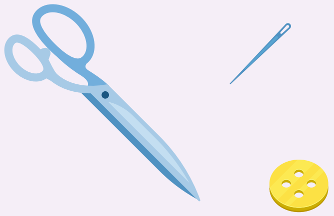
ÎMPĂRŢIREA A DOUĂ NUMERE NATURALE CU REZULTAT FRACŢIE ZECIMALĂ. TRANSFORMAREA UNEI FRACŢII ORDINARE ÎN FRACŢIE ZECIMALĂ. PERIODICITATE. MEDIA ARITMETICĂ A DOUĂ SAU MAI MULTOR NUMERE NATURALE

V.5.1. Împărţirea unui număr natural la 10, 100, 1 000 cu rezultat fracţie zecimală

Descoperă

O croitoreasă a cumpărat: un set de 10 foarfeci cu 125 de lei, un set de 100 de nasturi cu 332 de lei şi un set de 1 000 de ace cu 12 lei. Care a fost preţul unei foarfeci, al unui nasture, respectiv al unui ac?

Răspuns: Pentru a calcula preţul fiecărui obiect, se împarte suma plătită pentru fiecare set la 10, la 100, respectiv la 1 000.



Preţul unei foarfeci este egal cu 125 : 10 = $\frac{125}{10}=\frac{125}{10^1}$ = 12,5 lei.

Preţul unui nasture este egal cu 332 : 100 = $\frac{332}{100}=\frac{332}{10^2}$ = 3,32 lei.

Preţul unui ac este egal cu 12 : 1 000 = $\frac{12}{1000}=\frac{12}{10^3}$ = 0,012 lei.

Reţine!

Orice număr natural se poate scrie ca o fracţie zecimală. De exemplu, 17 = 17,0; 123 = 123,0.

Pentru **a împărţi un număr natural la o putere a lui 10**, se mută virgula spre stânga peste un număr de cifre egal cu exponentul lui 10. Dacă numărul nu are suficiente cifre, se completează cu zerouri la stânga.

Exemple: 234 : 1$\underline{0}$ = 23,$\underline{4}$; 234 : 1 $\underline{000}$ = 234 : 10^3 = 0,$\underline{234}$; 234 : 1$\underline{00\,000}$ = 234 : 10^5 = 0,$\underline{00234}$.

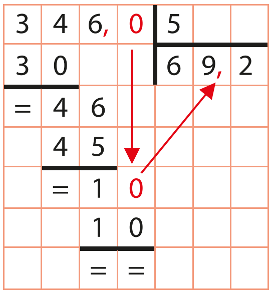
V.5.2. Împărţirea a două numere naturale cu rezultat fracţie zecimală

Reţine!

Pentru **a împărţi două numere naturale** se procedează astfel:

- se împart numerele şi, dacă împărţirea nu este exactă, se pune virgulă după deîmpărţit şi se adaugă zerouri;
- se scrie virgula şi la cât şi se continuă împărţirea ca la numere naturale.

Exemplu: 346 : 5 = 69,2.



3	4	6,	0	5		
3	0			6	9,	2
=	4	6				
	4	5				
	=	1	0			
		1	0			
		=	=			

V.5.3. Transformarea unei fracții ordinare în fracție zecimală

Reține!

Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul are doar divizori ai lui 2 și/sau 5, se obține o **fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule**.

Exemple: $3 : 8 = 3 : 2^3 = 0,375$ sau $\frac{3}{8} = 0,375$; $8 : 25 = 8 : 5^2 = 0,32$ sau $\frac{8}{25} = 0,32$;

$41 : 50 = 41 : (2 \cdot 5^2) = 0,82$ sau $\frac{41}{50} = 0,82$.

Spunem că am transformat fracțiile ordinare $\frac{3}{8}, \frac{8}{25}, \frac{41}{50}$ în fracțiile zecimale 0,375, 0,32, respectiv 0,82.

0.375

V.5.4. Periodicitate

Reține!

- Prin împărțirea a două numere naturale prime între ele în care împărțitorul nu se divide nici cu 2, nici cu 5, se obține o **fracție zecimală periodică simplă**.

Exemple:

$1 : 3 = \frac{1}{3} = 0,333... \overset{\text{se notează}}{=} 0,(3)$; citim „0 virgulă perioadă 3” (zecimala 3 se repetă de un număr nedeterminat de ori);

$35 : 27 = \frac{35}{27} = 1,296296... = 1,(296)$; citim „1 virgulă perioadă 296” (tripletul 296 se repetă de un număr nedeterminat de ori).

- Prin împărțirea a două numere naturale prime între ele în care împărțitorul se divide cu 2 sau 5, și mai are cel puțin încă un divizor prim în afară de 2 sau 5 se obține o **fracție zecimală periodică mixtă** (perioada nu începe imediat după virgulă).

Exemple:

$25 : 6 = \frac{25}{6} = 4,1666... = 4,1(6)$; citim „4 virgulă 1 perioadă 6”;

$8 : 15 = \frac{8}{15} = 0,5333... = 0,5(3)$; citim „0 virgulă 5 perioadă 3”.

V.5.5. Media aritmetică

Descoperă

Maria a obținut la matematică, în semestrul I, media 8, iar în semestrul al II-lea, media 9. Ce medie anuală a obținut Maria la matematică?

Răspuns: Pentru a calcula media anuală a Mariei, adunăm cele două medii semestriale, iar rezultatul îl împărțim la 2: $(8 + 9) : 2 = 17 : 2 = 8,5$.

Reține!

Media aritmetică a două sau mai multor numere este egală cu suma numerelor împărțită la numărul lor: $m_a = \frac{a+b}{2}$ $m_a = \frac{a+b+c}{3}$ $m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

Exemplu: Media aritmetică a numerelor 8, 10 și 13 este $m_a = \frac{8+10+13}{3} = \frac{31}{3} = 10,(3)$.

Exersează

1. Se dă numărul 2,4(13). Determină a 2 021-a zecimală a numărului și calculează suma primelor 2 021 de zecimale ale numărului dat.

Rezolvare: Numărul 2,4(13) se scrie 2,41313... . Observăm că prima zecimală este înaintea perioadei, iar perioada conține două zecimale. Dând deoparte prima zecimală, rămân 2 020 de zecimale care se grupează câte două pentru a alcătui grupa periodică. Obținem astfel 1 010 grupe, ceea ce înseamnă că ultima zecimală este 3. Suma primelor 2 021 de zecimale ale numărului dat este:
$S = 4 + 1\,010 \cdot (1 + 3) = 4\,044$.

2. Media aritmetică a patru numere este 32,52. Media aritmetică a ultimelor trei numere este 29,16. Care este primul număr?

Rezolvare: Notăm numerele cu a, b, c, d. Din $\frac{a+b+c+d}{4} = 32{,}52$ obținem $a+b+c+d = 32{,}52 \cdot 4 = 130{,}08$, iar din $\frac{b+c+d}{3} = 29{,}16$, obținem $b+c+d = 29{,}16 \cdot 3 = 87{,}48$. Rezultă că $a = 130{,}08 - 87{,}48 = 42{,}6$.

Rezolvă

1. Calculează:
a) 51 : 5; b) 231 : 25; c) 213 : 18; d) 214 : 6; e) 631 : 125; f) 21 212 : 15.

2. Transformă în fracții zecimale, folosind împărțirea:
a) $\frac{26}{5}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{18}{25}$; $\frac{24}{125}$; $\frac{36}{50}$; $\frac{8}{64}$; b) $\frac{36}{27}$; $\frac{55}{9}$; $\frac{34}{15}$; $\frac{102}{27}$; $\frac{88}{33}$; $\frac{26}{27}$; c) $\frac{23}{6}$; $\frac{37}{18}$; $\frac{41}{12}$; $\frac{173}{72}$; $\frac{2003}{36}$; $\frac{325}{24}$.

3. Calculează media aritmetică a numerelor:
a) 24 și 38; b) 30, 46 și 56; c) 3,6 și 8,4; d) 9,21 și 10,39; e) 0,33 și 5,45; f) 3,1, 5,8 și 7,5.

4. Știind că media aritmetică a două numere este 2,75, iar unul din numere este 3,33, află celălalt număr.

5. **Activitate în perechi.** Copiați tabelul de mai jos pe o foaie A4 și completați-l, distribuind corect fracțiile: 0,(6) ; 3,21 ; 3,5(39) ; 9,11 ; 7,(1) ; 3,13(16) ; 0,113 ; 0,1(34) ; 0,(34).

Fracții zecimale finite	Fracții zecimale periodice simple	Fracții zecimale periodice mixte

6. Scrie exemple de numere naturale n, astfel încât fracția ordinară $\frac{5}{10+n}$ să se transforme în:
a) fracție zecimală finită; b) fracție zecimală periodică simplă; c) fracție zecimală periodică mixtă.

7. Se dă numărul $a = \frac{23}{6}$. Scrie numărul a ca fracție zecimală și apoi:
a) determină a 2 022-a zecimală; b) calculează suma primelor 100 de zecimale.

Evaluează-te

1. Efectuează: a) 137 : 2; b) 243 : 25; c) 57 : 9. **3 puncte**

2. Transformă în fracții zecimale: a) $\frac{100}{6}$; b) $\frac{79}{24}$; c) $\frac{147}{12}$. **3 puncte**

3. Calculează media aritmetică a numerelor 1,1; 2,7 și 3,2. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Matematica este muzica rațiunii.

James Joseph Sylvester (3 septembrie 1814 – 15 martie 1897) a fost un matematician englez. El a adus contribuții fundamentale la teoria matricelor, teoria numerelor și combinatorică.

V.6. ÎMPĂRȚIREA UNEI FRACȚII ZECIMALE CU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE LA UN NUMĂR NATURAL NENUL. ÎMPĂRȚIREA A DOUĂ FRACȚII ZECIMALE CU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE. TRANSFORMAREA UNEI FRACȚII ZECIMALE PERIODICE ÎN FRACȚIE ORDINARĂ

V.6.1. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la 10, 100, 1 000

Descoperă

Observă împărțirile:

- $32{,}6 : 10 = \frac{326}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{326}{100} = 3{,}26$ – am mutat virgula spre stânga cu o zecimală;
- $245{,}7 : 100 = \frac{2457}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{2457}{1000} = 2{,}457$ – am mutat virgula spre stânga cu două zecimale;
- $32{,}4 : 1000 = \frac{324}{10} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{324}{10000} = 0{,}0324$ – am mutat virgula spre stânga cu trei zecimale și am adăugat zerouri.

Reține!

Pentru **a împărți o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale la o putere a lui 10**, se mută virgula de la dreapta spre stânga peste un număr de zecimale egal cu exponentul lui 10.

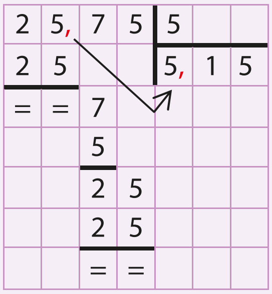
V.6.2. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural

Descoperă

Alina a cumpărat 5 caiete de matematică, plătind în total 25,75 de lei. Care este prețul unui caiet?

Răspuns: Pentru a afla prețul unui caiet, împărțim prețul total la numărul de caiete. O modalitate ar fi să împărțim 2575 de sutimi la 5, obținând 515 sutimi, adică 5,15. Dar putem folosi și un algoritm de împărțire asemănător celui de la împărțirea numerelor naturale, cu rezultat fracție zecimală:

- împărțim partea întreagă a deîmpărțitului la 5, apoi trecem virgula la cât;
- continuăm împărțirea ca la numere naturale.



2	5,	7	5	5		
2	5			5,	1	5
=	=	7				
		5				
		2	5			
		2	5			
		=	=			

Reține!

Pentru **a împărți o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural** se împarte întâi partea întreagă la numărul dat și se scrie virgula la cât, apoi se continuă împărțirea ca la numere naturale, adăugând zerouri la deîmpărțit, dacă este necesar.

V.6.3. Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Reține!

Pentru **a împărți două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule**, se înmulțesc atât deîmpărțitul, cât și împărțitorul cu aceeași putere a lui 10, astfel încât împărțitorul să devină număr natural, după care se efectuează împărțirea după regulile deja cunoscute.

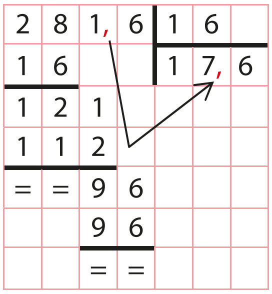
Exemplu: Pentru a calcula 2,816 : 0,16 procedăm astfel:

– înmulțim și deîmpărțitul, și împărțitorul cu 10^2:

$$2{,}816 : 0{,}16 = 281{,}6 : 16;$$

– efectuăm împărțirea 281,6 : 16 după regula împărțirii unei fracții zecimale finite la un număr natural: împărțim partea întreagă la 16, trecem virgula la cât, apoi continuăm împărțirea ca la numere naturale:

$$281{,}6 : 16 = 17{,}6.$$



V.6.4. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

Reține!

- Pentru **a transforma o fracție zecimală periodică simplă în fracție ordinară** scriem la numărător tot numărul, fără virgulă, din care scădem partea întreagă, iar la numitor scriem un număr format din tot atâtea cifre de 9 câte sunt în perioadă.

Exemple: $0,(7) = \frac{7}{9}$;

$0,(13) = \frac{13}{99}$;

$1,(7) = \frac{17-1}{9} = \frac{16}{9}$;

$11,(27) = \frac{1127-11}{99} = \frac{1116^{(9}}{99} = \frac{124}{11}$.

- Pentru **a transforma o fracție zecimală periodică mixtă în fracție ordinară** scriem la numărător tot numărul, fără virgulă, din care scădem partea aflată înaintea perioadei, iar la numitor scriem un număr format din atâtea cifre de 9 câte sunt în perioadă, urmate de atâtea cifre de 0 câte zecimale sunt în fața perioadei.

Exemple: $0,1(3) = \frac{13-1}{90} = \frac{12^{(6}}{90} = \frac{2}{15}$;

$18,52(407) = \frac{1852407-1852}{99900} = \frac{1850555^{(5}}{99900} = \frac{370111^{(37}}{19980} = \frac{10003}{540}$.

Portofoliu

- Pe o foaie A4, realizează un „memorator” cu principalele definiții și formule de calcul întâlnite până acum, în Unitatea V. Pentru fiecare noțiune, dă câte un exemplu. Folosește markere colorate pentru a evidenția noțiunile importante. Adaugă această foaie în portofoliul tău.

Exersează

1. Ordonează crescător următoarele fracții zecimale: $a = 2{,}4(13)$, $b = 2{,}413$, $c = 2{,}(413)$, $d = 2{,}41(3)$.
Rezolvare: Observăm că cele patru fracții au aceeași parte întreagă, dar și primele trei zecimale identice. Pentru a le compara, identificăm a patra zecimală: $a = 2{,}4(13) = 2{,}4131313...$, $b = 2{,}413 = 2{,}413000...$, $c = 2{,}(413) = 2{,}413413...$, $d = 2{,}41(3) = 2{,}4133333...$. Comparând a patra zecimală observăm că $b < a < d < c$.

2. Calculează suma numerelor 2,(3) și 3,(6).
Rezolvare: Pentru a efectua suma numerelor, mai întâi vom transforma fracțiile zecimale în fracții ordinare:
$2{,}(3) = \frac{23-2}{9} = \frac{^{(3}21}{9} = \frac{7}{3}$ și $3{,}(6) = \frac{36-3}{9} = \frac{^{(3}33}{9} = \frac{11}{3}$, iar suma lor este: $\frac{7}{3} + \frac{11}{3} = \frac{18}{3} = 6$.

Rezolvă

1. Determină numerele mai mici: **a)** de 10 ori, **b)** de 100 de ori, **c)** de 1 000 de ori, decât numerele: 26; 3,6; 23,56; 234,2; 0,32; 3456,43.

2. Calculează:
a) 5,1 : 5; **b)** 21,4 : 6; **c)** 7,3 : 4; **d)** 23,1 : 25; **e)** 20,5 : 8; **f)** 212,1 : 20;
g) 23 : 0,6; **h)** 52 : 1,5; **i)** 213 : 0,18; **j)** 13,23 : 0,6; **k)** 35,07 : 1,4; **l)** 105,105 : 0,75.

3. Transformă în fracții ordinare:
a) 3,(6); 31,(7); 4,(32); 23,(23); 23,(123);
b) 3,2(4); 4,24(5); 123,34(21); 321,31(123).

4. Calculează și rotunjește la sutimi rezultatele: 3,87 : 5; 25,065 : 2,5; 28,3404 : 22,6.

5. Realizează corespondența corectă între fracțiile zecimale periodice și fracțiile ordinare din tabel:

Fracții zecimale periodice	Fracții ordinare
0,(4)	$\frac{13}{90}$
0,(14)	$\frac{4}{9}$
0,1(4)	$\frac{239}{990}$
0,2(41)	$\frac{14}{99}$

6. Ordonează crescător următoarele numere: 5,432(1); 5,43(21); 5,(4321); 5,4(321); 5,4321.

7. **a)** Determină numerele de 0,01 mai mici decât: 2,6; 6,04; 54,23; 0,56.
b) Determină numerele de 0,001 mai mici decât: 7; 0,3; 6,54; 28,28;

8. Efectuează:
a) 4,(2) + 1,3(2); **b)** 2,(35) – 0,(21).

9. Fie numărul 1,2(34). Scrie cifra care reprezintă:
a) a 5-a zecimală;
b) a 10-a zecimală;
c) a 100-a zecimală.

Evaluează-te

1. Efectuează: **a)** 13,7 : 10; **b)** 24,3 : 5; **c)** 5,7 : 0,1. **3 puncte**

2. Transformă în fracții zecimale: **a)** 25,(8); **b)** 5,6(7); **c)** 0,54(32). **3 puncte**

3. Știind că 7 creioane de același fel costă 16,10 lei, care este prețul unui creion? Dar prețul a 3 creioane? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Numerele raționale n-au fost descoperite de un om irațional.

George Budoi (5 octombrie 1958) este profesor universitar, cercetător, inventator, autor de epigrame, pamflete, satire, aforisme, cugetări. A publicat peste 200 de lucrări științifice și deține 6 brevete de invenție.

V.7. NUMĂR RAȚIONAL POZITIV. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR CU NUMERE RAȚIONALE POZITIVE

Descoperă

De ziua ei, Alina și-a servit prietenele cu câte un pahar cu limonadă, fiecare pahar având 400 ml. Elena a băut un sfert din limonada sa, Maria a băut 25%, iar Bianca a băut 0,25 din limonada ei. Ce cantitate de limonadă a băut fiecare fată? Ce puteți spune după comparare?

Răspuns: Elena a băut $\frac{1}{4} \cdot 400 = 100$ ml. Maria a băut $\frac{25}{100} \cdot 400 = 100$ ml. Bianca a băut $0{,}25 \cdot 400 = 100$ ml. Observăm că toate fetele au băut aceeași cantitate de limonadă, ceea ce înseamnă că $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$. Numerele $\frac{1}{4}$, 25% și 0,25 reprezintă forme diferite de scriere pentru același număr, numit număr rațional pozitiv.

Reține!

Un **număr rațional pozitiv** este un număr care poate fi exprimat printr-o fracție ordinară, printr-o fracție zecimală sau sub formă de procent.

Exemplu: $\frac{1}{2}$ este un număr rațional pozitiv scris sub formă de fracție ordinară. Cum $\frac{1}{2}$ se scrie sub formă de fracție zecimală ca 0,5, și aceasta reprezintă același număr rațional pozitiv. Amplificând fracția $\frac{1}{2}$ cu 50, se obține $\frac{50}{100} = 50\%$, deci 50% este același număr rațional egal cu $\frac{1}{2}$ și cu 0,5.

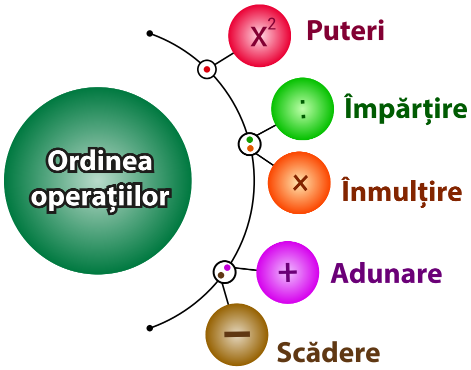
Observații:
- Orice fracție ordinară echivalentă cu fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, este un reprezentant al numărului rațional pozitiv $\frac{a}{b}$.
- Toate numerele naturale sunt numere raționale, deoarece orice număr natural poate fi scris ca o fracție cu numitorul 1 $\left(5 = \frac{5}{1}, 13 = \frac{13}{1}, 0 = \frac{0}{n}\text{, oricare ar fi numărul natural nenul } n\right)$.

Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale

La efectuarea operațiilor cu numere raționale se aplică aceleași reguli ca și la efectuarea operațiilor cu numere naturale.

Dacă într-un exercițiu sunt numai **operații de același ordin**, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise.

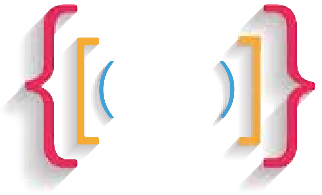
Dacă într-un exercițiu sunt **operații de ordine diferite**, acestea se efectuează în ordinea:
- operațiile de ordinul III (ridicarea la putere);
- operațiile de ordinul II (înmulțirea și împărțirea), în ordinea în care sunt scrise;
- operațiile de ordinul I (adunarea și scăderea), în ordinea în care sunt scrise.



Dacă într-un exercițiu sunt **paranteze**, se efectuează:

- mai întâi operațiile din parantezele rotunde,
- apoi operațiile din parantezele drepte,
- operațiile din acolade,

respectând de fiecare dată ordinea efectuării operațiilor.



Exersează

1. Efectuează: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-0,25\right)^{10}\right]\cdot 0,2.$

Rezolvare: Observăm că în exercițiu avem și fracții ordinare, și fracții zecimale. Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare: $0,25=\frac{25}{100}{}^{(25}=\frac{1}{4}$, $0,2=\frac{2}{10}{}^{(2}=\frac{1}{5}$. Calculul devine: $\left[\frac{4}{9}+\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)^{10}\right]\cdot\frac{1}{5}=$

$$=\left[\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{4}\right)^{10}\right]\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{4}{9}+1^{10}\right)\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{4}{9}+{}^{9)}\frac{1}{1}\right)\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{4}{9}+\frac{9}{9}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{9}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{45}=0,2(8).$$

2. Compară numerele $a=1,2^2+0,3^3\cdot 2^2-0,52$ și $b=4\cdot\frac{6}{12}-1,3+1,7$.

Rezolvare: Efectuăm calculele:

$a=1,2^2+0,3^3\cdot 2^2-0,52=1,44+0,027\cdot 4-0,52=1,44+0,108-0,52=1,548-0,52=1,028,$

$b=4\cdot\frac{6}{12}-1,3+1,7=\frac{24}{12}-1,3+1,7=2-1,3+1,7=0,7+1,7=2,4.$

Comparăm: $2<2,4$, deci $a<b$.

3. Maria a cumpărat rechizite pentru școală: trei caiete, două creioane și două stilouri. Dacă un caiet costă 5,3 lei, un creion costă 1,9 lei, iar un stilou costă 11,23 lei, află cât a plătit Maria în total.

Rezolvare: $3\cdot 5,3+2\cdot 1,9+2\cdot 11,23=15,9+3,8+22,46=19,7+22,46=42,16$ lei.

Rezolvă

1. Calculează:

a) $3,2+5,6-4,9$;

b) $2,45-1,96+0,24$;

c) $12,4\cdot 3+69,43$;

d) $18,6:2+23,23+9\cdot 0,3$;

e) $62,03+4,236:3+12,3:10$;

f) $0,32\cdot 100+9,45:5+12\cdot 0,01$.

2. Efectuează:

a) $(8,7-3,4)\cdot 20$;

b) $100\cdot(22,5-8,6)$;

c) $(32,43-18,4)\cdot 0,1$;

d) $(69,13-22,83):0,1^2$;

e) $1,2^2+(18,43+81,75):2-32,46$;

f) $(81,453-8,02)+20,302\cdot 0,2$.

3. Calculează:

a) $2\cdot\left(\frac{6}{10}+\frac{4}{100}+34:10^2\right)$;

b) $0,03+0,2\cdot\left\{0,8+\left[3+4\cdot\left(\frac{2}{5}-0,2\right)\right]\right\}$;

c) $0,(6)-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{3}+0,5\cdot\left(\frac{2}{3}-0,25\right)\right]\right\}$;

d) $\left[2,(5)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3-1,(3)\right]\cdot\frac{24}{18}$.

4. De pe un teren agricol s-au recoltat 18,27 tone de grâu și 23,36 tone de porumb. Câți lei se încasează pe cereale, dacă o tonă de grâu se vinde cu 900 de lei, iar o tonă de porumb se vinde cu 800 de lei?

5. Elena are o sumă de bani. După ce a cheltuit o treime din sumă, apoi jumătate din ce i-a rămas și apoi trei pătrimi din noul rest, constată că mai are 32,25 de lei. Ce sumă de bani a avut Elena?

6. Un număr se mărește cu 2,96, apoi se micșorează de 2 ori, rezultatul se mărește cu 7,06, după care se triplează și se obține 35,07. Determină numărul inițial.

7. Reprezintă printr-un șir de patru fracții egale numărul rațional 1,(24).

8. Rezolvă: $\left\{\left[8,41:\left(0,5^2+0,2^2\right)-0,5^2\right]:0,2^2+4,41:2,1\right\}:2+0,3^2$.

9. Rotunjește la sutimi rezultatele următoarelor calcule:
a) $0,2^3+1,1^2$; b) $1,2^2-0,3^3$; c) $0,5^3+1,3^2-0,4^3$.

Evaluează-te

1. Scrie câte trei numere raționale egale cu fiecare dintre numerele:
a) 2,4; b) 3,1(3); c) 2,(3). **3 puncte**

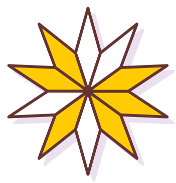
2. Efectuează:
a) 43,6 : 2 + 2,423 · 100; b) $(5,2-2,89)\cdot\frac{1}{3}$; c) $(0,8^2-10,3:100)\cdot 10$. **3 puncte**

3. Dublează numărul 3,4, adună rezultatul cu 3,4. Scade din noul rezultat pătratul numărului 1,2, după care micșorează-l de trei ori. Ce număr ai obținut? **3 puncte**

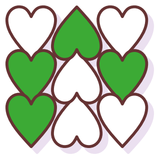
Din oficiu: 1 punct

Joc

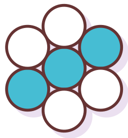
Încercuiește numărul rațional reprezentat corect în fiecare imagine:



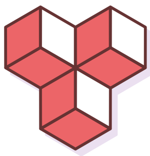
46%
$\frac{4}{10}$
0,6



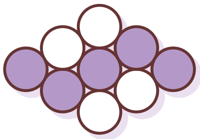
50%
$\frac{4}{9}$
0,45



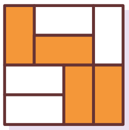
34%
$\frac{3}{7}$
0,37



63%
$\frac{2}{3}$
0,36



50%
$\frac{5}{9}$
0,59



50%
$\frac{4}{9}$
0,44

Matematician nu este cel ce știe matematică, ci cel ce creează matematică.

Grigore Moisil (10 ianuarie 1906 – 21 mai 1973) a fost un matematician român și, care, în prezent, este considerat părintele informaticii românești. A publicat lucrări în domeniile mecanicii, analizei matematice, geometriei, algebrei și logicii matematice. A contribuit la instalarea primului calculator de construcție românească, în 1957, la Institutul de Fizică Atomică.

V.8. METODE ARITMETICE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR CU FRACȚII ÎN CARE INTERVIN ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIME, ARIE, VOLUM, CAPACITATE, MASĂ, TIMP ȘI UNITĂȚI MONETARE

Problemele de matematică în care mărimile sunt exprimate prin fracții se rezolvă, în general, prin aceleași metode prezentate în **Unitatea II**:

1. metoda reducerii la unitate;
2. metoda comparației;
3. metoda figurativă;
4. metoda mersului invers;
5. metoda falsei ipoteze.

Vom relua prezentarea lor, dar nu complet, ci exemplificând și urmărind rezolvările celor mai reprezentative dintre probleme.

Reține!

Metoda reducerii la unitate este utilizată în rezolvarea multor probleme întâlnite în practică, în care datele depind unele de altele. Pentru a le rezolva, se trece printr-un pas intermediar, acela de a determina cât valorează unitatea. Pentru a le putea compara cât mai ușor, datele problemei se transcriu organizat, unele sub altele.

Exemplu: 10 euro valorează 49,86 de lei. Cât valorează 25 de euro?

Rezolvare:

10 euro .... 49,86 de lei
1 euro .... $49{,}86 : 10 = 4{,}986$ de lei
25 euro .... $25 \cdot 4{,}986 = 124{,}65$ de lei.

Metoda comparației este acea metodă aritmetică de rezolvare pentru:

- probleme care cuprind trei sau mai multe mărimi, fiecare dintre ele cu câte două valori numerice date;
- probleme care cuprind trei sau mai multe mărimi cu o singură valoare numerică fiecare, dar cu diferite relații între ele.

Exemplu: 3 kg de cireșe și 4,5 kg de căpșuni costă 47,7 lei, iar 5 kg de cireșe și 4 kg de căpșuni costă 62,7 lei. Cât costă câte un kilogram din fiecare tip de fructe?

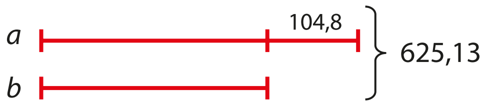
Rezolvare: 3 kg de cireșe .... 4,5 kg de căpșuni .... 47,7 lei
5 kg de cireșe .... 4,5 kg de căpșuni .... 62,7 lei
2 kg de cireșe .... / ....15 lei

$15 : 2 = 7{,}5$ lei un kilogram de cireșe
$3 \cdot 7{,}5 = 22{,}5$ lei 3 kg de cireșe
$47{,}7 - 22{,}5 = 25{,}2$ lei costă 4,5 kg de căpșuni
$25{,}2 : 4{,}5 = 252 : 45 = 5{,}6$ lei un kilogram de căpșuni

Proba:
$3 \cdot 7{,}5 + 4{,}5 \cdot 5{,}6 = 22{,}5 + 25{,}2 = 47{,}7$ lei (A)
$5 \cdot 7{,}5 + 4{,}5 \cdot 5{,}6 = 37{,}5 + 25{,}2 = 62{,}7$ lei (A)

Metoda grafică sau figurativă este metoda care prin care putem transpune realitatea în limbaj matematic în cel mai fidel mod. Cel mai frecvent, reprezentarea datelor se face prin segmente de dreaptă, egale de cele mai multe ori. Însă, există și probleme în care este utilă reprezentarea mărimilor prin intermediul altui tip de desen, cu alte elemente grafice: puncte, cercuri, pătrate etc.

Exemplu: Suma a două numere este 625,13, iar diferența lor este 104,8. Calculează numerele.
Rezolvare:



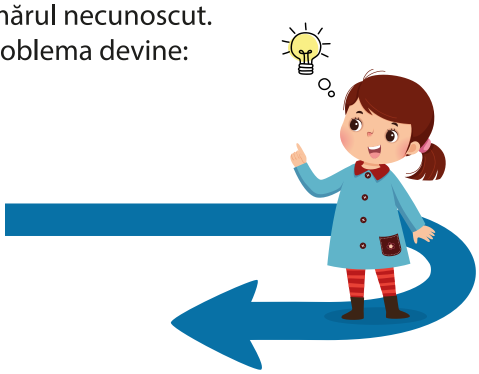
1. 625,13 – 104,8 = 520,33 este suma părților egale
2. 520,33 : 2 = 260,165 este un segment/numărul mic
3. 260,165 + 104,8 = 364,965
   sau
   625,13 – 260,165 = 364,965 este numărul mare

Metoda mersului invers este metoda prin care se rezolvă problemele în care se cere aflarea unei mărimi asupra căreia se aplică, succesiv, operații diferite. Dacă s-ar folosi ordinea naturală a calculelor, raționamentele ar fi greoaie; astfel, se aplică metoda mersului invers, care constă în folosirea datelor problemei în ordine inversă.

Exemplu: Dacă se mărește de 10 ori diferența dintre 17,5 și un număr, iar noul rezultat se adună cu dublul lui 4,66, se obține rezultatul 52,82. Determină numărul necunoscut.

Rezolvare: Înlocuim numărul necunoscut cu *a*. Astfel, problema devine:

$10 \cdot (17{,}5 - a) + 2 \cdot 4{,}66 = 52{,}82$
$10 \cdot (17{,}5 - a) + 9{,}32 = 52{,}82$
$10 \cdot (17{,}5 - a) = 52{,}82 - 9{,}32$
$10 \cdot (17{,}5 - a) = 43{,}5$
$17{,}5 - a = 43{,}5 : 10$
$17{,}5 - a = 4{,}35$
$a = 17{,}5 - 4{,}35$
$a = 13{,}15$

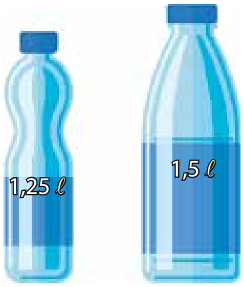


Metoda falsei ipoteze se folosește dacă datele problemei se referă la mărimi corelate și constă în faptul că se construiește ipoteza (presupunerea, ideea) de a fi toate mărimile necunoscute de același fel. Ipoteza asupra mărimii pe care o căutăm, care se dovedește a fi de obicei o ipoteză falsă, nu o facem cu intenția de a nimeri răspunsul, ci pentru a vedea din nepotrivirile cu enunțul ce modificări de raționament și calcul trebuie să facem pentru a determina soluția problemei.

Exemplu: S-a conservat cantitatea de 29,5 litri de sirop de vișine în 22 de sticle care au două mărimi: de 1,5 ℓ sau de 1,25 ℓ. Câte sticle din fiecare fel s-au folosit la conservarea siropului?

Rezolvare: Presupunem că s-au folosit numai sticle de 1,25 ℓ. Atunci, avem:

22 · 1,25 ℓ = 27,5 ℓ în total
29,5 ℓ – 27,5 ℓ = 2 ℓ de sirop lipsesc
1,5 ℓ – 1,25 ℓ = 0,25 ℓ se pot recupera dacă înlocuim o sticlă de 1,25 ℓ cu alta de 1,5 ℓ
2 : 0,25 = 200 : 25 = 8 înlocuiri ⇒ s-au folosit 8 sticle de 1,5 ℓ
22 – 8 = 14 sticle ⇒ s-au folosit 14 sticle de 1,25 ℓ.



Exersează

1. Cele 45 de găini ale bunicilor au nevoie zilnic, pentru hrană, de o cantitate de 5,85 kg de grâu. Câte kilograme de grâu vor utiliza bunicii pentru hrănirea păsărilor, dacă vor mai cumpăra 10 găini?

Rezolvare:

45 de găini	5,85 kg grâu
1 găină	5,85 : 45 = 0,13 kg de grâu
55 de găini	55 · 0,13 = 7,15 kg de grâu

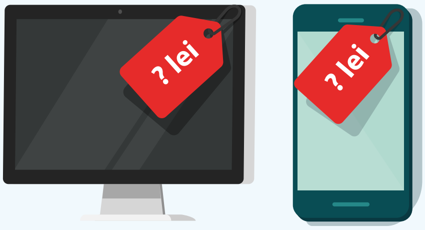
2. Două televizoare și trei telefoane costă 3674,1 lei. Trei televizoare și două telefoane costă 4502,4 lei. Cât costă fiecare obiect?

Rezolvare:

2 televizoare ....3 telefoane ....3674,1 lei | · 3
3 televizoare ....2 telefoane .... 4502,4 lei | · 2

6 televizoare ....9 telefoane .... 11022,3 lei
6 televizoare ....4 telefoane ....9004,8 lei

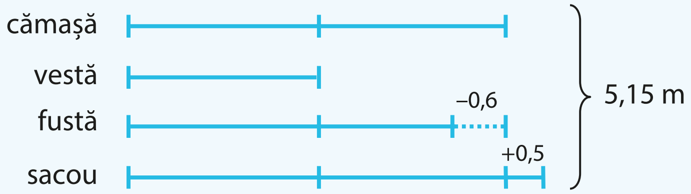
/ 5 telefoane.................2017,5 lei



- 2017,5 : 5 = 403,5 lei costă un telefon;
- 3 · 403,5 = 1210,5 lei costă 3 telefoane;
- 3674,1 – 1210,5 = 2463,6 lei costă 2 televizoare;
- 2463,6 : 2 = 1231,8 lei costă un televizor.

3. Pentru confecționarea unui costum de damă s-au folosit 5,15 m de material. Pentru cămașă, croitorul a folosit de două ori mai mult material decât pentru vestă, cu 0,6 m mai mult decât pentru fustă și cu 0,5 m mai puțin decât pentru un sacou. Câți metri de material sunt necesari pentru confecționarea fiecărui obiect vestimentar?

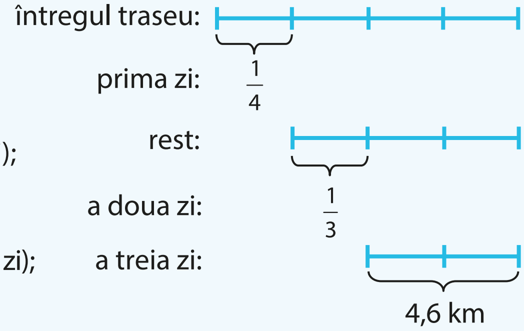
Rezolvare:



- 5,15 + 0,6 – 0,5 = 5,25 m (suma segmentelor egale);
- 2 + 1 + 2 + 2 = 7 segmente egale;
- 5,25 : 7 = 0,75 m un segment (material necesar pentru o vestă);
- 2 · 0,75 = 1,5 m de material necesar pentru o cămașă;
- 1,5 – 0,6 = 0,9 m de material necesar pentru o fustă;
- 1,5 + 0,5 = 2 m **sau** 5,15 – 1,5 – 0,75 – 0,9 = 2 m de material necesar pentru un sacou.

4. Un turist a parcurs un traseu în 3 zile, astfel: în prima zi a parcurs 0,25 din lungimea traseului, a doua zi a parcurs 0,(3) din rest, iar ultima parte în a treia zi. Știind că în a treia zi a parcurs 4,6 km, află ce lungime are întregul traseu.

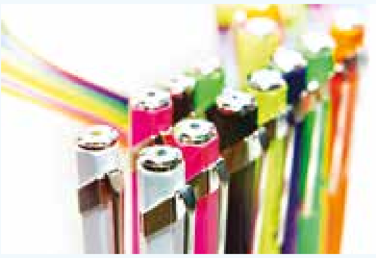
Rezolvare:



- $0,25 = \frac{1}{4}; 0,(3) = \frac{1}{3}$
- 4,6 : 2 = 2,3 km → $\frac{1}{3}$ din rest (traseul parcurs a doua zi);
- 3 · 2,3 = 6,9 km → restul traseului, după prima zi;
- 6,9 : 3 = 2,3 km → $\frac{1}{4}$ din traseu (traseul parcurs în prima zi);
- 4 · 2,3 = 9,2 km → tot traseul parcurs.

5. Pentru 20 de pixuri și stilouri s-au cheltuit 196 de lei. Dacă un pix costă 3,5 lei și un stilou 17,5 lei, determină câte pixuri și câte stilouri s-au cumpărat.

Rezolvare: Presupunem că au fost cumpărate numai stilouri.



- 20 · 17,5 = 350 de lei cheltuiți;
- 350 – 196 = 154 de lei utilizați în plus;
- 17,5 – 3,5 = 14 lei diferența de preț dintre un stilou și un pix;
- 154 : 14 = 11 pixuri s-au achiziționat;
- 20 – 11 = 9 stilouri cumpărate.

Rezolvă

1. Prin 3 robinete cu același debit, care curg împreună o oră, se acumulează o cantitate de 3616,5 ℓ de apă. Câți litri de apă vor curge prin 4 astfel de robinete, într-o oră?

2. Știind că 15 lalele costă 82,5 lei, cât costă 21 de lalele?

3. Pentru 5,4 m de mătase și 7,2 m de satin o croitoreasă a plătit 964,8 lei. Cu o altă ocazie, ea a plătit pentru 8,5 m de mătase și tot atâta satin suma de 1217,14 lei. Cât a costat un metru de mătase? Dar un metru de satin?

4. Rezolvarea unei teme la matematică ce conține 5 probleme și 6 exerciții necesită, în medie, 2,6 ore. Rezolvarea altei teme, alcătuită din 6 probleme și 5 exerciții, are nevoie de concentrare timp de aproximativ 2,9 ore. Câte minute durează rezolvarea unei probleme? Dar a unui exercițiu?

5. Daniel și cei doi frați mai mici ai săi au strâns în pușculiță 1108,5 lei. Dacă suma fratelui cel mai mic este de 3 ori mai mică decât a lui Daniel și cu 65,8 lei mai mică decât a celuilalt frate, află câți bani a strâns fiecare.

6. Suma a trei numere este 140,5. Al doilea este cu 22,2 mai mare decât dublul primului număr, iar al treilea este cu 33,3 mai mare decât primul număr. Determină numerele.

7. Elevii unei școli au plecat în tabără, astfel: 0,(6) dintre ei au plecat la Predeal, 0,25 din rest au plecat la Mamaia, iar restul de 54 de copii au plecat la Suceava. Câți elevi au fost plecați în tabără din acea școală?

8. Mă gândesc la un număr, pe care îl scad din 1,2; dublez rezultatul, pe care îl scad din 9,4. Îl împart pe 11,18 la ultimul rezultat aflat și obțin 1,3. Care este numărul la care m-am gândit?

9. Ana plătește pentru 12 kg de fructe 55,6 lei. Dacă prețul este 4,2 lei pentru un kg de portocale și 5,5 lei pentru unul de banane, află câte kilograme din fiecare fel a cumpărat Ana.

10. Pentru finalizarea casei de vacanță, Mihai comandă 22 de elemente de tâmplărie – ferestre și uși, pentru care plătește 2751,2 euro. Știind că o fereastră costă 110,8 euro, iar o ușă 155,6 euro, determină câte ferestre și câte uși a comandat.

Evaluează-te

1. Amalia a alergat 5,8 km în 34,8 minute. Dacă ar păstra viteza de alergare, în cât timp ar parcurge 4,4 km?

3 puncte

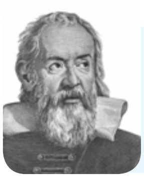
2. Bunica a pregătit 16,05 kg de dulceață pe care o păstrează în 21 de borcane, unele de 0,8 kg, iar altele de 0,75 kg. Câte borcane din fiecare fel sunt în cămara bunicii?

3 puncte

3. Suma a trei numere este 200,76. Primul număr este de 5 ori mai mare decât al treilea, iar al doilea cu 88,13 mai mare decât al treilea. Determină numerele.

3 puncte
Din oficiu: 1 punct

Marea carte a naturii poate fi citită doar de cei ce știu limba în care a fost scrisă.
Și această limbă este matematica.



Galileo Galilei (15 februarie 1564 – 8 ianuarie 1642) a fost un fizician, matematician, astronom și filozof italian. Printre realizările sale se numără îmbunătățirea telescoapelor.

V.9. PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR. FRECVENȚĂ. DATE STATISTICE ORGANIZATE ÎN TABELE, GRAFICE CU BARE ȘI/SAU CU LINII. MEDIA UNUI SET DE DATE STATISTICE

Descoperă

Fiind reprezentanta clasei, Elena realizează un sondaj printre colegi, pentru a afla disciplinele lor preferate. În clasă sunt 25 de elevi.

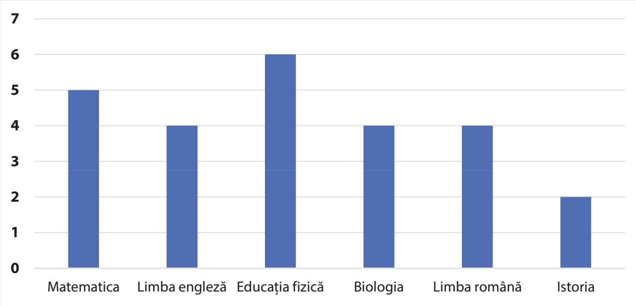
Ce observi?

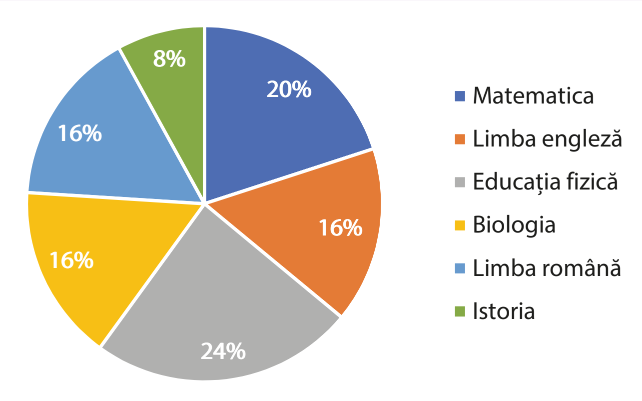
- Sondajul Elenei studiază o anumită *caracteristică* a colegilor săi, și anume, disciplina preferată, valorile acesteia fiind: „Matematica”, „Limba engleză”, „Educația fizică”, „Biologia”, „Limba română”, „Istoria”.
- Elena folosește un tabel al frecvențelor pentru a înregistra și a organiza datele colectate.
- Dintre cei 25 de elevi ai clasei, 5 au spus că Matematica este disciplina lor preferată. Numărul natural 5 reprezintă frecvența absolută cu care apare acest răspuns. Dar, raportat la numărul total al elevilor clasei, Matematica este preferată de $\frac{5}{25}$ din elevi, adică de 20% dintre aceștia.

Fracția $\frac{5}{25}$ sau procentul 20% reprezintă frecvența relativă.

- În tabelul frecvențelor, Elena a trecut și frecvențele absolute, și frecvențele relative ale caracteristicilor studiate.
- Datele colectate au fost apoi prelucrate și reprezentate într-un grafic cu bare verticale. Analizând acest grafic, se poate observa cu ușurință că disciplina preferată de cei mai mulți dintre elevii clasei este Educația fizică, iar cea mai puțin preferată este Istoria. Frecvențele relative le-a reprezentat apoi într-o diagramă circulară.

Disciplina preferată	Numărul elevilor	Procent
Matematica	5	20%
Limba engleză	4	16%
Educația fizică	6	24%
Biologia	4	16%
Limba română	4	16%
Istoria	2	8%





Reține!

Organizarea datelor reprezintă un proces de identificare, ordonare, evaluare și măsurare a unor informații.

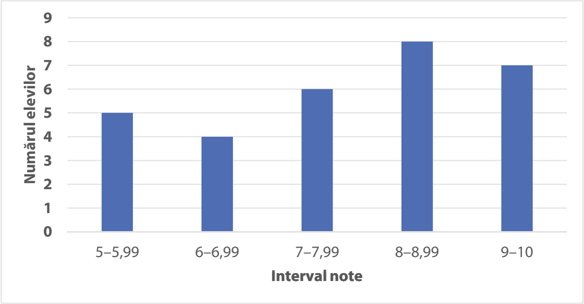
Numărul natural care arată câți din totalul celor care participă la un studiu îndeplinesc o anumită caracteristică se numește **frecvență**.

Reprezentarea datelor și a frecvențelor se poate realiza prin tabele, grafice, diagrame etc.

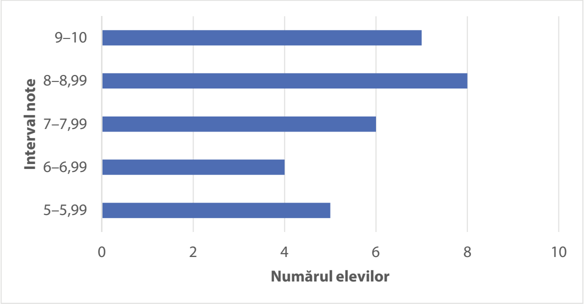
Graficele cu bare se folosesc atunci când se compară date despre obiecte de tipuri diferite. Se pot folosi grafice cu bare verticale, orizontale etc.

Exemplu: La teza din semestrul I la Matematică, elevii clasei a V-a au obținut următoarele rezultate:

Interval note	5–5,99	6–6,99	7–7,99	8–8,99	9–10
Numărul elevilor	5	4	6	8	7



Grafic cu bare verticale



Grafic cu bare orizontale

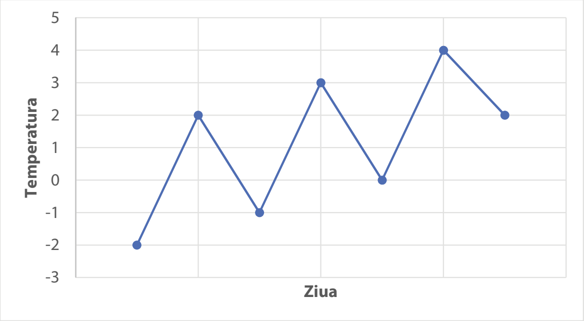
Graficele cu linii se folosesc atunci când se compară date despre același obiect/proces, de-a lungul unei perioade.

Exemplu: Putem reprezenta într-un grafic cu linii evoluția temperaturii timp de o săptămână:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (în grade Celsius)	−2	+2	−1	+3	0	+4	+2

În graficele cu linii, valorile sunt reprezentate prin puncte. Dacă punctele respective se unesc prin segmente, se poate observa tendința de creștere sau descreștere a valorilor mărimilor reprezentate.

În Word sau în Excel, pentru realizarea graficelor procedăm astfel: trecem datele într-un tabel, selectăm tabelul și, din meniul Insert (Inserare) alegem opțiunea Charts (Diagramă), apoi tipul de grafic dorit.



Diagramele circulare se folosesc atunci când se cunoaște întregul, iar părțile întregului sunt exprimate procentual.

Media unui set de date statistice este media aritmetică a tuturor valorilor din setul de date:

$$M=\frac{v_1+v_2+...+v_n}{n}$$, unde $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt valorile datelor.

Dacă în setul de date valorile acestora apar de mai multe ori, media este egală cu:

$$M=\frac{v_1\cdot f_1+v_2\cdot f_2+...+v_n\cdot f_n}{f_1+f_2+...+f_n},$$

unde $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt valorile datelor statistice, iar $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt frecvențele acestora.

Exersează

Mediile obținute de elevii clasei a V-a, la sfârșitul semestrului I, la Matematică, sunt expuse în următorul tabel:

Media	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	2	3	6	8	6	5

a) Calculează media clasei.

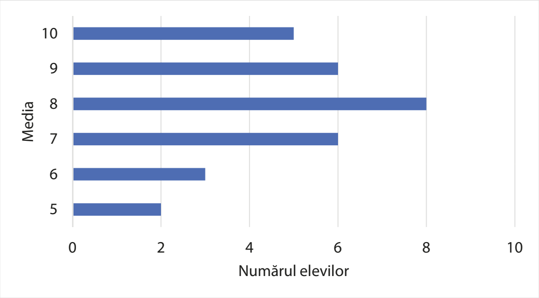
b) Reprezintă frecvența notelor printr-un grafic.

Rezolvare:

a) $M = \dfrac{5\cdot2+6\cdot3+7\cdot6+8\cdot8+9\cdot6+10\cdot5}{2+3+6+8+6+5} =$

$= \dfrac{10+18+42+64+54+50}{30} = \dfrac{238}{30} = 7{,}9(3).$

b)



Rezolvă

1. Maria a realizat un sondaj de opinie despre sportul preferat al colegilor ei de clasă. Rezultatele le-a centralizat în următorul tabel:

Sportul	Băieți	Fete	Total
Fotbal	12	1	13
Baschet	4	5	9
Volei	2	6	8

a) Care este sportul preferat de elevii clasei?

b) Care este frecvența elevilor care preferă baschetul?

c) Ce procent dintre elevi preferă voleiul?

2. Într-o școală sunt 400 de elevi la gimnaziu, repartizați pe clase astfel:

Clasa	Numărul elevilor
a V-a	98
a VI-a	108
a VII-a	105
a VIII-a	89

a) Care clasă are numărul cel mai mare de elevi? Dar cel mai mic?

b) Ce procent reprezintă elevii de clasa a V-a din total?

c) Reprezintă printr-o diagramă cu linii datele din tabel.

3. La un test de evaluare, elevii unei clase au obținut următoarele rezultate:

Nota	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	4	3	5	6	7	5

a) Calculează media clasei.

b) Ce notă a avut cea mai mare frecvență?

c) Reprezintă printr-o diagramă cu bare notele elevilor.

4. Mama a cumpărat pentru zacuscă următoarele cantități de legume: 4 kg de roșii la 2,2 lei kilogramul, 6 kg de vinete la 1,8 lei kilogramul, 3 kg de ceapă la 1,5 lei kilogramul, 5 kg de ardei la 4,5 lei kilogramul.

a) Reprezintă într-un tabel datele problemei.

b) Calculează câte kilograme de legume a cumpărat mama în total.

c) Cât au costat toate legumele?
d) Care este prețul mediu al unui kilogram de legume?

5. Într-o zi, la anumite ore, s-au înregistrat următoarele temperaturi:

Ora	7	9	11	14	17	19	21
Temperatura	1°C	2°C	5°C	9°C	6°C	4°C	2°C

a) La ce oră s-a înregistrat cea mai mică temperatură? Dar cea mai mare?
b) Calculează cu două zecimale media temperaturilor zilei.
c) Reprezintă într-o diagramă aceste date.

Evaluează-te

La sfârșitul semestrului I, elevii unei clase au obținut următoarele medii la matematică:

Media	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	2	4	6	7	8	3

1. Care este media cu frecvența cea mai mare? **3 puncte**

2. Câți elevi sunt în clasă? Câți elevi au obținut medii de cel puțin 8? **3 puncte**

3. Calculează media clasei. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

Activitate în echipă

Împreună cu colegii din clasa ta, realizați un sondaj de opinie în rândul elevilor de clasa a V-a din școala voastră.

1. **Organizați** datele colectate într-un tabel:

Numele elevului	**Băiat/Fată**	**Vârsta**	**Înălțimea**	**Greutatea**	**Sportul practicat**

2. **Analizați** datele obținute:
- Care este frecvența apariției numărului de fete/băieți?
- Câți elevi au aceeași vârstă și care este media de vârstă?
- Care este media de înălțime a fetelor/băieților?
- Câți dintre elevi practică înotul?

3. **Reprezentați** datele obținute:
- Realizați un grafic cu bare orizontale pentru a reprezenta numărul fetelor și numărul băieților care practică handbalul/voleiul etc.
- Realizați grafice cu linii pentru a reprezenta repartiția colegilor în funcție de vârstă/intervale de înălțime (cm)/intervale de greutate (kg).
- Realizați o diagramă circulară în care să reprezentați procentele elevilor în funcție de sportul practicat.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Fracția ordinară $\frac{13}{10}$, transformată în fracție zecimală, este egală cu:
a) 1,3; **b)** 1,03; **c)** 0,13; **d)** 3,1.

(5p) **2.** Fracția zecimală 23,04, transformată în fracție ordinară, este egală cu:
a) $\frac{2304}{10}$; **b)** $\frac{2304}{1000}$; **c)** $\frac{2304}{100}$; **d)** $\frac{2403}{100}$.

(5p) **3.** Fracția zecimală 8,(23), transformată în fracție ordinară, este egală cu:
a) $\frac{823}{99}$; **b)** $\frac{815}{99}$; **c)** $\frac{815}{90}$; **d)** $\frac{800}{99}$.

(5p) **4.** Fracția ordinară $\frac{14}{6}$, transformată în fracție zecimală, este egală cu:
a) 2,(03); **b)** 2,0(3); **c)** 2,(30); **d)** 2,(3).

(5p) **5.** Fracția zecimală 1,6(3), transformată în fracție ordinară ireductibilă, este egală cu:
a) $\frac{49}{30}$; **b)** $\frac{49}{33}$; **c)** $\frac{9}{5}$; **d)** $\frac{18}{11}$.

(5p) **6.** Dintre numerele 7,6(23); 7,(623); 7,623 și 7,62(3), cel mai mare este:
a) 7,6(23); **b)** 7,623; **c)** 7,62(3); **d)** 7,(623).

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Media aritmetică a numerelor 8,7; 15,2 și 20,5 este:
a) 14,88; **b)** 18,4; **c)** 14,8; **d)** 14,08.

(5p) **2.** Rotunjind la zecimi rezultatul calculului 11,9 + 3,67 – 2,6 obții:
a) 12,98; **b)** 13; **c)** 13,9; **d)** 12.

(5p) **3.** Rezultatul calculului 41,25 : 0,5 · 0,01 este egal cu:
a) 82,5; **b)** 8,025; **c)** 0,852; **d)** 0,825.

(5p) **4.** Produsul dintre suma și diferența numerelor 5,5 și 2,25 este egal cu:
a) 25,1875; **b)** 2518,75; **c)** 251,875; **d)** 12,375.

(5p) **5.** Rezultatul calculului 21,(36) + 5,(72) este egal cu:
a) 27,(90); **b)** 26,(108); **c)** 27,09; **d)** 27,(09).

(5p) **6.** Mediile obținute de elevii clasei a V-a, la sfârșitul semestrului I, la Matematică, sunt expuse în tabelul alăturat. Media clasei este:

Media	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	4	3	8	5	7	6

a) 7,78; **b)** 7,(87); **c)** 7,(78); **d)** 7,87.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

(10p) **1.** Calculează:
a) $(7{,}5 : 10 + 0{,}4^2) \cdot 20$; **b)** $\left[3{,}2+2{,}(3)\cdot\frac{3}{7}\right]+25:10$.

(10p) **2.** Precizează a 50-a zecimală a fracției zecimale 3,2(57).

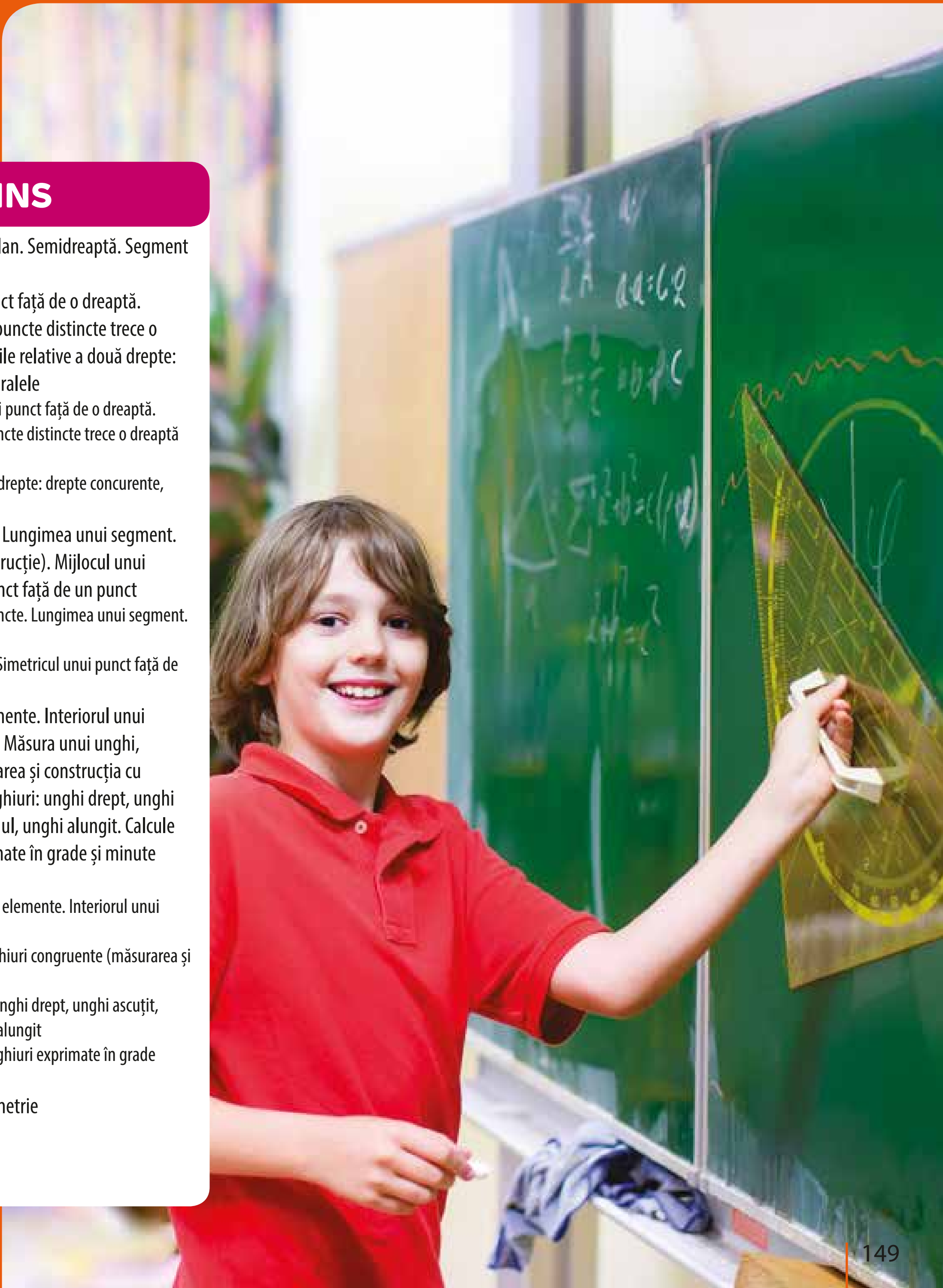
(10p) **3.** Un stilou și un creion costă 37,6 lei. Cât costă fiecare, dacă stiloul este de trei ori mai scump decât creionul?

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

6

UNITATEA VI

Elemente de geometrie



CUPRINS

Geometria este cea mai bună și mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecății și rațiunii.

Denis Diderot (5 octombrie 1713 – 31 iulie 1784) a fost filozof și scriitor francez. A primit o educație iezuită și a renunțat la o carieră în drept, dedicându-se studiului și scrisului.

VI.1. PUNCT. DREAPTĂ. PLAN. SEMIPLAN. SEMIDREAPTĂ. SEGMENT DE DREAPTĂ

Descoperă

Geometria (în limba greacă, *geo* = pământ, *metron* = măsură) este o ramură a matematicii care studiază formele și proprietățile corpurilor, precum și raporturile lor spațiale. Un fragment scris de istoricul Eudem din Rhodos (328 î.Hr.) este demn de luare-aminte: „*...geometria a fost inventată mai întâi de egipteni, avându-și originea în măsurarea câmpurilor... și să nu ne mirăm că la originea apariției atât a acesteia, cât și a altor științe stă necesitatea, deoarece tot ce este supus nașterii evoluează de la imperfect la perfect, de la senzație la raționament*".

Având în vedere că la începuturi nu exista nicio noțiune legată de această ramură a matematicii, s-au introdus conceptele de punct, dreaptă și plan, elemente fundamentale ale geometriei. Astfel, nu putem avea definiții strict științifice, ci vom avea definiții „imaginare".

Reține!

- **Punctul** (din latină, *punctum* = înțepătură) ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată de vârful unui ac pe o coală de hârtie. El nu are dimensiuni (lungime, lățime, grosime).

	desenezi	notezi	citești
Punctele se notează cu litere mari de tipar din alfabetul latin (*A, B, C, ...*) și se desenează „×" (ulterior vom înțelege de unde provine reprezentarea punctului în acest mod).	× *A*	*A*	punctul *A*
Punctele pot fi: – **identice (confundate)**, adică puncte care ocupă același loc în plan;	× *A, B*	$A = B$	punctul *A* este identic cu punctul *B*
– **distincte (diferite)**, puncte care ocupă locuri diferite în plan.	× *A* × *B*	$A \neq B$	punctul *A* este diferit de punctul *B*

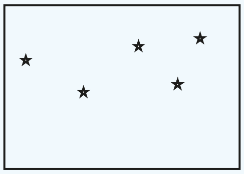
Observație: Punctele se mai pot nota utilizând indici A_1, A_2 etc. și citim „punctul *A* unu, punctul *A* doi etc.) sau *A'*, *A"* și citim „punctul *A* prim, respectiv punctul *A* secund".

- O mulțime de puncte formează o figură geometrică. Cea mai simplă figură geometrică este punctul. Așadar, putem spune că punctul este figura geometrică ce are un singur element!

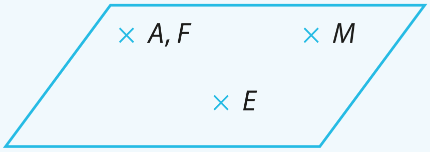
Exersează

1. Într-o noapte senină de vară admirăm pe cer mii de stele și ne întrebăm: ce reprezintă ele din punct de vedere geometric?

Rezolvare: Din punct de vedere geometric, datorită distanței foarte mari de la care le percepem, stelele admirate de noi sunt puncte distincte.



2. Privește figura de mai jos, identifică și notează perechi de puncte identice și perechi de puncte distincte.



Rezolvare: În figura dată identificăm următoarele perechi de puncte:

- puncte identice (confundate): $A = F$;
- puncte distincte (diferite): $A \neq E$, $A \neq M$, $F \neq E$, $F \neq M$, $E \neq M$.

Descoperă

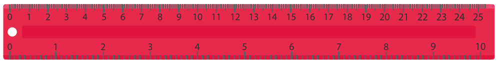
Să ne imaginăm că desenăm în linie punct lângă punct, punct după punct, repetând operația aceasta de foarte multe ori, până când nu mai distingem spații între ele. Putem afirma că în acest mod obținem o dreaptă!

Reține!

	desenezi	notezi	citești
▪ **Dreapta** ne-o imaginăm ca pe un fir de ață bine întins și de lungime infinită (fără lățime și grosime). Dreapta se notează cu litere mici ale alfabetului latin sau cu ajutorul a două puncte situate pe ea.		*d*	dreapta *d*
		*AB*	dreapta *AB*

Observație: În notarea dreptelor se pot utiliza și indici. Exemple: d_1, d_2.

- Instrumentul geometric folosit pentru desenarea dreptelor este **rigla**.



Exersează

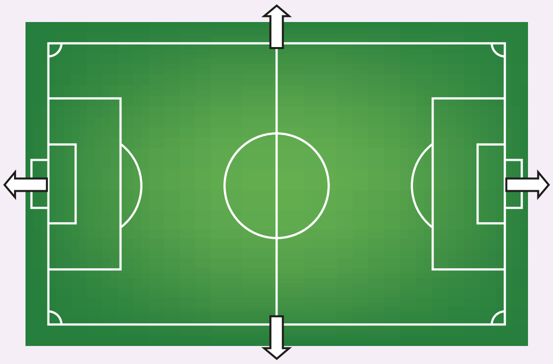
Privește figura de mai jos și precizează cum se notează corect dreapta reprezentată.

Rezolvare: Dreapta din figură se poate nota: *a*, *AE*, *AM*, *EM*, *MA*, *ME* sau *EA*.

Descoperă

Privește terenul de fotbal și imaginează-ți că se poate prelungi, astfel încât să fie nelimitat în orice direcție. Astfel, putem avea o imagine a unui plan.

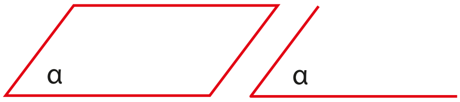
Planul este cel de al treilea element fundamental al geometriei.



Reține!

- **Planul** ni-l imaginăm ca fiind suprafața unei ape liniștite, de lungime și lățime infinite (fără grosime). Planele se notează cu litere mici ale alfabetului grecesc (α – alfa, β – beta, γ – gama, π – pi).

Observație: În clasa a VIII-a vei învăța despre determinarea planului, mai exact despre cine determină un plan.

desenezi	notezi	citești
	α	planul α

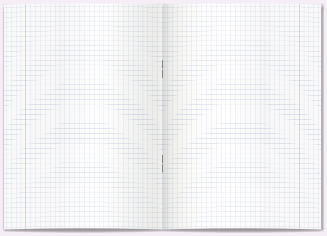
Exersează

Suprafața unui patinoar poate fi considerată un plan? Justifică.

Rezolvare: Suprafața unui patinoar nu poate fi considerată un plan, deoarece este limitată. Planul este nelimitat!

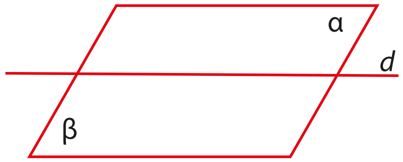
Descoperă

Imaginează-ți caietul de matematică deschis și presupune că este nelimitat în toate direcțiile (consideră că este un plan). Presupune apoi că linia de mijloc a caietului este nelimitată, deci este o dreaptă. Această dreaptă împarte caietul (planul) în două părți numite semiplane.



Reține!

- Dacă într-un plan trasăm o dreaptă, aceasta va împărți planul în două **semiplane** distincte. Dreapta care delimitează cele două semiplane se numește **frontiera** fiecăruia dintre cele două semiplane.

desenezi	citești
	semiplanul α semiplanul β

Descoperă

La începutul anului școlar ai învățat despre axa numerelor, care este o dreaptă cu trei elemente: origine, sens pozitiv și unitate de măsură.

Punctul *O* împarte axa numerelor în două semidrepte, una spre punctul *A* și una spre punctul *B*.

Reține!

- **Semidreapta** este o porțiune dintr-o dreaptă limitată doar la un capăt, numit **originea** semidreptei. Semidreapta nu se poate măsura, deoarece este limitată la un capăt, dar infinită la celălalt capăt.

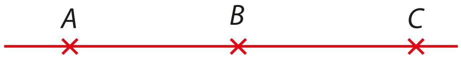
Pentru a putea citi o semidreaptă este necesar să știm originea și un punct situat pe ea, diferit de origine.

desenezi	notezi	citești
	*OA*	semidreapta *OA*

Observație: Prima literă în citirea unei semidrepte este originea, iar a doua literă precizează „direcția" și „sensul" în care „merge" semidreapta.

- Două semidrepte se numesc **semidrepte opuse**, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:
  - – sunt situate pe aceeași dreaptă;
  - – au aceeași origine;
  - – nu au puncte comune (exceptând originea).
- Două semidrepte se numesc **semidrepte identice** (**confundate**), dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:
  - – sunt situate pe aceeași dreaptă;
  - – au aceeași origine;
  - – au toate punctele comune.

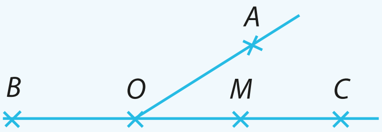
Exemple: *BA* și *BC* sunt semidrepte opuse;
AB și *AC* sunt semidrepte identice.



- Două semidrepte care nu sunt nici identice, nici opuse se numesc **semidrepte diferite**.

Exersează

Analizează figura de mai jos și precizează: două semidrepte opuse, două semidrepte identice și două semidrepte diferite (justifică răspunsul).

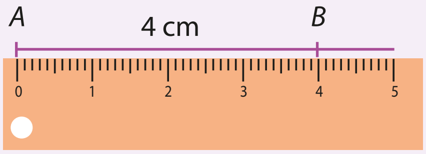


Rezolvare:

- semidrepte opuse: *OB* cu *OC* sau *MB* cu *MC*;
- semidrepte identice: *OM* cu *OC* sau *CO* cu *CB*;
- semidrepte diferite: *OA* cu *OM*, deoarece nu sunt situate pe aceeași dreaptă; *BM* cu *OM*, deoarece nu au aceeași origine; *MB* cu *OC*, deoarece nu au aceeași origine și au în comun numai o parte dintre puncte.

Descoperă

Considerăm o dreaptă pe care așezăm două puncte distincte *A* și *B*. Putem măsura distanța dintre ele cu ajutorul riglei gradate, deci obținem o figură geometrică măsurabilă, numită segment de dreaptă sau, mai simplu, segment.



Reține!

Segmentul este o porțiune dintr-o dreaptă, limitată la ambele capete. Punctele care delimitează segmentul se numesc **capetele** sau **extremitățile** segmentului.

desenezi	notezi	citești
	*AB* *BA*	segmentul *AB* segmentul *BA*

Exersează

Pe dreapta *d* se iau punctele *D*, *E*, *F*, *G* și *H*, astfel încât *D* aparține segmentului *FH*, *H* aparține segmentului *DG* și *G* aparține segmentului *HE*. Stabilește care este ordinea punctelor pe dreaptă.

Rezolvare:

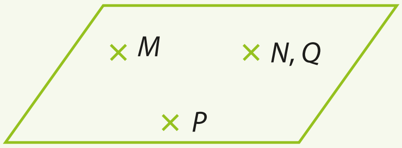
Ținând cont de prima dintre cele trei relații, se desenează mai întâi dreapta *d*, apoi se fixează punctul *D* între punctele *F* și *H*. Conform celei de-a doua relații, se așază pe dreaptă în continuare punctul *G* și, ulterior, punctul *E*. Deci, ordinea punctelor pe dreaptă va fi: *F*, *D*, *H*, *G*, *E*.

Rezolvă

1. Privește în jurul tău și numește obiecte care pot reprezenta puncte, drepte, plane.

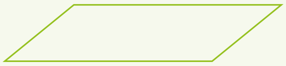
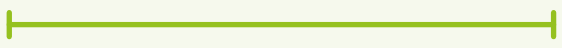
2. Desenează și notează:
a) două puncte identice (confundate), *M* și *P*;
b) două puncte distincte (diferite), *D* și *E*.

3. În figura alăturată, precizează perechi de puncte identice (confundate) și perechi de puncte distincte (diferite).

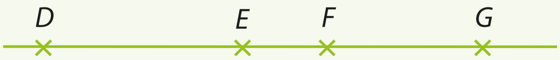


4. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
- ☐ Punctul nu are dimensiuni (lungime, lățime, grosime).
- ☐ Dreapta este formată dintr-un număr finit de puncte.
- ☐ Planul este nelimitat în orice direcție.
- ☐ Dreapta care împarte un plan în două semiplane se numește frontieră.
- ☐ Semidreapta este o porțiune dintr-o dreaptă, limitată la ambele capete.
- ☐ Punctele care delimitează un segment se numesc capetele sau extremitățile segmentului.

5. Asociază fiecărui desen din coloana A denumirea corespunzătoare din coloana B.

A	B
1. 	a) plan;
2. 	b) segment;
3. 	c) dreaptă;
4. 	d) punct;
5. 	e) semidreaptă.

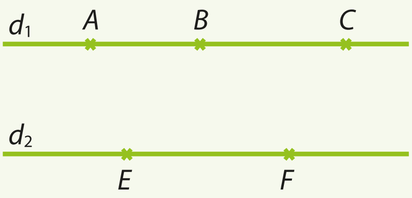
6. Câte segmente sunt în figura de mai jos? Notează-le.



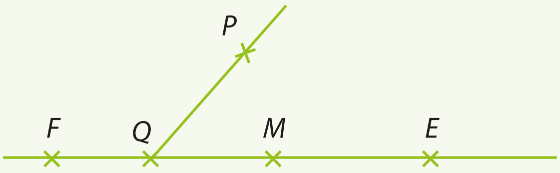
7. Privește figura din dreapta. Pe dreapta d_1 se consideră punctele *A*, *B* și *C*, iar pe dreapta d_2 se consideră punctele *E* și *F*.

a) Câte segmente au drept extremități două dintre cele cinci puncte?

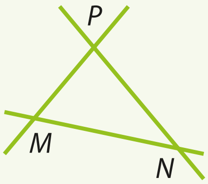
b) Câte drepte determină aceste puncte, luate două câte două?



8. Studiază desenul alăturat și precizează două semidrepte opuse, două semidrepte identice și două semidrepte diferite. Justifică răspunsul.



9. În figura alăturată, identificați și numiți:
a) trei drepte;
b) șase semidrepte;
c) trei segmente.

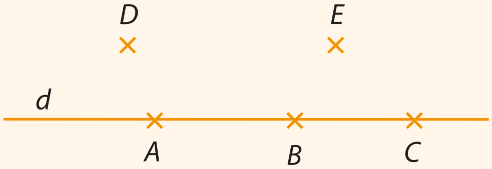


10. Desenează patru puncte distincte *M*, *N*, *P*, *Q*. Desenează toate segmentele determinate de aceste puncte și precizează numărul lor.

Evaluează-te

1. Desenează două segmente *AB* și *CD* care să aibă un singur punct comun. **3 puncte**

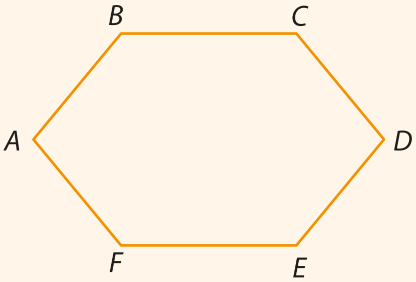
2. Analizează desenul următor și stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:



☐ Punctul *C* este originea semidreptei *BC*.
☐ *E* = *D*.
☐ Semidreptele *AB* și *AC* sunt identice.
☐ Semidreptele *BA* și *BC* sunt semidrepte opuse.

3 puncte

3. Câte segmente sunt în desenul de mai jos? Precizează-le!

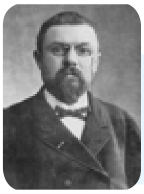


3 puncte
Din oficiu: 1 punct

FIȘA DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ELEVULUI:

	DA	NU
1. A desenat corect cele două segmente.		
2. A stabilit corect valoarea de adevăr a celor patru propoziții.		
3. A precizat corect numărul segmentelor din desen.		

Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte.



Henri Poincaré (29 aprilie 1854 – 17 iulie 1912), matematican francez, profesor universitar la Paris. A fost fondator al topologiei, una dintre cele mai importante ramuri ale matematicii. A publicat numeroase lucrări de matematică și de mecanică cerească.

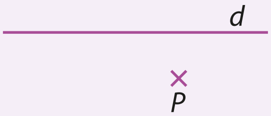
VI.2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. „Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele

VI.2.1. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. „Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”

Descoperă

Cum poate fi situat un punct față de o dreaptă? Aceasta este o întrebare simplă, la care putem răspunde dacă ne imaginăm că desenăm o dreaptă *d* și vrem să desenăm și un punct *P*. Unde îl putem desena?

Răspuns: Îl putem așeza pe dreaptă sau în exteriorul ei.



Reține!

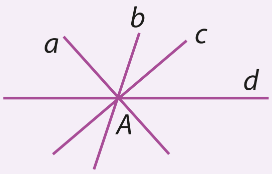
- Un punct poate fi situat pe o dreaptă, situație în care vom spune că este **punct interior dreptei** (punctul aparține dreptei), sau poate fi situat în afara dreptei, situație în care vom spune că este **punct exterior dreptei** (punctul nu aparține dreptei).

Descoperă

- Considerăm un punct *A*. Câte drepte putem construi care să treacă prin punctul *A*?

Răspunsul este evident: o infinitate de drepte!

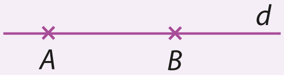
Concluzie: Printr-un punct se pot construi o infinitate de drepte.



- Considerăm acum două puncte distincte *A* și *B*. Câte drepte putem desena care să treacă, simultan, prin cele două puncte?

Răspuns: O singură dreaptă!

Este important să precizăm „o singură” dreaptă, deoarece așa vom înțelege că este unică!



Observație: În matematică întâlnim mai multe tipuri de propoziții matematice. Unele se demonstrează (justifică) pentru a arăta că sunt adevărate, altele sunt considerate a fi propoziții adevărate și sunt acceptate fără a fi demonstrate.

Reține!

Propozițiile matematice care sunt considerate adevărate fără a fi nevoie de nicio fundamentare și de nicio demonstrație se numesc axiome.

Așadar, prima axiomă pe care o învățăm este **axioma dreptei:** prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Evident că putem afirma și reciproc, adică orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte.

Descoperă

Continuăm cercetarea noastră privind punctele și dreptele și ne întrebăm: câte drepte putem construi prin trei puncte distincte?

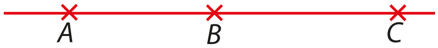
Analizând toate situațiile posibile și știind că două dintre puncte determină o singură dreaptă, ajungem la concluzia că al treilea punct poate fi situat pe dreapta determinată de cele două sau se poate afla în exteriorul ei.

Reține!

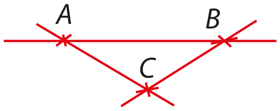
- Trei sau mai multe puncte situate pe aceeași dreaptă se numesc **puncte coliniare**. În caz contrar, adică dacă punctele nu sunt situate pe aceeași dreaptă, se numesc **puncte necoliniare**.

Acum putem răspunde la întrebarea „Câte drepte putem construi prin trei puncte distincte?”

Răspuns: Dacă punctele sunt coliniare, putem construi o singură dreaptă!



Dacă punctele sunt necoliniare, aplicând axioma dreptei, putem construi trei drepte!



Descoperă

Vom considera în continuare patru puncte A, B, C, D, oricare trei necoliniare. Câte drepte distincte determină aceste patru puncte?

Cel mai bine ar fi să le scriem, nu să le desenăm, deoarece cu cât numărul de puncte se mărește, cu atât va fi mai greu să le desenăm și să le numărăm!

Deci, punctele A, B, C, D, oricare trei necoliniare, vor determina dreptele:

AB	BC	$\underline{CD}$
AC	$\underline{BD}$	1
$\underline{AD}$	2	
3		

$\Rightarrow$ $1 + 2 + 3 = 6$ drepte

Observație: dreptele AC și CA sunt drepte identice!

Așadar, 4 puncte distincte, oricare 3 fiind necoliniare, determină $1 + 2 + 3 = 6$ drepte.

Considerăm acum cinci puncte A, B, C, D, E, oricare trei necoliniare, și repetăm procedeul:

AB	BC	CD	$\underline{DE}$
AC	BD	$\underline{CE}$	1
AD	$\underline{BE}$	2	
$\underline{AE}$	3		
4			

$\Rightarrow$ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ drepte

Din aceste două exemple putem observa că ultimul termen al sumei cu care calculăm numărul de drepte este cu 1 mai mic decât numărul de puncte, deci putem generaliza: fiind date n puncte, oricare trei necoliniare, numărul dreptelor distincte determinate de acestea este dat de suma:

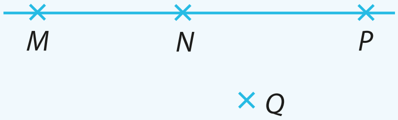
$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2}.$$

Exersează

1. Fiind date punctele distincte *M*, *N*, *P*, *Q*, stabilește numărul de drepte pe care le pot determina.
Rezolvare: Pentru început, observăm că nu s-a precizat că punctele sunt oricare trei necoliniare, deci trebuie să analizăm toate situațiile.

I. Cele patru puncte pot fi coliniare, deci ele vor determina o singură dreaptă.

II. Trei dintre puncte sunt coliniare, iar al patrulea este situat în exteriorul dreptei determinate de cele trei.



Avem dreapta *MP*, iar punctul *Q*, conform axiomei dreptei, determină cu punctele *M*, *N*, *P*, încă trei drepte: *QM*, *QN*, *QP*; în total avem 4 drepte.

III. Cele 4 puncte sunt oricare trei necoliniare. Aplicând formula anterioară obținem:

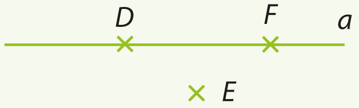
$$\frac{(4-1)\cdot 4}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6 \text{ drepte.}$$

2. Stabilește câte drepte distincte determină 100 de puncte, oricare trei necoliniare.

Rezolvare: Avem $1+2+3+\ldots+(100-1)=\frac{(100-1)\cdot 100}{2}=\frac{99\cdot 100}{2}=4\,950$ de drepte.

Rezolvă

1. Stabilește poziția punctelor *D*, *E* și *F* față de dreapta *a*, din desenul următor:



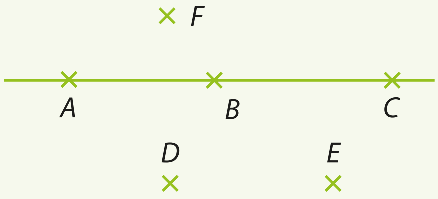
2. Desenează patru puncte *M*, *N*, *P*, *Q*, astfel încât punctul *N* să fie interior dreptei *QM*, iar punctul *P* să fie exterior dreptei *QM*.

3. Desenează o dreaptă *g*, un punct *F* situat pe dreapta *g*, un punct *D* exterior dreptei *g* și un punct *H* situat de aceeași parte a dreptei *g* ca și punctul *D*.

4. Desenează trei drepte distincte *d*, *f*, *g* care trec prin punctul *M*.

5. Analizează desenul de mai jos și stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

☐ Punctul *A* aparține dreptei *BC*.
☐ Punctele *D* și *E* sunt de aceeași parte a dreptei *AC*.
☐ Punctul *C* este punct interior dreptei *AB*.
☐ Punctul *F* este punct exterior dreptei *BC*.
☐ Punctul *A* este punct exterior dreptei *BC*.
☐ Punctele *E* și *F* sunt de o parte și de alta a dreptei *AC*.



6. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
a) Trei sau mai multe puncte situate pe aceeași dreaptă se numesc __________________ .
b) Prin două puncte distincte se poate duce __________________ dreaptă.
c) Un punct care aparține unei drepte se numește __________________ dreptei.

7. Câte drepte determină 6 puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare?

8. Câte drepte determină 50 de puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare?

9. Se consideră 7 puncte distincte. Stabilește numărul minim și numărul maxim de drepte determinate de cele 7 puncte.

10. Stabilește câte drepte determină 3 puncte distincte.

VI.2.2. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele

Descoperă

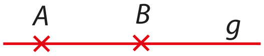
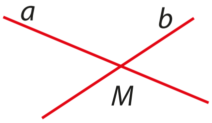
Privește imaginea!

Imaginează-ți că atât marcajele de pe stradă, cât și podul sunt drepte. Vom afirma că cele două drepte marcate cu alb sunt drepte coplanare, adică se află în același plan (planul străzii), iar podul și linia albă continuă sunt drepte necoplanare, adică nesituate în același plan.

Reține!

- Dreptele pot fi **coplanare** (situate în același plan) sau **necoplanare** (nesituate în același plan).

În continuare, deoarece până în clasa a VIII-a vom studia geometria plană, vom stabili pozițiile relative a două drepte coplanare.

Dreptele pot fi:	desenezi	notezi	citești
▪ identice (confundate);		$g = AB$	dreapta *g* este identică cu dreapta *AB*
▪ distincte (diferite): – *paralele* (dreptele care nu au niciun punct comun, oricât le-am prelungi);		$d \parallel g$	dreapta *d* este paralelă cu dreapta *g*
– *concurente* sau *secante* (au un singur punct comun).			dreapta *a* este concurentă cu dreapta *b* în punctul *M*

Observație: Acum putem înțelege de ce notația pentru punct este ×.

- Un caz particular al dreptelor concurente sunt dreptele perpendiculare (care formează unghiuri drepte/colțuri).

De exemplu: marginile unui teren de tenis, șinele de tren și traversele, marginile monitorului etc.

Rezolvă

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Două drepte care nu au niciun punct comun se numesc drepte ______________ .

b) Două drepte care au un singur punct comun se numesc drepte ______________.

c) Dreptele care sunt situate în același plan se numesc drepte ______________.

2. Desenează trei drepte, *d*, *f* și *g*, concurente două câte două.

3. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

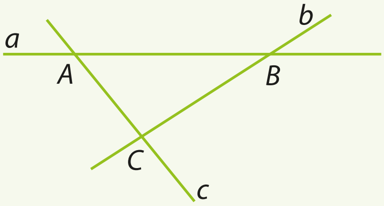
☐ Două drepte care au două puncte comune se numesc drepte concurente.
☐ Dreptele situate în același plan se numesc drepte coplanare.
☐ Dreptele paralele sunt coplanare.

4. Desenează patru drepte *a*, *b*, *c* și *d*, astfel încât să fie îndeplinite condițiile:
i) dreptele *a* și *b* sunt paralele;
ii) dreptele *a* și *c* sunt concurente în punctul *M*;
iii) punctul *M* este situat pe dreapta *d*.

5. Desenează o dreaptă *g* și un punct *F* exterior dreptei. Construiește o paralelă prin *F* la dreapta *g*. Câte drepte paralele cu dreapta *g* se pot construi prin punctul *F*?

6. Analizează desenul și stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

☐ $a \parallel c$.
☐ Dreptele *b* și *c* sunt concurente în punctul *C*.
☐ Dreptele *a*, *b* și *c* sunt concurente.
☐ Punctul *A* aparține dreptei *b*.
☐ Dreptele *a* și *c* sunt concurente în punctul *B*.



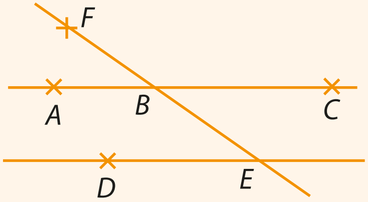
7. Ce tipuri de drepte identifici în scrierea cu cifre romane a numărului 12 = XII?

8. Ce tipuri de drepte identifici în imaginea de mai jos?

Evaluează-te

1. Analizează desenul de mai jos și stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

☐ Punctul *A* aparține dreptei *BC*.
☐ Punctele *D* și *E* sunt de aceeași parte a dreptei *AC*.
☐ Dreptele *AB* și *DE* sunt paralele.
☐ Dreptele *EF* și *BC* sunt concurente.
☐ Punctul *A* este punct exterior dreptei *BC*.
☐ Punctele *E* și *F* sunt de o parte și de alta a dreptei *AB*.



3 puncte

2. **a)** Câte drepte determină 5 puncte, oricare trei necoliniare?
b) Stabilește numărul minim și numărul maxim de drepte determinate de 100 de puncte distincte. Justifică răspunsul, precizând poziția punctelor în fiecare dintre cele două situații. **3 puncte**

3. Precizează patru domenii de activitate în care poți identifica imagini cu drepte paralele.

3 puncte
Din oficiu: 1 punct

Natura pare să profite de simple reprezentări matematice ale legilor de simetrie.

Chen Ning Yang (22 septembrie 1922) este un fizician american de origine chineză, care a lucrat în domeniul mecanicii statistice și principiilor de simetrie, laureat al Premiului Nobel pentru Fizică în 1957, la 35 de ani, împreună cu Tsung-Dao Lee.

VI.3. DISTANȚA DINTRE DOUĂ PUNCTE. LUNGIMEA UNUI SEGMENT. SEGMENTE CONGRUENTE (CONSTRUCȚIE). MIJLOCUL UNUI SEGMENT. SIMETRICUL UNUI PUNCT FAȚĂ DE UN PUNCT

VI.3.1. Distanța dintre două puncte. Lungimea unui segment. Segmente congruente

Descoperă

Atunci când vorbim despre distanța de la Pământ la Lună, imaginându-ne că acestea sunt două puncte, înțelegem că este vorba despre lungimea segmentului care unește cele două puncte.

Reține!

- Prin **distanța dintre două puncte** înțelegem lungimea segmentului care le unește.

Acum, că am definit noțiunea de distanță, ne putem pune câteva întrebări: ce înseamnă a măsura o distanță, cum măsurăm lungimea unui segment, cum procedăm? Vom încerca să ne lămurim împreună și să căutăm răspunsuri la aceste întrebări!

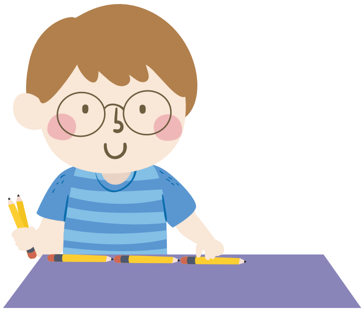
- **A măsura** o lungime înseamnă a o compara cu o unitate de măsură aleasă arbitrar. În situația în care nu avem la îndemână o riglă gradată, ne putem alege ca unitate de măsură un creion, palma, pasul, un alt segment mai mic etc. și vom vedea de câte ori se cuprinde în lungimea obiectului pe care vrem să îl măsurăm.

De exemplu, un elev măsoară lungimea băncii sale. El ia creionul și îl așază pe bancă, în așa fel încât un capăt al creionului să coincidă cu unul din capetele băncii, apoi marchează un semn la capătul celălalt al creionului și continuă operația.

La final, elevul afirmă că lungimea este de 20 de creioane!

Colegul de bancă măsoară și el cu creionul său și obține lungimea de 18 creioane!

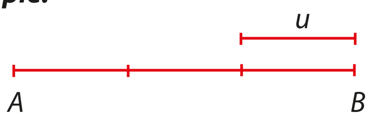
Ce nu este în regulă? Lungimea băncii este aceeași, dar s-au obținut valori diferite, deoarece unitățile de măsură alese au lungimi diferite. Deci este foarte important să precizăm unitatea de măsură aleasă!

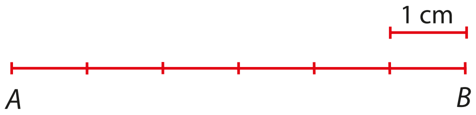


- **Lungimea unui segment** este un număr. Lungimea segmentului *AB* se notează *AB*.

Observație: Notația pentru lungimea unui segment nu poate fi confundată cu notația pentru dreaptă, deoarece va fi urmată de un număr, iar dreapta nu este măsurabilă!

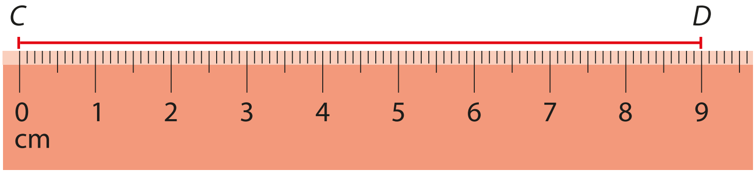
Exemple:





Notăm: $AB = 3\,u$, respectiv $AB = 6$ cm.

Instrumentul geometric pentru măsurarea lungimii unui segment este rigla gradată. Măsurarea acesteia se realizează după cum urmează: așezăm rigla de-a lungul segmentului, astfel încât diviziunea 0 să fie în dreptul unui capăt al segmentului și apoi citim numărul din dreptul celuilalt capăt al segmentului, ca în imaginea de mai jos.



Vom spune că lungimea segmentului CD este de 9 cm și vom nota $CD = 9$ cm.

- Două segmente care au aceeași lungime se numesc **segmente congruente**.

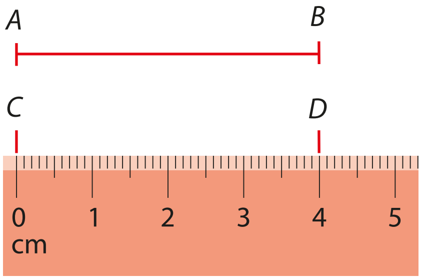
Practic, putem afirma că două segmente sunt congruente dacă prin suprapunere coincid dar, în rezolvarea problemelor, acest lucru nu este realizabil.

desenezi	notezi	citești
	$AB \equiv CD$	segmentul AB este congruent cu segmentul CD
	$AB = CD$	lungimea segmentului AB este egală cu lungimea segmentului CD

Cum desenăm două segmente congruente?

Metoda I (cu ajutorul riglei gradate):

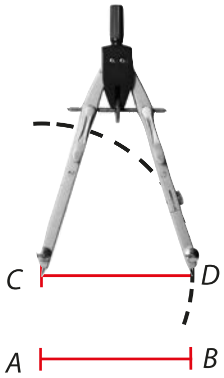
- desenăm un segment AB de lungime 4 cm;
- fixăm un punct C și, cu ajutorul riglei gradate, cu diviziunea 0 în punctul C, măsurăm 4 cm;
- în dreptul diviziunii 4 de pe riglă, desenăm punctul D;
- unim punctul C cu punctul D și astfel vom obține segmentul CD congruent cu segmentul AB.



Vom nota $AB \equiv CD$ deoarece $AB = CD = 4$ cm.

Metoda a II-a (cu ajutorul compasului):

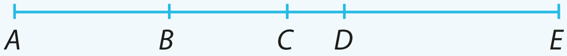
- considerăm un segment AB de lungime 2 cm;
- luăm în deschiderea compasului segmentul AB;
- pe o semidreaptă oarecare cu originea în punctul C venim cu compasul, fixăm acul în punctul C și trasăm un mic arc de cerc; vom nota cu D punctul în care arcul de cerc va intersecta semidreapta;
- obținem astfel segmentul $CD \equiv AB$.



- Putem determina lungimea unui segment și ca segment-sumă de două sau mai multe segmente sau ca segment-diferență de două segmente. Evident, vom face operații cu lungimile lor!

Exersează

1. În desenul de mai jos cunoaştem $AB = 2$ cm, $BC = 1{,}5$ cm, $CD = 0{,}7$ cm şi $AE = 7{,}2$ cm. Calculează lungimile segmentelor BE, BD, DE, CE şi AC.



Rezolvare:

Observăm că segmentul BE poate fi format din $BC + CD + DE$ sau $BD + DE$ sau $BC + CE$ sau $AE - AB$.

Alegem varianta care ne convine, în funcţie de valorile pe care le cunoaştem. Vom exprima segmentul BE ca segment-diferenţă: $BE = AE - AB = 7{,}2 - 2 = 5{,}2$ cm.

Urmărim desenul şi calculăm lungimile celorlalte segmente.

$$BD = BC + CD = 1{,}5 + 0{,}7 = 2{,}2 \text{ cm}.$$

Observăm că segmentul DE nu poate fi exprimat ca segment-sumă, deoarece nu există niciun punct interior segmentului.

$$DE = BE - BD = 5{,}2 - 2{,}2 = 3 \text{ cm}.$$

Pentru aflarea lungimii segmentelor CE şi AC vom utiliza varianta de exprimare ca segment-sumă:

$$CE = CD + DE = 0{,}7 + 3 = 3{,}7 \text{ cm};$$

$$AC = AB + BC = 2 + 1{,}5 = 3{,}5 \text{ cm}.$$

Observaţie: Atunci când adunăm/scădem lungimi de segmente, acestea trebuie să fie exprimate în aceeaşi unitate de măsură!

2. Pe o dreaptă d se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ astfel încât $A_1A_2 = 3$ cm, $A_2A_3 = 2 \cdot A_1A_2$, $A_3A_4 = 2 \cdot A_2A_3, \ldots$, adică fiecare dintre lungimile segmentelor este egală cu dublul lungimii segmentului precedent. Calculează lungimea segmentului A_1A_{10}.

Rezolvare:

Calculăm lungimile primelor trei segmente pentru a putea deduce regula de formare. Astfel:

$A_2A_3 = 2 \cdot 3$

$A_3A_4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$A_4A_5 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

....

$A_9A_{10} = 2 \cdot 2^7 \cdot 3 = 2^8 \cdot 3$

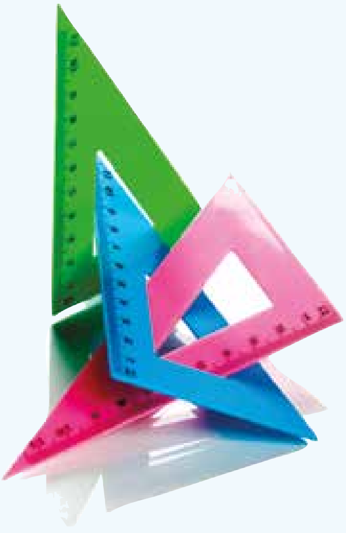
Punctele fiind coliniare, în această ordine, lungimea segmentului A_1A_{10} va fi egală cu suma dintre lungimea segmentului A_1A_2 şi lungimile segmentelor de mai sus:

$$\begin{aligned} A_1A_{10} &= A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_9A_{10} \\ &= 3 + 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \ldots + 2^8 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8) \end{aligned}$$

Notăm suma $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 \,|\cdot 2$

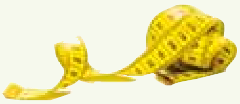
$$\begin{array}{l} 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^8 + 2^9 \quad (-) \\ \hline S = 2^9 - 1 \end{array}$$

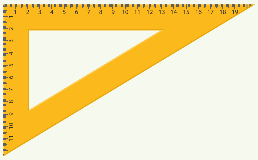
Deci $A_1A_{10} = 3 \cdot (2^9 - 1) = 3 \cdot (512 - 1) = 3 \cdot 511 = 1\,533$ cm.

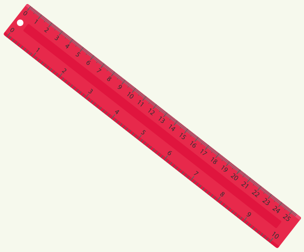


Rezolvă

1. Asociază fiecărui instrument pentru măsurarea lungimilor denumirea corectă:







echer **ruletă** **riglă** **metrul de croitorie**

2. Desenează și notează două segmente congruente cu lungimea de 4,5 cm fiecare.

3. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

☐ Lungimea unui segment este un număr.
☐ Două segmente congruente au lungimi diferite.
☐ Distanța dintre două puncte este lungimea segmentului care le unește.
☐ Dacă A, B, C sunt trei puncte distincte, astfel încât $AB + BC = AC$, atunci punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine.

4. Desenează un segment $MN = 10$ cm și un punct P care aparține interiorului segmentului, astfel încât $PN = 6{,}2$ cm. Calculează lungimea segmentului MP.

5. Dacă punctele M, N, P sunt coliniare, N aparține segmentului MP, iar $MN = 7{,}2$ cm și $MP = 15$ cm, calculează lungimea segmentului NP.

6. Desenează punctele D, E, F, G pe o dreaptă d, în această ordine, astfel încât $DE = 3$ cm, $DF = 6$ cm și $EG = 6$ cm. Stabilește dacă segmentele EF și FG sunt congruente.

7. Irina, Călin și Ana măsoară lungimea tablei, folosind ca unitate de măsură câte o riglă. Rezultatele măsurătorilor sunt consemnate în tabelul alăturat. Stabilește care dintre cei trei copii are rigla de lungime mai mare. Justifică răspunsul.

Irina	Călin	Ana
9	12	10

8. Desenează segmentele $MN = 4$ cm și $NP = 7$ cm, cu M, N, P coliniare, apoi calculează lungimea segmentului MP. Analizează toate situațiile.

9. Distanța dintre punctele A și B este de $[(3^{23} : 3^{22}) \cdot 3 - 1]$ cm, iar distanța dintre punctele B și C este de $(2^7 : 2^4)$ cm. Afirmația „Segmentele AB și BC sunt congruente.” este:

a) adevărată; b) falsă.

10. Se consideră punctele A, B, C, astfel încât $AB = 4{,}3$ cm, $BC = 2{,}6$ cm și $AC = 6{,}9$ cm. Punctele A, B, C sunt coliniare? Justifică răspunsul.

11. Pe o dreaptă g desenează punctele D, A, E, B distincte două câte două, astfel încât D să fie între A și B, iar E să fie între A și D.

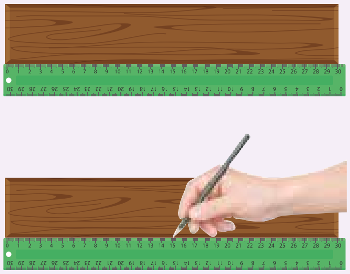
a) Stabilește ordinea punctelor pe dreapta g.

b) Dacă $AB = 15$ cm și $ED = 7$ cm, calculează lungimile segmentelor AE și BD, știind că sunt segmente congruente.

VI.3.2. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

Descoperă

În probleme sau în viața de zi cu zi întâlnim deseori expresia „la mijlocul distanței” sau „la jumătatea distanței”. De exemplu, vrem să construim o căsuță în miniatură pentru un proiect la școală și avem nevoie de jumătate dintr-o scândură de 30 de cm. Nouă ne trebuie jumătate, adică 30 : 2 = 15 cm, așa că punem rigla cu diviziunea 0 într-un capăt al scândurii, citim în dreptul diviziunii 15 și marcăm un punct pe scândură în dreptul acesteia. Putem afirma astfel că acel punct este mijlocul scândurii.



Reține!

- **Mijlocul unui segment** este un punct unic, interior segmentului, care împarte segmentul în două segmente congruente.

Spunem că punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*.

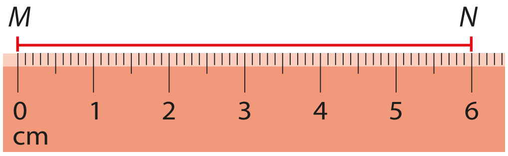
Redactare matematică: M mijlocul lui $AB \Leftrightarrow AM = MB = \dfrac{AB}{2}$.

Observație: Marcajele din desenul de mai sus, cele două liniuțe așezate pe fiecare segment, le utilizăm pentru a evidenția pe desen congruența celor două segmente!

Metode de determinare a mijlocului unui segment

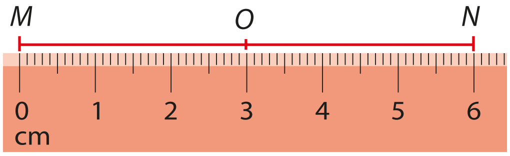
Metoda I (prin măsurare, cu ajutorul riglei gradate):

– măsurăm lungimea segmentului *MN* (în situația descrisă de desenul alăturat avem *MN* = 6 cm);



– împărțim lungimea segmentului la 2 și obținem 6 : 2 = 3 cm;

– fixăm punctul *O* pe segment, în dreptul diviziunii 3.



Vom afirma că punctul *O* este mijlocul segmentului *MN*.

Metoda a II-a (cu ajutorul compasului):
– așezăm acul compasului în punctul *M* al segmentului *MN* și fixăm deschiderea compasului, astfel încât vârful creionului să depășească, din priviri, mijlocul segmentului (*figura 1*);
– trasăm două mici arce de cerc, unul deasupra și unul dedesubtul segmentului (*figura 2*);
– așezăm acul compasului în punctul *N* și trasăm, cu aceeași deschidere a compasului, tot două arce de cerc, unul sus și unul jos, care să intersecteze arcele trasate anterior în punctele *A*, respectiv *B* (*figura 3*);
– unim punctele *A* și *B*; dreapta *AB* va intersecta segmentul *MN* în mijlocul său.

Figura 1

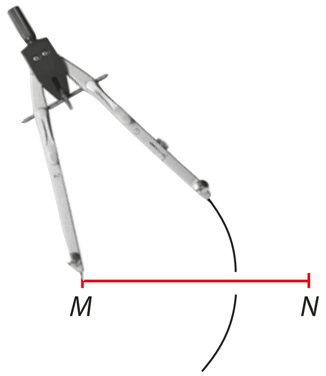


Figura 2

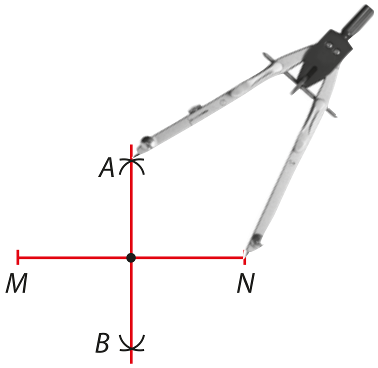
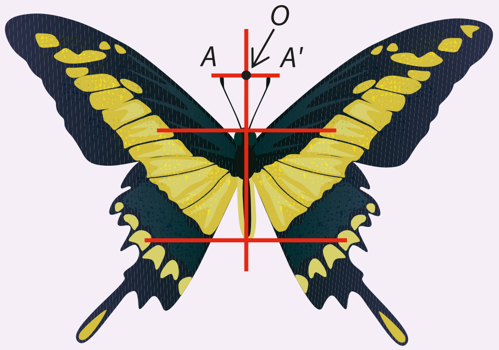


Figura 3

Descoperă

Privește cu atenție imaginea!

Observând capetele antenelor fluturelui, pe care le-am notat cu *A* și *A′*, vedem că ele sunt egal depărtate de punctul *O*, aflat pe direcția capului și toracelui fluturelui. De asemenea, sesizăm mai multe puncte, pe cele două aripi, egal depărtate de câte un punct situat pe aceeași direcție a toracelui. Vom afirma că punctele *A* și *A′* sunt simetrice față de punctul *O*.



Reține!

- Prin **simetricul** unui punct *A* față de un punct *M* înțelegem un punct *B* astfel încât punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*.

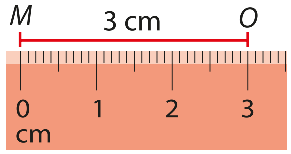
Notăm $\text{sim}_M A = B$ și citim „simetricul punctului *A* față de punctul *M* este punctul *B*”. Observăm că punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*, deci atunci când întâlnim noțiunea de „simetricul unui punct față de alt punct” vom scrie matematic astfel:

$$\text{sim}_M A = B \Leftrightarrow M \text{ mijlocul lui } AB \Leftrightarrow AM = MB = \frac{AB}{2}.$$

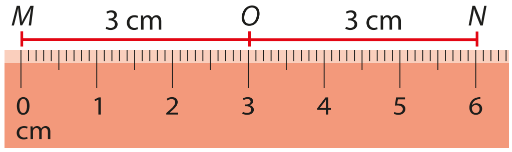
Construcția simetricului unui punct față de un alt punct

– desenăm cele două puncte *M* și *O*;

– unim cele două puncte și măsurăm lungimea segmentului *MO*; în exemplul nostru, *MO* = 3 cm;



– prelungim segmentul *MO*, dincolo de *O*, cu un segment *ON* de aceeași lungime ca și *MO*;



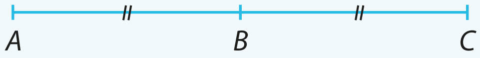
– punctul *N* este simetricul punctului *M* față de punctul *O*.

Exersează

1. Desenează un segment AB și construiește simetricul punctului A față de punctul B, pe care îl notezi cu C. Construiește apoi simetricul punctului B față de punctul A, pe care îl notezi cu D. Scrie matematic ceea ce ai construit.

Rezolvare:

Construim segmentul AB și apoi îl prelungim, dincolo de punctul B, cu un segment BC congruent cu segmentul AB.



Notăm: $\text{sim}_B A = C \Leftrightarrow B$ mijlocul lui $AC \Leftrightarrow AB = BC = \dfrac{AC}{2}$.

Prelungim segmentul BA dincolo de punctul A, cu un segment AD congruent cu segmentul AB.

Notăm: $\text{sim}_A B = D \Leftrightarrow A$ mijlocul lui $DB \Leftrightarrow AD = AB = \dfrac{DB}{2}$.

2. Se consideră un pătrat $ABCD$.

a) Construiește simetricul punctului C față de punctul D.

b) Construiește simetricul punctului B față de punctul D.

Rezolvare:

a) Pentru a construi simetricul punctului C față de punctul D, se prelungește segmentul CD, dincolo de punctul D, cu un segment $DE = CD$. Punctul D va fi mijlocul segmentului CE (*figura 1*).

b) Pentru a construi simetricul punctului B față de punctul D, se construiește segmentul BD și se prelungește dincolo de punctul D cu un segment $DF \equiv BD$. Punctul D va fi mijlocul segmentului BF (*figura 2*).

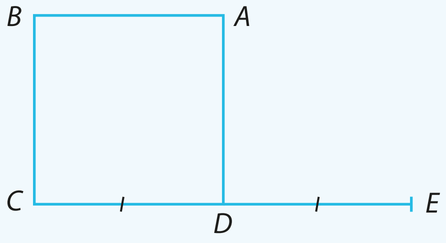


Figura 1

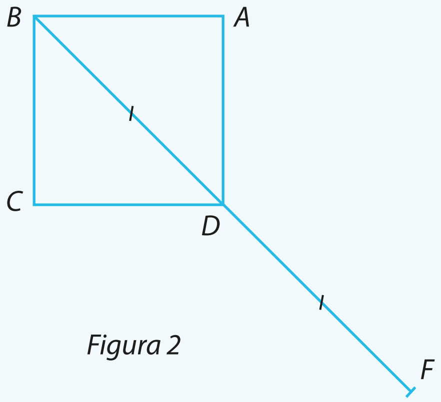
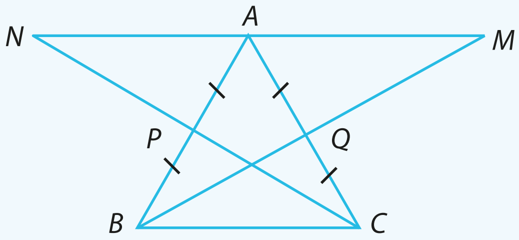


Figura 2

3 În figura alăturată, segmentele AB, BC și AC sunt congruente. Construiește punctul M, simetricul punctului B față de mijlocul segmentului AC și punctul N, simetricul punctului C față de mijlocul segmentului AB. Ce poți observa referitor la punctele M, A, N?



Rezolvare:

Pentru început măsurăm lungimea segmentului AC și fixăm mijlocul segmentului ca fiind punctul Q. Unim punctul B cu punctul Q și prelungim, dincolo de punctul Q, cu un segment congruent cu segmentul BQ. Obținem astfel punctul M, simetricul punctului B față de mijlocul segmentului AC.

În continuare, măsurăm lungimea segmentului AB și fixăm mijlocul segmentului ca fiind punctul P. Unim punctul C cu punctul P și prelungim segmentul CP, dincolo de punctul P, cu un segment congruent cu el. Obținem punctul N simetricul punctului C față de mijlocul segmentului AB.

Verificăm, utilizând rigla, și observăm că cele trei puncte M, A, N sunt puncte coliniare.

Observație: În clasele următoare, vom putea justifica această coliniaritate.

Să învățăm să utilizăm și scrierea matematică a datelor problemelor și a rezolvărilor lor. Deci, *redactarea matematică a problemei* este:

Ce se dă:
$AB \equiv BC \equiv AC$
$M = \text{sim}_Q B$, unde Q mijlocul segmentului AC
$N = \text{sim}_P C$, unde P mijlocul segmentului AB
Ce se cere:
– desenul;
– să se observe poziția punctelor M, A, N.

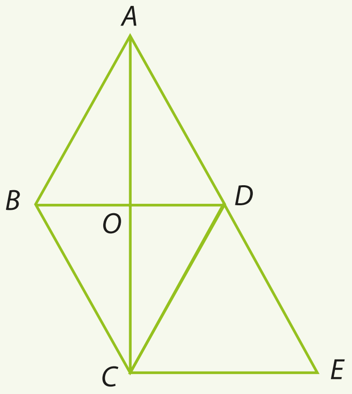
Rezolvare:
Fie Q mijlocul segmentului AC. Construim $M = \text{sim}_Q B \Rightarrow$
$\Rightarrow Q$ mijlocul segmentului BM.
Fie P mijlocul segmentului AB. Construim $N = \text{sim}_P C \Rightarrow$
$\Rightarrow P$ mijlocul segmentului CN.
Observăm că cele trei puncte M, A, N sunt puncte coliniare.

Rezolvă

1. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

☐ Lungimea unui segment este un punct.
☐ Mijlocul unui segment este un număr.
☐ Simetricul unui punct A față de un punct B este un punct egal depărtat de punctul B ca și punctul A.
☐ Mijlocul unui segment este un punct egal depărtat de capetele segmentului.

2. Analizează figura de mai jos și stabilește prin măsurare cu rigla gradată, perechi de puncte simetrice.



3. Pe o dreaptă a se consideră punctele A, B, C, în această ordine, astfel încât $AC = 12$ cm și $BC = 5$ cm. Fie M mijlocul segmentului BC. Calculează lungimea segmentelor AB și AM.

4. Fie punctele M, N, P coliniare în această ordine. Știind că N este mijlocul segmentului MP și $NP = 8{,}5$ cm, calculează lungimea segmentului MP.

5. Se consideră segmentul AB cu lungimea de 6 cm. Fie M mijlocul segmentului.

a) Construiește punctul N, simetricul punctului M față de punctul B, și calculează lungimea segmentului AN.

b) Ce poți afirma despre segmentele MB și BN? Justifică răspunsul.

6. Desenează două drepte concurente d și g. Dacă intersecția dreptelor este punctul O, desenează punctele M, N situate pe dreapta d și punctele P, Q situate pe dreapta g, astfel încât $MN = 3$ cm, $MN \equiv PQ$, iar punctul O să fie mijlocul segmentelor MN și PQ.

7. Se consideră pe dreapta d punctele A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $AB = 4$ cm, $BC = 2$ cm și $AD = 11$ cm. Dacă M este mijlocul segmentului CD, determină lungimea segmentelor CD și BM.

8. Fie punctele *A*, *B*, *C*, *D* coliniare în această ordine. Se știu lungimile segmentelor $AC = 12$ cm, $BC = 7$ cm și $CD = 6$ cm. Punctul *O* este mijlocul segmentului *AB*, iar *Q* este mijlocul segmentului *CD*.

a) Realizează un desen conform datelor problemei.

b) Calculează lungimile segmentelor *AB* și *OQ*.

9. Maria și Ștefan se află în curtea școlii la o distanță de 3 m, Maria într-un punct *A* și Ștefan în punctul *B*. Maria se deplasează către Ștefan până într-un punct *C*, simetricul punctului *A* față de *B*, iar Ștefan se deplasează spre Maria până într-un punct *D*, simetricul punctului *B* față de *A*.

a) Ce distanță a parcurs fiecare?

b) Care este acum distanța dintre cei doi copii?

10. Se consideră punctele *A*, *B*, *C*, *D* și *E* coliniare în această ordine. Lungimea segmentului *BC* este de două ori mai mare decât lungimea segmentului *AB*, punctul *C* este mijlocul segmentului *BD*, punctul *E* este simetricul punctului *B* față de punctul *D*, iar lungimea segmentului $AD = 27$ cm.

a) Realizează un desen corespunzător datelor din enunț.

b) Calculează lungimile segmentelor *AB*, *BC* și *DE*.

Evaluează-te

1. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

☐ Mijlocul unui segment este un punct interior segmentului.
☐ Segmentul este o figură geometrică măsurabilă.
☐ Dacă $AB = 2{,}3$ cm, $BC = 1{,}7$ cm și $AC = 4$ cm, atunci punctele *A*, *B* și *C* sunt coliniare.
☐ Dacă $MN = 2^2$ cm și $PQ = 4$ cm, atunci cele două segmente sunt congruente.
☐ Simetricul unui punct este un punct.

3 puncte

2. Desenează punctele *A*, *B*, *C* coliniare, în această ordine, astfel încât $AC = 12$ cm și $BC = 8$ cm. Se consideră punctele *M*, *N*, *P*, astfel încât *M* este mijlocul segmentului *AB*, *N* este mijlocul segmentului *BC* și *P* este mijlocul segmentului *AC*.

a) Calculează lungimile segmentelor *AB*, *BM* și *BN*.

b) Stabilește dacă punctul *P* este mijlocul segmentului *BN*. Justifică răspunsul.

3 puncte

3. Se consideră punctele *A*, *B*, *C* coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = 24$ cm, iar lungimea segmentului $BC = \frac{3}{4}$ din *AB*. Fie *M* mijlocul segmentului *AB* și *D* simetricul punctului *M* față de punctul *A*.

a) Calculează lungimile segmentelor *AC*, *DC* și *MC*.

b) Arată că $DB = 2 \cdot BC$.

3 puncte

Din oficiu: 1 punct

Privit din alt unghi, punctul poate fi o linie care începe de unde privești.

Gino Severini (7 aprilie 1883 – 26 februarie 1966) a fost un celebru pictor italian care și-a etalat lucrările la expoziții importante și a câștigat numeroase premii de artă la instituții importante de profil.

VI.4. UNGHI: DEFINIȚIE, NOTAȚII, ELEMENTE. INTERIORUL UNUI UNGHI, EXTERIORUL UNUI UNGHI. MĂSURA UNUI UNGHI, UNGHIURI CONGRUENTE (MĂSURAREA ȘI CONSTRUCȚIA CU RAPORTORUL). CLASIFICĂRI DE UNGHIURI: UNGHI DREPT, UNGHI ASCUȚIT, UNGHI OBTUZ. UNGHI NUL, UNGHI ALUNGIT. CALCULE CU MĂSURI DE UNGHIURI EXPRIMATE ÎN GRADE ȘI MINUTE SEXAGESIMALE

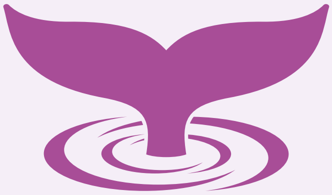
VI.4.1. Unghi: definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi

Descoperă

Figurile geometrice studiate ne ajută să descoperim alte figuri geometrice din ce în ce mai complexe. Astfel, după ce am studiat semidreapta și tipurile de semidrepte, putem defini acum unghiul. Cuvântul „unghi” provine din limba latină „angulus” și are semnificația de „colț”.

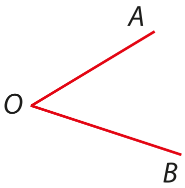
Să analizăm pasărea din imaginea de mai sus și să ne imaginăm că aripile sunt două semidrepte, având ca origine comună corpul. Vom afirma că aripile formează un unghi!

Noțiunea de unghi este des întâlnită în viața noastră de zi cu zi. Imaginile de mai jos sunt sugestive:



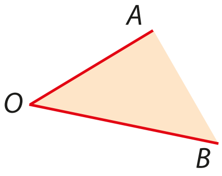
Reține!

Figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine se numește **unghi**.

desenezi	notezi	citești
	$\sphericalangle AOB$, $\widehat{AOB}$	unghiul *AOB*
	sau $\sphericalangle BOA$, $\widehat{BOA}$	unghiul *BOA*
	sau $\sphericalangle O$, $\hat{O}$	unghiul *O*

Observație: În citirea unui unghi cu trei litere, litera din mijloc trebuie să fie originea comună a celor două semidrepte. Cele două puncte *A* și *B*, care ne ajută să citim unghiul, nu trebuie fixate într-un anume loc, deoarece laturile sunt semidrepte. Acestea vor fi fixate doar dacă se precizează lungimea segmentelor *OA*, *OB*.

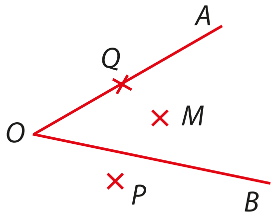
Elementele unui unghi:



- vârful unghiului este originea comună a celor două semidrepte (punctul *O*);
- laturile unghiului sunt cele două semidrepte (semidreptele *OA*, *OB*);
- interiorul unghiului este format din mulțimea punctelor situate în intersecția semiplanului determinat de semidreapta *OA* și punctul *B* cu semiplanul determinat de semidreapta *OB* și punctul *A*; se notează Int(∢*AOB*);
- exteriorul unghiului este format din mulțimea punctelor care nu aparțin nici laturilor unghiului (adică celor două semidrepte) și nici interiorului unghiului; se notează Ext(∢*AOB*).

Exemplu:

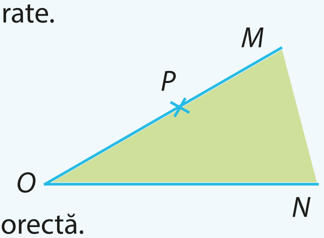
Urmărind figura alăturată putem spune că:
– punctul *Q* aparține unghiului *AOB*;
– punctul *M* este punct interior unghiului *AOB*;
– punctul *P* este punct exterior unghiului *AOB*.



Exersează

1. Analizează figura și completează propozițiile, astfel încât să fie adevărate.

a) Unghiul din figură se notează corect ______________.
b) Semidreapta *OP* se numește ______________ a unghiului.
c) Punctul *O* se numește ______________ unghiului.
d) Zona colorată cu verde se numește ______________ unghiului.



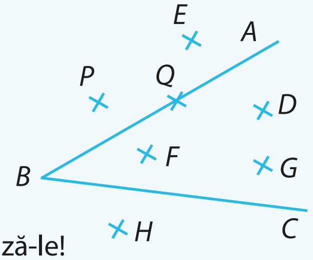
Rezolvare:

a) Oricare dintre notațiile ∢*MON*, ∢*NOM*, ∢*PON*, ∢*NOP* sau ∢*O* este corectă.
b) Semidreapta *OP* se numește latură a unghiului.
c) Punctul *O*, fiind originea comună a celor două semidrepte, se numește vârful unghiului.
d) Zona colorată cu verde se numește interiorul unghiului.

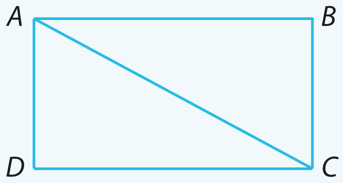
2. Observă desenul și precizează punctele interioare și punctele exterioare unghiului reprezentat.

Rezolvare:

Puncte interioare: *D*, *G*, *F*.
Puncte exteriorare: *E*, *H*, *P*.



3 Câte unghiuri diferite sunt în figura de mai jos? Notează-le și precizează-le!



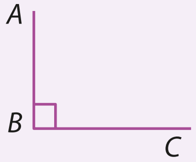
Rezolvare:

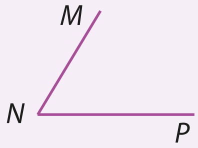
Unghiurile diferite identificate sunt: ∢*ABC*, ∢*BCD*, ∢*CDA*, ∢*DAB*, ∢*DAC*, ∢*DCA*, ∢*CAB* și ∢*ACB*. În total 8 unghiuri.

VI.4.2. Măsura unui unghi, unghiuri congruente (măsurarea și construcția cu raportorul)

Descoperă

Uneori suntem puși în situația de a compara două sau mai multe unghiuri. Putem realiza acest lucru intuitiv, comparând unghiurile prin suprapunere sau analizând mărimea deschiderii lor, ca în figura de mai jos.





Putem afirma că măsura unghiului *ABC* este mai mare decât cea a unghiului *MNP*, deoarece unghiului *ABC* are deschiderea mai mare.

Reține!

Atunci când vorbim despre **măsura unui unghi** ne referim la deschiderea lui, adică la deschiderea dintre laturi. Nu ne putem folosi de lungimea laturilor unghiului pentru a determina măsura unui unghi, deoarece acestea sunt semidrepte și, fiind infinite, nu se pot măsura.

Compararea unghiurilor prin suprapunere sau prin analizarea deschiderii lor nu pot fi utilizate în toate situațiile, de aceea vom introduce o unitate de măsură pentru unghiuri și anume unghiul de un grad sexagesimal, numit simplu „un grad" și notat 1°.

Spunem că unghiul de 1° este unitatea de măsură a unghiurilor. A măsura înseamnă (așa cum am învățat la măsurarea segmentelor) să parcurgem următorii pași:

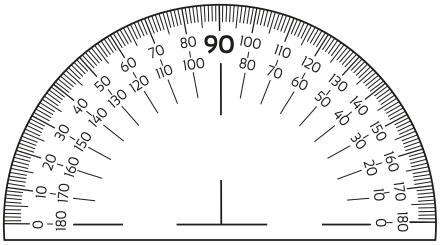
- ne alegem o unitate de măsură (unghiul de 1°);
- vedem de câte ori se cuprinde acea unitate de măsură în ceea ce vrem să măsurăm (unghiul).

Din punct de vedere practic, instrumentul pentru măsurarea unghiurilor este raportorul.

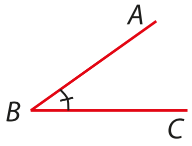
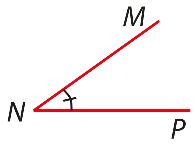
Submultiplii gradului sunt minutul și secunda.

Notăm: 1′ și citim „un minut"; 1° = 60′
1″ și citim „o secundă". 1′ = 60″
1° = 3600″

Observație: Denumirea de grad sexagesimal provine din sistemul de numerație în baza 60, sistem creat de vechii sumerieni în mileniul III î.Hr., fiind utilizat pentru măsurarea timpului, a unghiurilor și a coordonatelor geografice.



- Două unghiuri se numesc **congruente** dacă au aceeași măsură.

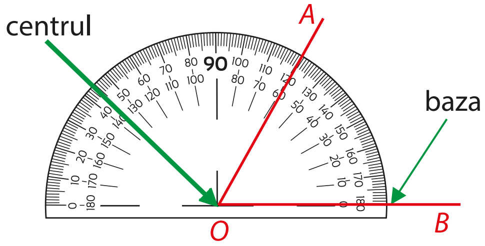
desenezi	notezi	citești
 	$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$	unghiul *ABC* este congruent cu unghiul *MNP*

Observație: Pentru a vizualiza mai bine conceptul de congruență, ne putem imagina că, dacă am avea posibilitatea de a suprapune unghiurile, atunci ele vor coincide.

Măsurarea unui unghi dat cu raportorul

- așezăm centrul raportorului în vârful unghiului și baza raportorului (linia marcată de la 0 la 180) pe semidreapta *OB*;
- citim valoarea unghiului în dreptul celeilalte laturi, în cazul nostru, semidreapta *OA*.

În exemplul nostru, măsura unghiului *AOB* este de 60°.
Notăm: $\sphericalangle AOB = 60^\circ$.

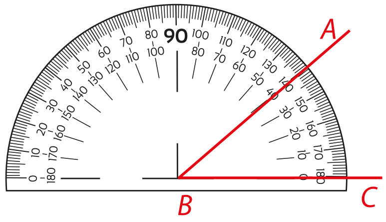


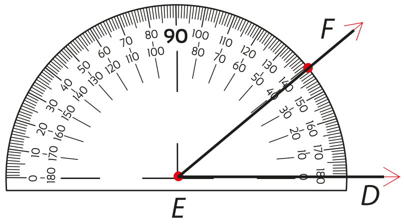
Construcția unui unghi congruent cu un unghi dat cu ajutorul raportorului

Fiind dat un unghi *ABC* cu măsura de 40°, să construim unghiul *DEF* congruent cu acesta. Vom proceda astfel:

- construim semidreapta *DE*, una dintre laturile unghiului *DEF*;
- așezăm centrul raportorului în punctul *E*, iar baza suprapusă peste semidreapta *ED*;
- marcăm punctul *F* în dreptul diviziunii de 40°;
- desenăm semidreapta *EF*.

Cum $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FED = 40^\circ$, putem scrie $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FED$.

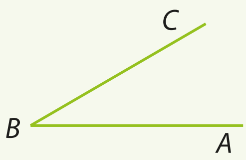


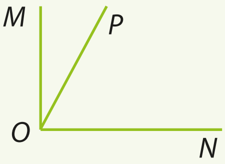


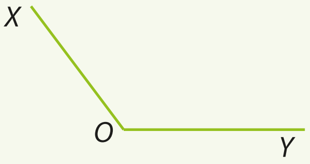
Rezolvă

1. Folosind raportorul, construiește două unghiuri congruente, cu măsura de 50°. Notează-le corespunzător și transcrie matematic relația lor de congruență.

2. **a)** Fără a măsura fiecare unghi de mai jos, estimează măsura fiecăruia și noteaz-o:







b) Măsoară cu raportorul fiecare unghi și calculează eroarea pe care ai făcut-o în estimare.

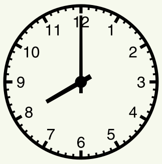
3. Folosind raportorul, desenează și notează corespunzător:

a) un unghi cu măsura de 15°;
b) un unghi cu măsura de 30°;
c) un unghi cu măsura de 45°;
d) un unghi cu măsura de 60°;
e) un unghi cu măsura de 90°;
f) un unghi cu măsura de 180°.

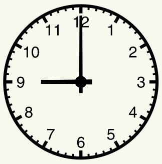
4. Desenează un pătrat *ABCD* și trasează diagonala lui, segmentul *AC*. Măsoară toate unghiurile formate și precizează perechile de unghiuri congruente.

5. Ceasurile de mai jos indică orele 08:00, 09:00, 17:00. Care este măsura unghiului format de orarul și minutarul fiecărui ceas?

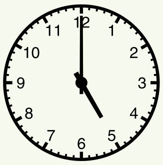
a)



b)



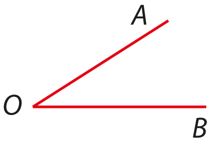
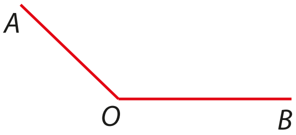
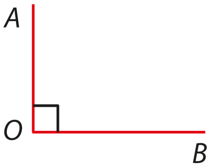
c)



VI.4.3. Clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz. Unghi nul, unghi alungit

Reține!

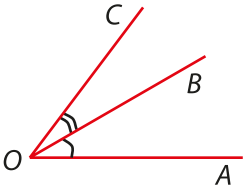
Deoarece unghiul este format din două semidrepte, pentru început, clasificarea unghiurilor se face în funcție de clasificarea semidreptelor. Astfel, putem clasifica unghiurile în:

	desenezi	notezi
A. UNGHIURI IMPROPRII		
Unghiul nul este unghiul care are laturile semidrepte identice. Măsura unghiului nul este 0°.		$\sphericalangle AOB$ este unghi nul $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle AOB = 0^\circ$
Unghiul alungit sau **unghi cu laturile în prelungire** sau **unghi plin** este unghiul care are laturile semidrepte opuse. Măsura unghiului alungit este de 180°.		$\sphericalangle AOB$ este unghi alungit $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle AOB = 180^\circ$
B. UNGHIURI PROPRII		
Unghiul ascuțit este unghiul care are măsura mai mare de 0° și mai mică de 90°.		$\sphericalangle AOB$ – unghi ascuțit $\Leftrightarrow$ $0^\circ < \sphericalangle AOB < 90^\circ$
Unghiul obtuz este unghiul care are măsura mai mare de 90° și mai mică de 180°.		$\sphericalangle AOB$ – unghi obtuz $\Leftrightarrow$ $90^\circ < \sphericalangle AOB < 180^\circ$
Unghiul drept este unghiul care are măsura egală cu 90°.		$\sphericalangle AOB$ – unghi drept $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle AOB = 90^\circ$

Axioma de adunare a unghiurilor

Dacă punctul *B* este un punct interior unghiului *AOC*, atunci:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC.$$

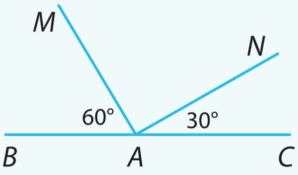


Exersează

Calculează măsura unghiului *MAN* din figura alăturată, știind că *AB* și *AC* sunt semidrepte opuse, $\sphericalangle BAM = 60^\circ$, iar $\sphericalangle CAN = 30^\circ$.

Rezolvare:

Fiecare informație din datele problemei ne conduce către rezolvare!



Astfel, dacă *AB* și *AC* sunt semidrepte opuse, rezultă că unghiul format de ele are măsura egală cu 180°. Matematic putem scrie:

$$(AB, (AC \text{ opuse} \Leftrightarrow \sphericalangle BAC = 180^\circ.$$

Așadar, cunoscând măsurile unghiurilor *BAM* și *CAN*, putem determina măsura unghiului *MAN* utilizând axioma de adunare a unghiurilor:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAN + \sphericalangle CAN.$$

Înlocuim valorile cunoscute și obținem:

$$180^\circ = 60^\circ + \sphericalangle MAN + 30^\circ.$$

Din relația de mai sus putem determina acum măsura unghiului:

$$\sphericalangle MAN = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle MAN = 120^\circ - 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle MAN = 90^\circ.$$

Rezolvă

1. Încercuiește răspunsul corect. Un unghi care are măsura mai mare de 90°, dar mai mică de 180°, se numește unghi:

a) drept; **b)** obtuz; **c)** nul; **d)** alungit.

2. Precizează valoarea de adevăr a propozițiilor:

☐ Unghiul nul este unghi propriu.
☐ Unghiurile congruente au măsurile egale.
☐ Unghiul plin are măsura de 180°.
☐ Unghiul obtuz este unghi propriu.
☐ Unghiul care are laturile semidrepte perpendiculare este unghi drept.
☐ Unghiul format de limbile unui ceas la ora 12:20 este unghi ascuțit.

3. Fie *AB* și *AC* două semidrepte perpendiculare. Punctul *M* aparține interiorului unghiului *BAC*, astfel încât $\sphericalangle BAM = 30^\circ$, iar semidreapta *AD* este opusă semidreptei *AB*.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

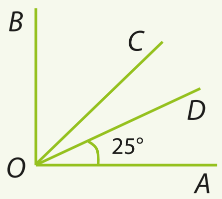
b) Calculează măsurile unghiurilor *CAM* și *MAD*.

4. Se dă un unghi *ABC* cu măsura $n^\circ + 75^\circ$. Determină numărul natural *n*, astfel încât unghiul *ABC* să fie:

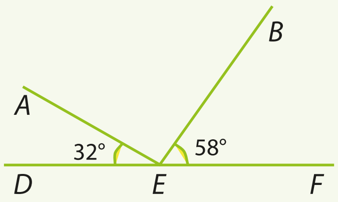
a) alungit; **b)** ascuțit; **c)** drept; **d)** obtuz.

5. Calculează măsura a două unghiuri, știind că unul dintre ele este triplul celuilalt, iar suma lor este 160°. Realizează un desen corespunzător valorilor aflate.

6. În figura de mai jos, $\sphericalangle AOD = 25^\circ$, $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ și $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$. Calculează măsurile unghiurilor *COD* și *DOB*.



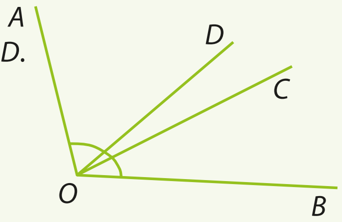
7. În figura de mai jos, punctele *D*, *E*, *F* sunt coliniare, în această ordine, $\sphericalangle BEF = 58^\circ$ și $\sphericalangle AED = 32^\circ$. Arată că unghiul *AEB* este unghi drept.



8. Fie unghiul *MNP* alungit. În același semiplan determinat de dreapta *MN* se consideră semidreptele *NQ* și *NT*, astfel încât $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PNT$ și $\sphericalangle MNQ = 25^\circ$, iar $\sphericalangle SNM = 90^\circ$, unde *S* este de aceeași parte a dreptei *MN* ca și punctele *Q* și *T*. Arată că $\sphericalangle SNQ \equiv \sphericalangle SNT$.

9. În figura alăturată, $\sphericalangle AOB = 115^\circ$, $\sphericalangle COD = 20^\circ$, iar $\sphericalangle AOD = \frac{5}{2}$ din $\sphericalangle COD$.

Calculează măsura unghiului *BOC*.



VI.4.4. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale

Descoperă

Luând în considerare axioma de adunare a unghiurilor, putem afirma că operațiile pe care le putem efectua cu două sau mai multe unghiuri sunt **adunarea** și **scăderea**. Totuși, în probleme întâlnim deseori exprimarea că un unghi este mai mare decât alt unghi de un anumit număr de ori, adică trebuie să **înmulțim** măsura unui unghi cu un număr natural nenul, sau că un unghi este mai mic decât alt unghi de un anumit număr de ori, adică trebuie să **împărțim** măsura unui unghi la un număr natural diferit de 0.

Reține!

Adunarea a două măsuri de unghiuri se face adunând grade cu grade și minute cu minute. Dacă se obțin mai mult de 60 de minute, atunci transformăm minutele în grade (ținând cont că 1° = 60′).

Să ne amintim!
1° = 60′

Scăderea a două măsuri de unghiuri se face scăzând grade din grade și minute din minute. Dacă nu avem suficiente minute la descăzut, ne împrumutăm cu un grad.

Înmulțirea cu un număr natural a măsurii unui unghi se face înmulțind cu acel număr atât gradele, cât și minutele. Dacă se obțin mai mult de 60 de minute, atunci transformăm minutele în grade.

Împărțirea la un număr natural diferit de zero a măsurii unui unghi se face împărțind la acel număr atât gradele, cât și minutele. Dacă rămâne rest la împărțirea gradelor la acel număr, acesta se transformă în minute și se adaugă la minutele deja existente, apoi împărțim minutele la numărul respectiv.

Exersează

1. Efectuează adunarea: 75°43′ + 75°53′.

Rezolvare: Pentru a aduna măsurile a două unghiuri procedăm astfel:

- Așezăm măsurile de unghiuri unele sub altele, având grijă să avem minute sub minute și grade sub grade.
- Adunăm minute cu minute, apoi grade cu grade. Obținem 150°96′.
- Având în vedere că 1° = 60′, vom transforma cele 96 de minute obținute în grade și minute: 96′ = 60′ + 36′ = **1°36′**. Gradul rezultat din transformare îl vom aduna la grade și obținem: 150° + **1°** = **151°**.
- Rezultatul final este: 75°43′ + 75°53′ = 151°36′.

	7	5°	4	3′	+
	7	5°	5	3′	
1	5	0°	9	6′	

		+1			
	7	5°	4	3′	+
	7	5°	5	3′	
1	5	1°	3	6′	

2. Efectuează scăderea: 98°20′ – 64°32′.

Rezolvare: Procedăm astfel:

- Așezăm măsurile de unghiuri unele sub altele, având grijă să avem minute sub minute și grade sub grade.
- Scădem minute din minute și grade din grade. Dacă la minute nu putem efectua scăderea, ne împrumutăm 1° de la grade, îl transformăm în 60′, îl adunăm cu minutele pe care le avem și efectuăm scăderea, adică: 1° = 60′, 60′ + 20′ = 80′ și 80′ – 32′ = **48′**.
- Ultima scădere este la grade, dar să nu uităm că am împrumutat 1°, deci mai avem 98° – 1° = 97°. Efectuăm 97° – 64° = **33°**.
- Rezultatul final este: 98°20′ – 64°32′ = 33°48′.

	−1			
9	8°	2	0′	–
6	4°	3	2′	
3	3°	4	8′	

Observație: Ne împrumutăm și transformăm doar dacă nu se poate efectua scăderea!

3. Efectuează următoarea înmulțire: 27°44′ · 3.

Rezolvare:

- Vom înmulți minutele cu 3 și gradele cu 3. La fel ca la adunare, tot ce depășește 60 trebuie transformat în unitatea imediat următoare.
  44′ · 3 = 132′; 132′ = 120′ + 12′ = 2 · 60′ + 12′ = **2°12′**

	+2			
2	7°	4	4′	·
			3	
8	3°	1	2′	

- Înmulțim numărul de grade cu 3: 27° · 3 = 81°. Dar de la ultima transformare mai avem 2°, deci în total avem: 81° + 2° = **83°**.
- Rezultatul final este: 27°44′ · 3 = 83°12′.

4. Efectuează următoarea împărțire: 47°32′ : 2.

Rezolvare:

- Prima dată se împart gradele, deci 47° : 2 = **23°** rest 1°.
- Dacă obținem rest, îl transformăm în minute și rezultatul îl adunăm cu minutele existente. În cazul nostru, restul este 1° = 60′ și 60′ + 32′ = 92′.
- Continuăm, împărțind acum minutele, adică: 92′ : 2 = **46′**.
- Rezultatul final este: 47°32′ : 2 = 23°46′.

Rezolvă

1. Transformă în minute sexagesimale:

a) 5°; **b)** 12°; **c)** 3°25′; **d)** 16°30′; **e)** 34°55′.

2. Transformă în grade și minute sexagesimale:

a) 200′; **b)** 1 300′; **c)** 4 120′; **d)** 3 770′; **e)** 5 485′.

3. Efectuează următoarele calcule cu măsuri de unghiuri sexagesimale:

a) 20° + 135°; **b)** 85° – 26°; **c)** 15° · 5; **d)** 144° : 4;
e) 13°35′ + 25°16′; **f)** 49°47′ + 25°58′; **g)** 63°58′ – 45°10′; **h)** 123°26′ – 59°36′;
i) 24°15′ · 3; **j)** 56°51′ · 3; **k)** 84°21′ : 3; **l)** 127°45′ : 5.

Evaluează-te

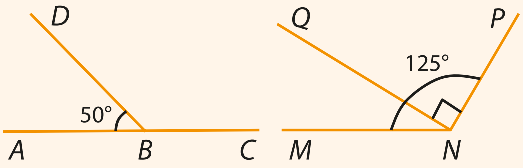
1. Completează propozițiile, în caiet, cu răspunsurile corecte:

a) Două unghiuri sunt congruente dacă ____________________ .
b) Unghiurile care au măsura cuprinsă între 0° și 180° se numesc ____________________ .
c) Laturile unui unghi alungit sunt ____________________ .

3 puncte

2. Se consideră figurile alăturate.

a) Calculează măsurile unghiurilor *DBC* și *MNQ*.
b) Precizează unghiurile ascuțite, unghiurile drepte și unghiurile obtuze.



3 puncte

3. Se consideră punctele *A*, *B*, *C* coliniare, în această ordine. Într-unul din semiplanele determinate de dreapta *AC*, se consideră punctul *D*, astfel încât ∢*ABD* = 55°. Semidreapta *BE* este situată în interiorul unghiului *ABD* și împarte unghiul în două unghiuri congruente, ∢*ABE* ≡ ∢*DBE*. Fie *BF* semidreapta opusă semidreptei *BD*.

a) Realizează un desen corespunzător datelor din enunț.
b) Calculează măsura unghiului *ABE*. **c)** Arată că ∢*EBC* ≡ ∢*EBF*.

3 puncte

Din oficiu: 1 punct

Simetria este ideea prin care omul a încercat timp de secole să înțeleagă și să creeze ordine, frumusețe și perfecțiune.

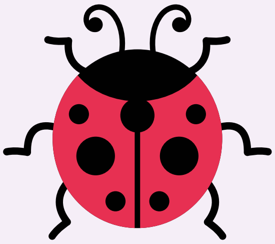
Hermann Weyl (9 noiembrie 1885 – 8 decembrie 1955) a fost matematician german. Cercetările sale au fost extrem de relevante pentru fizica teoretică, dar și pentru disciplinele pure, inclusiv teoria numerelor. A publicat câteva lucrări generale și tehnice despre spațiu, timp și materie, precum și despre filozofie, logică, simetrie și istoria matematicii.

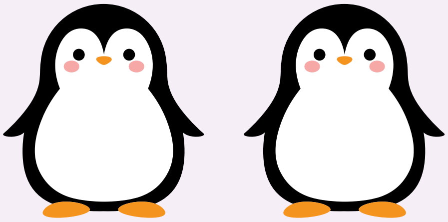
VI.5. FIGURI CONGRUENTE. AXA DE SIMETRIE

VI.5.1. Figuri congruente

Descoperă

Să privim cu atenție imaginile!





Putem observa că dacă am decupa primul brăduț și l-am pune peste cel de al doilea, aceștia se vor suprapune perfect. Analizând gărgărița, observăm că cele două părți, situate de o parte și de alta a liniei de mijloc, sunt identice și deci, prin suprapunere, ar coincide. Ca și în cazul brăduților, cei doi pinguini se vor suprapune perfect. Aceste mici exemple ne ajută să înțelegem noțiunea de figuri congruente, în general, nu numai în matematică.

Reține!

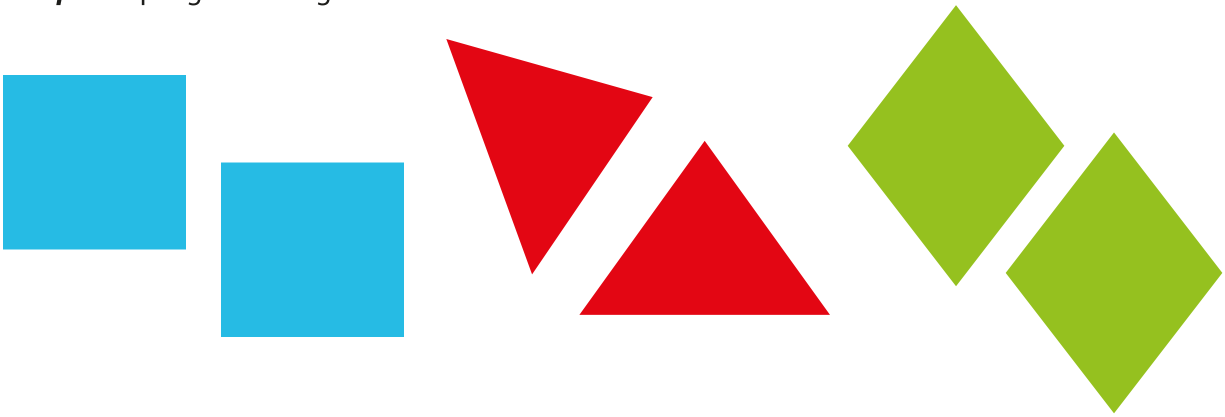
Două figuri geometrice plane sunt **congruente** dacă, prin suprapunere, coincid.

Un caz aparte îl reprezintă poligoanele congruente.

Poligonul este o figură geometrică plană, închisă, formată dintr-un număr finit de segmente, numite laturi.

Poligoanele congruente au aceeași formă (deoarece unghiurile au măsuri egale, două câte două) și aceeași mărime (deoarece laturile lor sunt segmente congruente, două câte două).

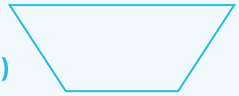
Exemple de poligoane congruente:



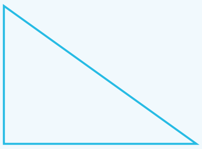
Exersează

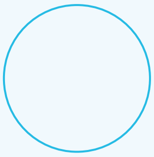
1. Stabilește corespondențe corecte între figuri congruente:

a)

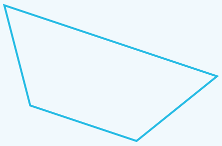

b)


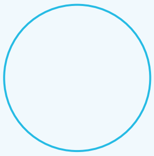
c)


d)


e)


f)


g)


h)


Rezolvare: Prin deplasarea și rotirea figurilor care au aceeași formă, putem stabili care dintre ele se suprapun. Astfel, avem corespondențele între figuri congruente: a) și c), b) și g), d) și f), e) și h).

2. Stabilește dacă unghiul $A = 24°32'$ și unghiul $B = 1472'$ sunt figuri geometrice congruente.

Rezolvare: Pentru a stabili dacă unghiurile sunt congruente, trebuie să stabilim dacă au aceeași măsură.

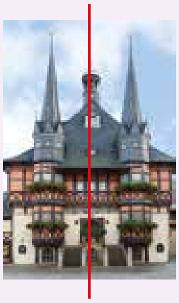
Vom transforma măsura unghiului A în minute: $\sphericalangle A = 24 \cdot 60' + 32' = 1440' + 32' = 1472'$.

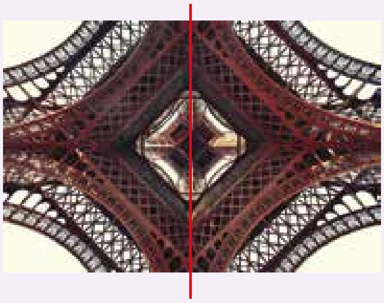
Cum $\sphericalangle B = 1472'$, rezultă că unghiurile A și B sunt congruente.

VI.5.2. Axa de simetrie

Descoperă

Cuvântul simetrie (din greacă, *symmetria*), semnifică armonie, potrivire, concordanță, regularitate.



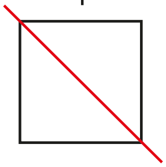


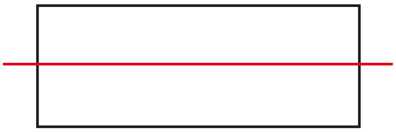
Privind imaginile de mai sus observăm câteva exemple de simetrie în viața de zi cu zi. Imaginile separate prin axa de culoare roșie sunt simetrice.

Reține!

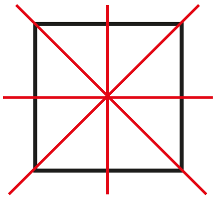
- **Axa de simetrie** este dreapta care împarte o figură geometrică în două figuri congruente.
- Dacă putem îndoi o figură geometrică de-a lungul unei drepte, astfel încât cele două părți rezultate să coincidă prin suprapunere, spunem că figura geometrică este **simetrică** față de dreapta respectivă.

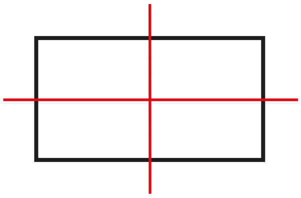
Exemple: axe de simetrie pentru pătrat și dreptunghi.

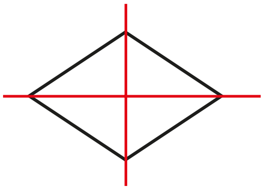


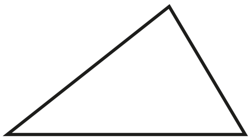


Observație: O figură geometrică poate avea mai multe axe de simetrie (orizontală, verticală, oblică; de exemplu, pătratul, dreptunghiul, rombul), însă există și figuri geometrice care nu au axă de simetrie (de exemplu, triunghiul din figura următoare).









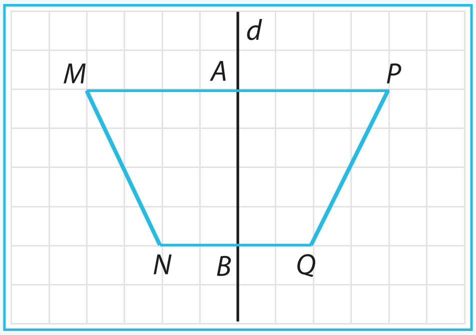
Exersează

Folosind figura următoare, completează casetele.

$AM \equiv$ ☐; $\sphericalangle AMN \equiv$ ☐;

$NB \equiv$ ☐; $\sphericalangle MNB \equiv$ ☐.

$MN \equiv$ ☐;



Rezolvare:

Se observă că, dacă se pliază foaia de hârtie de-a lungul dreptei d, cele două figuri geometrice, prin suprapunere, coincid. Prin urmare, figurile $AMNB$ și $APQB$ sunt congruente, iar dreapta d este axă de simetrie. Rezultă că $AM \equiv AP$, $NB \equiv BQ$, $MN \equiv PQ$ și $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle APQ$, $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle PQB$.

Rezolvă

1. Completează enunțurile de mai jos pentru a obține propoziții adevărate:

a) Axa de simetrie este dreapta care împarte o figură geometrică în două figuri geometrice ______________________.

b) Pătratul are _____________ axe de simetrie.

c) Două figuri geometrice sunt congruente dacă prin suprapunere _______________________.

d) Un romb are _____________ axe de simetrie.

2. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

☐ Orice dreptunghi are 4 axe de simetrie.

☐ Există figuri geometrice care au o infinitate de axe de simetrie.

☐ Simetricul unui punct față de o dreaptă este un segment.

☐ Două unghiuri sunt congruente dacă au aceeași măsură.

3. Desenează un cerc și construiește 2 axe de simetrie. Câte axe de simetrie are un cerc?

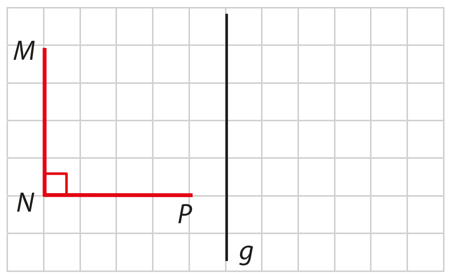
4. Stabilește care din cifrele următoare admit axă de simetrie:

5. Stabilește care din literele următoare admit axă de simetrie:

A B C D L P O Y U

6. Desenează un unghi *AOB* cu măsura de 80° și construiește-i axa de simetrie. Cum sunt unghiurile obținute după construirea axei? Care este măsura lor?

7. Se consideră un unghi drept *MNP* și dreapta *g* în exteriorul său, ca în desenul alăturat. Construiește simetricul unghiului *MNP* față de dreapta *g*.



8. Se consideră o dreaptă *d* și trei puncte *M*, *N*, *P* necoliniare, care nu sunt situate pe dreapta *d*. Stabilește dacă simetricele punctelor *M*, *N*, *P* față de dreapta *d* sunt puncte necoliniare.

9. Se consideră segmentul $AB = 6$ cm. Pe axa de simetrie a segmentului *AB*, se consideră punctele *P* și *Q* de o parte și de alta a segmentului. Știind că punctele *P* și *Q* sunt situate la distanțe egale față de segmentul *AB*, stabilește dacă segmentul *AB* este axă de simetrie a segmentului *PQ*.

10. Se consideră punctele *A*, *O*, *B* coliniare în această ordine. Fie semidreapta *OM*, astfel încât $\sphericalangle BOM =$ $= 30^\circ$. Pe această semidreaptă se consideră punctul *C*, astfel încât $OC = 4$ cm.

a) Realizează desenul corespunzător enunțului.

b) Fie $D = \text{sim}_O C$. Stabilește dacă $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOD$.

Evaluează-te

1. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

☐ Două figuri geometrice sunt congruente, dacă prin suprapunere coincid.
☐ Un cerc admite doar două axe de simetrie.
☐ Două segmente care au aceeași lungime sunt congruente.
☐ Orice unghi propriu admite o singură axă de simetrie. **3 puncte**

2. Încercuiește răspunsul corect.

i) Simetricul unui punct față de o dreaptă este:
  a) un segment; b) un punct; c) o dreaptă; d) un unghi.

ii) Un pătrat are:
  a) două axe de simetrie; b) trei axe de simetrie;
  c) patru axe de simetrie; d) șase axe de simetrie.

iii) Figura geometrică căreia nu-i putem construi axe de simetrie este:
  a) dreptunghiul; b) cercul; c) paralelogramul; d) segmentul.

iv) Simetricul unui triunghi față de o dreaptă exterioară triunghiului este:
  a) un segment; b) un punct; c) o dreaptă; d) un triunghi.

3 puncte

3. Fie *AOB* un unghi alungit. Se construiește semidreapta *OC*, astfel încât $\sphericalangle BOC = 30^\circ$. Fie punctele *D* și *E* situate în același semiplan determinat de dreapta *AB* ca și punctul *C*, astfel încât $\sphericalangle COD = 2 \cdot \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOE = 30^\circ$.

a) Realizează un desen conform datelor din enunț.

b) Calculează măsura unghiului *DOE*.

c) Stabilește dacă *OD* este axă de simetrie pentru unghiul *EOC*. **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Două puncte distincte determină:
a) un singur plan; **b)** o singură dreaptă; **c)** un unghi; **d)** un semiplan.

(5p) **2.** Cinci puncte distincte, dintre care oricare trei necoliniare, determină:
a) 5 drepte; **b)** 20 de drepte; **c)** 10 drepte; **d)** 15 drepte.

(5p) **3.** Două drepte care au un singur punct comun se numesc drepte:
a) paralele; **b)** concurente; **c)** identice; **d)** necoplanare.

(5p) **4.** Pe dreapta d se iau punctele A, B, C, D și E, astfel încât D se află pe segmentul AC, B este situat între C și E, iar C aparține segmentului DB. Ordinea corectă a punctelor pe dreaptă este:
a) $A–B–C–D–E$; **b)** $A–C–B–D–E$; **c)** $C–D–B–A–E$; **d)** $A–D–C–B–E$.

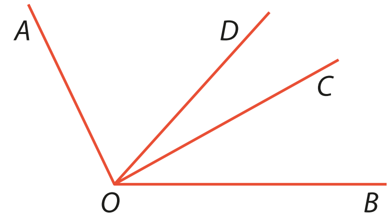
(5p) **5.** Lungimea segmentului AB este egală cu lungimea segmentului CD. Dacă suma lungimilor lor este 18,04 cm, atunci lungimea segmentului AB este:
a) 18,04 cm; **b)** 9,2 cm; **c)** 9,12 cm; **d)** 9,02 cm.

(5p) **6.** Suma măsurilor a două unghiuri este 150°. Dacă unul dintre ele este dublul celuilalt, atunci unghiul mai mic are măsura de:
a) 100°; **b)** 75°; **c)** 40°; **d)** 50°.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Se consideră segmentul AB cu lungimea de 8 cm. Fie M mijlocul segmentului și punctul N, simetricul punctului M față de punctul B. Lungimea segmentului MN este:
a) 16 cm; **b)** 12 cm; **c)** 4 cm; **d)** 8 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată, $\sphericalangle BOC = 48^\circ$, $\sphericalangle DOC$ este jumătate din $\sphericalangle BOC$, iar unghiul BOA are măsura egală cu dublul sumei măsurilor unghiurilor BOC și DOC. Măsura unghiului AOD este:



a) 72°; **b)** 36°; **c)** 144°; **d)** 96°.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $28^\circ45' \cdot 2 - 2^\circ30'$ este:
a) 54°; **b)** 56°; **c)** 55°; **d)** 54°30′.

(5p) **4.** Numărul axelor de simetrie ale unui pătrat este:
a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 8.

(5p) **5.** Fie M, N, P trei puncte coliniare distincte, astfel încât $MN = 3{,}3$ cm și $NP = 7{,}7$ cm. Dacă $MP = 4{,}4$ cm, atunci:
a) P este între M și N; **b)** M este între P și N;
c) N este între P și M; **d)** P este mijlocul lui MN.

(5p) **6.** Se consideră $\sphericalangle AOB = 100^\circ$ și semidreapta OM, axa de simetrie a acestui unghi. În interiorul unghiului MOB se consideră punctul P, astfel încât $\sphericalangle POM = 15^\circ$. Măsura unghiului AOP este:
a) 35°; **b)** 15°; **c)** 50°; **d)** 65°.

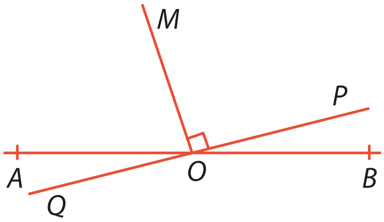
Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Pe o dreaptă d se consideră punctele A și B, astfel încât $AB = 9$ cm. Se știe că punctul M se află pe segmentul AB, astfel încât $AM = \frac{1}{2}$ din MB, N este mijlocul segmentului AB și punctul P este simetricul punctului M față de punctul N.

(5p) **a)** Realizează un desen corespunzător datelor din enunț și calculează lungimea segmentului MP.

(5p) **b)** Calculează lungimile segmentelor AM și PB. Ce poți afirma despre aceste două segmente?

2. În figura alăturată se consideră unghiul alungit AOB. Fie semidreptele OP și OM, situate în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât $\sphericalangle POM = 90°$. Se știe că $\triangleleft POB = \frac{1}{3}$ din $\triangleleft AOM$, iar semidreapta OQ este semidreapta opusă semidreptei OP.



(5p) **a)** Calculează măsurile unghiurilor POB și AOM.

(5p) **b)** Arată că unghiul MOQ este unghi drept.

3. Fie punctele A, B, C coliniare în această ordine, astfel încât $AC = 10$ cm și $AB = 25\%$ din BC. Se știe că semidreapta BC este axă de simetrie pentru unghiul XBY și că $\triangleleft XBC = 42°30'$.

(5p) **a)** Calculează lungimile segmentelor AB și BC.

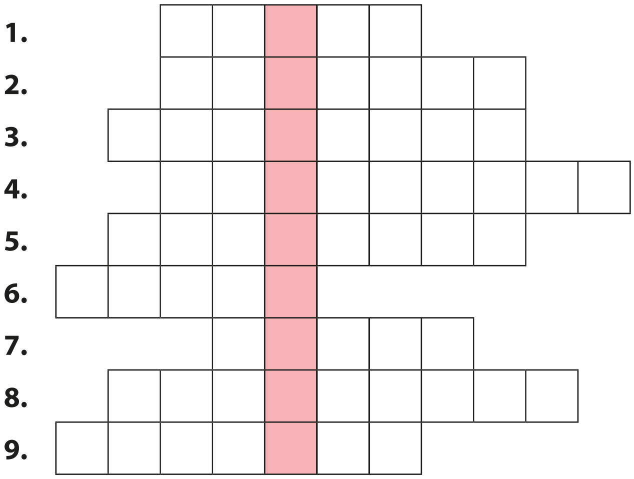
(5p) **b)** Calculează măsurile unghiurilor XBY și ABX.

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

Joc

Completează rebusul pentru a descoperi ramura matematicii care studiază formele și proprietățile corpurilor, precum și raporturile lor spațiale.

1. Figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine.
2. Figura geometrică formată dintr-o infinitate de puncte.
3. Instrument pentru măsurarea unghiurilor.
4. Imagini identice despărțite de o axă.
5. Punct situat în afara unei drepte.
6. Submultiplu al gradului.
7. Unghi de 90°.
8. Puncte situate pe aceeași dreaptă.
9. Porțiune dintr-o dreaptă, limitată la ambele capete.



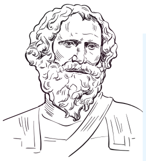
7

UNITATEA VII

Unități de măsură

CUPRINS

Cea mai scurtă distanță dintre două puncte este linia dreaptă.



Arhimede din Siracuza (287 – 212 î.Hr.) este considerat unul dintre cei mai mari matematicieni ai lumii. Realizările sale se remarcă atât în matematică, cât și în fizică, astronomie, inginerie și filozofie.

VII.1. UNITĂȚI DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIME. TRANSFORMĂRI. APLICAȚIE: PERIMETRE

Descoperă

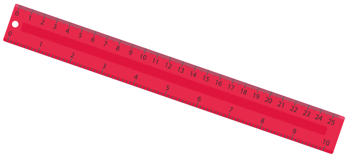
Să ne amintim că a măsura o lungime înseamnă a vedea de câte ori se cuprinde o unitate de măsură aleasă în lungimea segmentului sau în distanța pe care vrem să o măsurăm.

În vechile civilizații, oamenii, trăind în colectivități izolate, pentru a putea face comerț, foloseau ca unități de măsură ceea ce aveau la îndemână și anume: palma, cotul, piciorul, pasul, grosimea degetului mare etc. Timp de secole s-au utilizat aceste unități de măsură care conduceau la măsurători inexacte, deoarece nu toți oamenii au lungimea pasului aceeași, lungimea palmei a doi oameni poate fi, de cele mai multe ori, diferită. De-a lungul timpului comerțul s-a dezvoltat, iar aceste neajunsuri, determinate de utilizarea unor unități de măsură diferite și imprecise, au condus la necesitatea apariției unei unități de măsură standardizată pentru lungime și anume metrul. Pentru ca lungimea metrului să fie aceeași peste tot în lume, în anul 1875, la 20 mai, s-a fabricat, drept etalon, o bară din platină 90% și iridiu 10%. Astfel s-a încheiat, la Paris, Convenția metrului, între toate țările, prin care s-a convenit ca unitatea de măsură pentru lungimi să fie metrul. Fiecare țară a primit câte o copie exactă a metrului-etalon.

Reține!

Unitatea de măsură pentru lungime, în Sistemul Internațional de Unități de măsură (SI), este **metrul** (m).

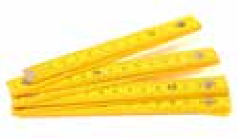
În funcție de mărimea lungimii pe care vrem să o măsurăm, utilizăm diferite instrumente de măsură. De exemplu, la geometrie, lucrând pe caiete, utilizăm rigla gradată, dar dacă vrem să măsurăm lungimea clasei vom utiliza ruleta. Alte instrumente de măsură pentru lungimi sunt: metrul de croitorie, metrul de tâmplărie, șublerul, micrometrul.



riglă gradată

ruletă

metru de croitorie



metru de tâmplărie

șubler

micrometru

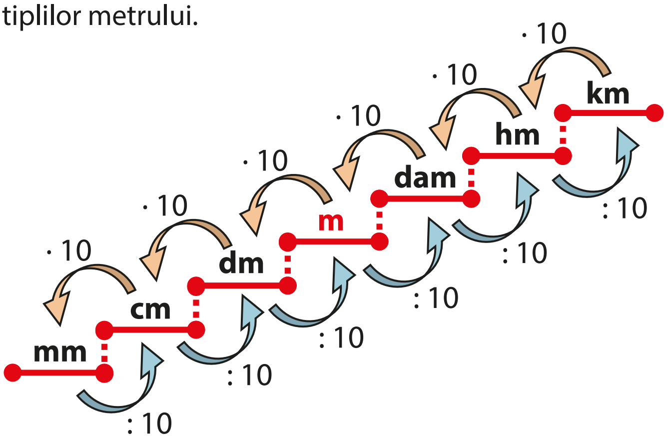
În viața de zi cu zi suntem nevoiți să măsurăm lungimi diferite, cum ar fi distanța de la Pământ la Lună, distanța de la Pitești la Cluj, dimensiunile unei camere, lungimea unui caiet etc. Astfel a apărut necesitatea introducerii multiplilor și submultiplilor metrului.

Multiplii metrului sunt:

- decametrul (dam);
- hectometrul (hm);
- kilometrul (km).

Submultiplii metrului sunt:

- decimetrul (dm);
- centimetrul (cm);
- milimetrul (mm).



Fiecare prefix pentru multiplu sau submultiplu ne arată de câte ori este mai mare, respectiv mai mică, unitatea de măsură respectivă față de unitatea de bază:

– *kilo* (k) înseamnă de 1 000 de ori mai mare;
– *hecto* (h) înseamnă de 100 de ori mai mare;
– *deca* (da) înseamnă de 10 ori mai mare;
– *deci* (d) înseamnă de 10 ori mai mic;
– *centi* (c) înseamnă de 100 de ori mai mic;
– *mili* (m) înseamnă de 1 000 de ori mai mic.

Pentru a face transformări ne vom ajuta de următoarele relații:

1 km = 10 hm = 100 dam = 1 000 m = 10^3 m;
1 hm = 10 dam = 100 m = 10^2 m;
1 dam = 10 m;

$$1 \text{ dm} = 0{,}1 \text{ m} = \frac{1}{10} \text{ m};$$

$$1 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ dm} = 0{,}01 \text{ m} = \frac{1}{100} \text{ m};$$

$$1 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ dm} = 0{,}001 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ m}.$$

Exersează

1. Transformă:

a) 235 m = ... dm; **b)** 4 267 cm = ... m.

Rezolvare: **a)** Atunci când transformăm dintr-o unitate de măsură mai mare într-una mai mică facem înmulțire. În cazul nostru, înmulțim cu 10, deoarece 1 m = 10 dm, și obținem: 235 m = 235 · 10 dm = = 2 350 dm;

b) Atunci când transformăm dintr-o unitate de măsură mai mică într-una mai mare vom face împărțire. În cazul nostru, împărțim la 100, deoarece 1 m = 100 cm, și obținem 4 267 cm = 4 267 : 100 m = = 42,67 m.

Observație: Dacă avem probleme în care trebuie să adunăm sau să scădem lungimi, trebuie să ne asigurăm că sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

2. Calculează:

a) 2,56 m + 45 dm = ... m; **b)** 600 m – 55 dam + 486 dm.

Rezolvare: **a)** Deoarece este precizată unitatea de măsură în care trebuie să avem rezultatul, vom transforma doar 45 dm. Astfel, 45 dm = 45 : 10 m = 4,5 m ⇒ 2,56 m + 4,5 m = 7,06 m.

b) În acest caz nu este precizată unitatea de măsură în care trebuie exprimat rezultatul, deci ne alegem ce unitate de măsură ne avantajează. Vom alege metrul deoarece, fiind unitatea principală, este mai ușor să facem celelalte transformări: 55 dam = 55 · 10 m = 550 m și 486 dm = 486 : 10 m = 48,6 m. În final, 600 m – 550 m + 48,6 m = 50 m + 48,6 m = 98,6 m.

3. Calculează:

a) 0,25 hm + 34 dm – 3 421 mm = ... m;

b) 30 dam + 185 hm + 2,8 m = ... cm.

Rezolvare:

a) Transformăm în unitatea de măsură indicată:
0,25 hm = 0,25 · 100 m = 25 m;
34 dm = 34 : 10 m = 3,4 m;
3 421 mm = 3 241 : 1 000 m = 3,421 m.
Calculăm: 25 m + 3,4 m – 3,421 m =
= 28,4 m – 3,421 m = 24,979 m.

b) Transformăm în centimetri:
30 dam = 30 · 1 000 cm = 30 000 cm;
1,85 hm = 1,85 · 10 000 cm = 18 500 cm;
2,8 m = 2,8 · 100 cm = 280 cm.
Calculăm: 30 000 cm + 18 500 cm + 280 cm =
= 48 780 cm.

4. Ioana parcurge zilnic, de acasă până la școală, distanța de 2,1 km. Maria, care stă mult mai aproape de școală, parcurge distanța de 400 m. Ce distanță este între locuința Ioanei și cea a Mariei, exprimată în kilometri, știind că locuințele fetelor se află pe aceeași stradă cu școala, de aceeași parte cu aceasta?

Rezolvare: Pentru a determina distanța dintre locuința Ioanei și cea a Mariei trebuie să facem o operație de scădere. Observăm că nu avem aceeași unitate de măsură, deci vom face mai întâi transformarea în unitatea de măsură indicată de cerință.

I. 400 m = 400 : 1 000 km = 0,4 km,
2,1 km – 0,4 km = 1,7 km

sau

II. 2,1 km = 2,1 · 1 000 m = 2 100 m,
2 100 m – 400 m = 1 700 m = 1 700 : 1 000 km = 1,7 km.

5. Aflați în tabără la munte, elevii clasei a V-a pleacă în drumeție spre o cabană. Până la primul popas, ei parcurg 4,2 km. După ce s-au odihnit, continuă încă 38 hm până la al doilea popas. Știind că distanța totală până la cabană este de 900 dam, calculează ce distanță mai au de parcurs.

Rezolvare: Observăm că datele problemei sunt exprimate în unități de măsură diferite, deci vom face mai întâi transformările. Unitatea de măsură cea mai potrivită pentru a exprima distanța pe care o mai au de parcurs elevii este kilometrul.

Transformăm: 38 hm = 38 : 10 km = 3,8 km și 900 dam = 900 : 100 km = 9 km.
Până la al doilea popas au parcurs: 4,2 km + 3,8 km = 8 km.
Până la cabană, elevii mai au de parcurs: 9 km – 8 km = 1 km.

Activitate pe grupe

Elevii clasei, împărțiți în trei grupe, primesc următoarele sarcini:

Grupa 1: estimează lungimile/înălțimile următoarelor obiecte din clasă și scriu aceste date în tabel.

Grupa 2: măsoară lungimile/înălțimile obiectelor respective și trec datele în tabel.

Grupa 3: calculează erorile (diferențele între valorile măsurate și cele estimate; în cazul în care valoarea estimată este mai mare decât valoarea măsurată, eroarea se va calcula prin diferența dintre valoarea estimată și cea măsurată).

Obiect măsurat	**Estimare** cm)	**Măsurare** (cm)	**Eroare** (cm)
înălțimea ușii			
lungimea tablei			
înălțimea tablei			
înălțimea cuierului			
lățimea unei ferestre			
lungimea clasei			
înălțimea unei bănci			

Descoperă

Cuvântul **perimetru** provine din limba greacă – *perimetros*, compus din *peri*, care înseamnă „în jurul”, și *metros*, cu semnificația „măsură”.

Gândindu-ne la semnificația cuvintelor de mai sus, putem deduce singuri ce înseamnă perimetrul unei figuri geometrice și anume „ceea ce măsoară conturul ei”.

Calculul perimetrelor are multe aplicații practice, cum ar fi:

– realizarea unui gard în jurul unui teren;
– realizarea unei rame pentru un tablou;
– trasarea tușei unui teren de tenis;
– realizarea unui țarc pentru animale etc.

Reține!

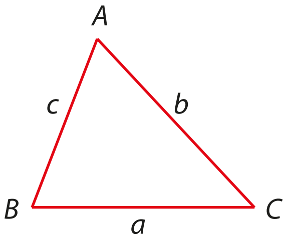
- Suma lungimilor laturilor unei figuri geometrice, exprimate în aceeași unitate de măsură, se numește **perimetru** (se notează cu $\mathcal{P}$).
- Definim **semiperimetrul** unei figuri geometrice ca fiind jumătate din perimetru (se notează cu *p*).

$$p = \frac{\mathcal{P}}{2}$$

Putem calcula perimetrul oricărei figuri geometrice, indiferent de numărul de laturi, cu condiția să cunoaștem lungimile segmentelor care formează conturul acelei figuri.

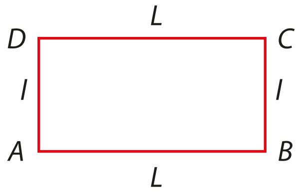
Ne vom opri asupra calculului perimetrelor pentru triunghi, pătrat și dreptunghi, figuri geometrice cunoscute din clasele anterioare.

Perimetrul triunghiului



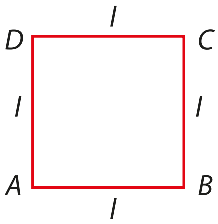
$$\mathcal{P} = a + b + c$$

Perimetrul dreptunghiului



$$\mathcal{P} = L + l + L + l$$
$$\mathcal{P} = 2 \cdot L + 2 \cdot l$$
$$\mathcal{P} = 2 \cdot (L + l)$$

Perimetrul pătratului



$$\mathcal{P} = l + l + l + l$$
$$\mathcal{P} = 4 \cdot l$$

Exersează

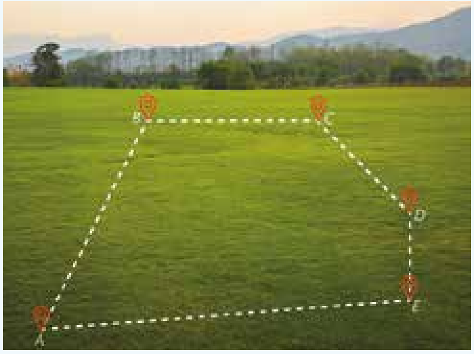
1. Calculează perimetrul terenului *ABCDE* marcat în desen, știind că $AB = 230$ m, $BC = 185$ m, $CD = 220$ m, $DE = 190$ m și $AE = 440$ m.

Rezolvare: Notăm perimetrul terenului cu $\mathcal{P}$ și scriem:

$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DE + AE$

$\mathcal{P} = 230 \text{ m} + 185 \text{ m} + 220 \text{ m} + 190 \text{ m} + 440 \text{ m}$

$\mathcal{P} = 1\,265$ m.



2. Încercuiește varianta corectă:

a) Perimetrul unui triunghi cu lungimile laturilor $a = 10$ cm, $b = 12{,}4$ cm și $c = 5{,}2$ cm este egal cu:

A. 25,6 cm; B. 26,5 cm; C. 27,6 cm; D. 27,6 m.

b) Perimetrul unui pătrat cu latura de 0,25 m este egal cu:

A. 10 m; B. 10 dm; C. 10 cm; D. 10 dam.

c) Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 5 m și lățimea de 2 m este egal cu:

A. 12 m; B. 9 m; C. 7 m; D. 14 m.

Rezolvare:

a) Ne asigurăm că lungimile laturilor sunt exprimate în aceeași unitate de măsură, apoi calculăm: $\mathscr{P} = a + b + c = 10 \text{ cm} + 12{,}4 \text{ cm} + 5{,}2 \text{ cm} = 27{,}6 \text{ cm}$. Deci varianta corectă este C;

b) Perimetrul pătratului este: $\mathscr{P} = 4 \cdot l = 4 \cdot 0{,}25 \text{ m} = 1 \text{ m}$. În grilă nu găsim acest răspuns deci trebuie să transformăm rezultatul în dm, cm și dam. Obținem 1 m = 10 dm = 100 cm = 0,1 dam, deci varianta corectă de răspuns este B;

c) Unitatea de măsură a celor două dimensiuni fiind aceeași, putem calcula perimetrul: $\mathscr{P} = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot (5 + 2) = 2 \cdot 7 = 14$ m, deci varianta corectă de răspuns este D.

3. Un teren în formă de triunghi cu lungimile laturilor $a = 70$ m, $b = 85$ m și $c = 110$ m urmează să fie împrejmuit cu un gard de sârmă. Cât va costa împrejmuirea terenului dacă 1 m de sârmă costă 1,2 lei?

Rezolvare: Calculăm perimetrul terenului: $\mathscr{P} = a + b + c = 70 \text{ m} + 85 \text{ m} + 110 \text{ m} = 265$ m. Știind că 1 m de sârmă costă 1,2 lei, putem afla costul sârmei necesare pentru împrejmuire: $265 \cdot 1{,}2 = 318$ lei.

4. Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 13 cm și lățimea de 7 cm este egal cu perimetrul unui pătrat. Determină latura pătratului.

Rezolvare: Calculăm perimetrul dreptunghiului: $\mathscr{P} = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot (13 + 7) = 2 \cdot 20 = 40$ cm.

Conform datelor din enunț, perimetrul pătratului este egal cu perimetrul dreptunghiului, de unde obținem: $4 \cdot l_p = 40 \Rightarrow l_p = 40 : 4 \Rightarrow l_p = 10$ cm, unde cu l_p am notat latura pătratului.

5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive. Află lungimile laturilor, știind că semiperimetrul triunghiului este de 75 cm.

Rezolvare: Notăm lungimile laturilor cu a, $a + 1$, $a + 2$. Cum $p = \dfrac{\mathscr{P}}{2}$, aflăm perimetrul:

$\mathscr{P} = p \cdot 2 = 75 \cdot 2 = 150$ cm.

Aplicând formula pentru perimetru, obținem: $a + a + 1 + a + 2 = 150 \text{ cm} \Rightarrow 3 \cdot a + 3 = 150 \text{ cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 \cdot a = 150 - 3 \Rightarrow 3 \cdot a = 147 \Rightarrow a = 147 : 3 \Rightarrow a = 49$ cm.

Lungimile laturilor triunghiului sunt: $a = 49$ cm, $a + 1 = 49 + 1 = 50$ cm și $a + 2 = 49 + 2 = 51$ cm.

6. În figura alăturată, perimetrul triunghiului ABC este 80 cm. Punctul D este situat pe latura BC, astfel încât perimetrul triunghiului ABD este 50 cm, iar perimetrul triunghiului ADC este 46 cm. Determină lungimea segmentului AD.

Rezolvare: Vom scrie perimetrele celor trei triunghiuri:

$\mathscr{P}_{ABC} = AB + AC + BC$, $\mathscr{P}_{ABD} = AB + BD + AD$, $\mathscr{P}_{ADC} = AC + DC + AD$.

Înlocuim valorile din enunț și obținem:

$AB + AC + BC = 80$ cm, $AB + BD + AD = 50$ cm, $AC + DC + AD = 46$ cm.

Adunăm ultimele două relații și obținem:

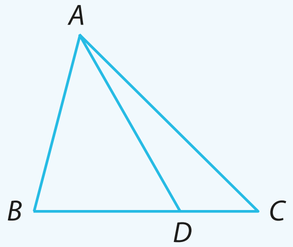
$AB + BD + AD + AC + DC + AD = 50 + 46 = 96$ cm.

Observăm că $BD + DC = BC$ și înlocuind în relația de mai sus, obținem:

$AB + BC + AC + 2 \cdot AD = 96$ cm.

Dar $AB + AC + BC = 80$ cm, deci $80 + 2 \cdot AD = 96$ cm, de unde obținem:

$2 \cdot AD = 96 - 80 \Rightarrow 2 \cdot AD = 16 \Rightarrow AD = 16 : 2 \Rightarrow AD = 8$ cm.



Rezolvă

1. **Alege răspunsul corect!** Maria vrea să măsoare lungimea unui creion. Care este instrumentul de măsură pe care ar trebui să îl folosească?

A. metrul de croitorie; **B.** rigla gradată; **C.** ruleta; **D.** metrul de tâmplărie.

2. **Alege răspunsul corect!** În ce unitate de măsură este potrivit să exprimi lungimea terenului de sport?

A. centimetri; **B.** kilometri; **C.** decametri; **D.** metri.

3. Ioana, Corina și Dan au măsurat lungimea sălii de clasă, obținând următoarele valori: 10,3 m, 1 100 cm și 9,96 m. Deoarece au obținut valori diferite, s-au gândit să facă o medie a măsurătorilor. Cum au procedat cei trei copii și care este valoarea medie a măsurătorilor?

4. Plecând spre școală, Diana a calculat distanța de acasă până la școală, numărând pașii. Știind că a numărat 675 de pași, iar lungimea pasului este de 45 cm, calculează în metri distanța parcursă.

5. La ora de matematică elevii clasei a V-a, împărțiți în patru grupe, au măsurat perimetrul terenului de fotbal.

a) Ce instrument de măsură crezi că au utilizat?

b) Dacă valorile obținute de cele patru grupe au fost 40,2 m, 42,4 m, 41,8 m și 43,6 m, calculează valoarea medie a lungimii terenului.

6. Calculează în unitatea de măsură indicată:

a) 72 dam + 35 hm + 550 m = ... km; **b)** 0,28 km – 0,04 hm + 0,8 dam = ... m;

c) 2,44 m + 68 cm + 0,18 mm + 0,12 dm = … cm; **d)** 4,05 dm + 1,8 m + 2,22 cm = ... mm.

7. Un triunghi are laturile de lungimi 24 cm, 32 cm și 40 cm. Calculează latura unui pătrat care are perimetrul egal cu perimetrul triunghiului.

8. Perimetrul unui dreptunghi este 28 dm. Calculează lungimea și lățimea dreptunghiului, știind că sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive.

9. Un teren în formă de pătrat are lungimea laturii egală cu cel mai mare număr natural de două cifre distincte care este divizibil cu 3 și nu este divizibil cu 2, exprimată în decametri. Terenul urmează să fie împrejmuit cu 3 rânduri de sârmă. Câți metri de sârmă sunt necesari pentru împrejmuirea terenului?

10. Pe un teren de tenis se instalează stâlpi de iluminat, din 4 în 4 m. Știind că terenul este dreptunghiular și are lungimea de 40 m și lățimea de 20 m, află câți stâlpi sunt necesari pentru realizarea instalației.

Evaluează-te

1. Calculează în unitatea de măsură indicată:

a) 98 dam + 135 hm + 432 m = ... km; **b)** 1,28 km – 0,14 hm + 0,83 dam = ... m;

c) 3,7 dm + 2,6 m + 4,08 cm = ... mm; **d)** 20 dam + 175 hm + 5,6 m = ... cm.

3 puncte

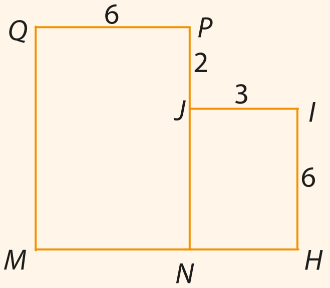
2. Compară perimetrul unui triunghi cu lungimile laturilor $a = 2,3$ dm, $b = 21$ cm și $c = 0,12$ m cu perimetrul unui pătrat care are latura de lungime 160 mm.

3 puncte

3. În figura alăturată este desenat un teren format din două dreptunghiuri, $MNPQ$ și $NHIJ$, cu $QP = 6$ dam, $PJ = 2$ dam, $JI = 3$ dam și $IH = 6$ dam. Calculează în metri perimetrul terenului.

3 puncte

Din oficiu: 1 punct



VII.2. UNITĂȚI DE MĂSURĂ PENTRU ARIE. TRANSFORMĂRI. APLICAȚII: ARIA PĂTRATULUI/DREPTUNGHIULUI

Descoperă




Despre imaginile de mai sus obișnuim să spunem că reprezintă suprafața unui lac, suprafața unui teren agricol, suprafața unui teren de tenis și, respectiv, suprafața unui patinoar. Evident, apare întrebarea cum putem măsura aceste suprafețe și în ce unitate de măsură exprimăm rezultatul?

Pentru a măsura o suprafață neregulată, o descompunem în figuri geometrice cunoscute, a căror suprafață știm să o calculăm, iar apoi adunăm suprafețele calculate. Vom spune astfel că am calculat aria suprafeței neregulate.

Unitatea de măsură în care exprimăm mărimea suprafeței este o unitate de măsură derivată din metru, numită metru pătrat, pe care o notăm m^2.

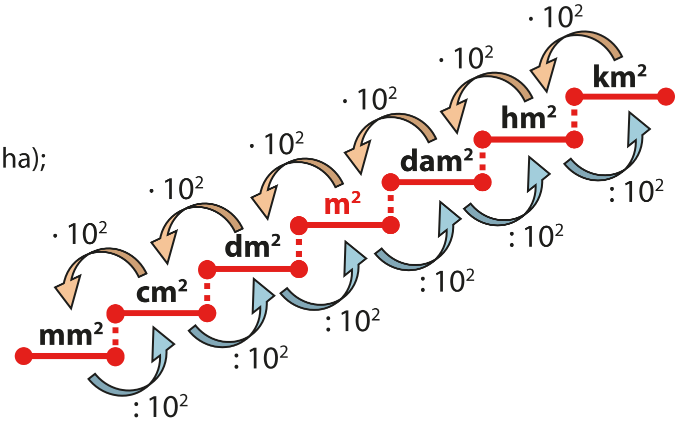
Reține!

- **Suprafața** unei figuri geometrice este formată din toate punctele interioare și toate punctele ce aparțin laturilor.
- **Aria** reprezintă o măsură a suprafeței și arată de câte ori se cuprinde o anumită unitate de măsură în acea suprafață.
- Două figuri geometrice care au aceeași arie se numesc **figuri geometrice echivalente**.
- **Metrul pătrat**, unitatea de măsură pentru arie, reprezintă aria unui pătrat cu latura de 1 m.

Pentru a exprima o suprafață mai mare, de exemplu, suprafața unei țări, vom utiliza multiplii metrului pătrat, iar pentru a măsura o suprafață mai mică, de exemplu suprafața unui telefon mobil, vom utiliza submultiplii metrului pătrat.

Multiplii metrului pătrat sunt:
- decametrul pătrat sau arul (dam^2 / ar);
- hectometrul pătrat sau hectarul (hm^2 / ha);
- kilometrul pătrat (km^2).

Submultiplii metrului pătrat sunt:
- decimetrul pătrat (dm^2);
- centimetrul pătrat (cm^2);
- milimetrul pătrat (mm^2).



Pentru a face transformări, ne vom ajuta de următoarele relații:

$1\ \text{km} = 10^3 \cdot 1\ \text{m} \Rightarrow 1\ \text{km}^2 = (10^3 \cdot 1\ \text{m})^2 = 10^6 \cdot 1\ \text{m}^2 = 1\ 000\ 000\ \text{m}^2$;

$1\ \text{hm} = 10^2 \cdot 1\ \text{m} \Rightarrow 1\ \text{hm}^2 = (10^2 \cdot 1\ \text{m})^2 = 10^4 \cdot 1\ \text{m}^2 = 10\ 000\ \text{m}^2 = 1\ \text{ha}$;

$1\ \text{dam} = 10 \cdot 1\ \text{m} \Rightarrow 1\ \text{dam}^2 = (10 \cdot 1\ \text{m})^2 = 10^2 \cdot 1\ \text{m}^2 = 100\ \text{m}^2 = 1\ \text{ar}$;

$$1\text{ dm} = \frac{1}{10}\cdot 1\text{ m} \Rightarrow 1\text{ dm}^2 = \left(\frac{1}{10}\cdot 1\text{ m}\right)^2 = \frac{1}{10^2}\cdot 1\text{ m}^2 = \frac{1}{100}\text{ m}^2 = 0{,}01\text{ m}^2;$$

$$1\text{ cm} = \frac{1}{10^2}\cdot 1\text{ m} \Rightarrow 1\text{ cm}^2 = \left(\frac{1}{10^2}\cdot 1\text{ m}\right)^2 = \frac{1}{10^4}\cdot 1\text{ m}^2 = \frac{1}{10000}\text{ m}^2 = 0{,}0001\text{ m}^2;$$

$$1\text{ mm} = \frac{1}{10^3}\cdot 1\text{ m} \Rightarrow 1\text{ mm}^2 = \left(\frac{1}{10^3}\cdot 1\text{ m}\right)^2 = \frac{1}{10^6}\cdot 1\text{ m}^2 = \frac{1}{1000000}\text{ m}^2 = 0{,}000001\text{ m}^2.$$

Observații:

Un multiplu sau un submultiplu al metrului pătrat este de $10^2 = 100$ de ori mai mare decât cel imediat inferior și de $10^2 = 100$ de ori mai mic decât cel imediat superior.

În operațiile de adunare sau de scădere trebuie să ne asigurăm că ariile sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

Exersează

1. Transformă:

a) $654{,}2560\text{ m}^2 = ...\text{ dm}^2$; **b)** $23{,}4425\text{ m}^2 = ...\text{ cm}^2$;
c) $0{,}000785\text{ m}^2 = ...\text{ mm}^2$; **d)** $544\text{ m}^2 = ...\text{ dam}^2$.

Rezolvare:

a) Atunci când transformăm dintr-o unitate de măsură mai mare într-una mai mică, facem înmulțire. În cazul nostru înmulțim cu 10^2, deoarece $1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2$.
$654{,}2560\text{ m}^2 = 654{,}2560\cdot 100\text{ dm}^2 = 65425{,}60\text{ dm}^2$.

b) Deoarece $1\text{ m}^2 = 10\,000\text{ cm}^2$, vom înmulți cu 10 000;
$23{,}4425\text{ m}^2 = 23{,}4425\cdot 10\,000\text{ cm}^2 = 234\,425\text{ cm}^2$;

c) Vom înmulți cu $10^6 = 1\,000\,000$, deoarece $1\text{ m}^2 = 1\,000\,000\text{ mm}^2$.
$0{,}000785\text{ m}^2 = 0{,}000785\cdot 10^6\text{ mm}^2 = 785\text{ mm}^2$;

d) Atunci când transformăm dintr-o unitate de măsură mai mică într-una mai mare, facem împărțire. În cazul nostru împărțim la 100, deoarece $100\text{ dam}^2 = 1\text{ m}^2$; $544\text{ m}^2 = 544 : 100\text{ dam}^2 = 5{,}44\text{ dam}^2$.

2. Calculează: $108\text{ dam}^2 + 2{,}356\text{ hm}^2$.

Rezolvare: Deoarece observăm că nu este precizată unitatea de măsură, vom alege o unitate de măsură convenabilă și anume metrul pătrat.
$108\text{ dam}^2 = 108\cdot 100 = 10\,800\text{ m}^2$; $2{,}356\text{ hm}^2 = 2{,}356\cdot 10\,000 = 23\,560\text{ m}^2$.

Acum putem efectua operația de adunare:
$108\text{ dam}^2 + 2{,}356\text{ hm}^2 = 10\,800\text{ m}^2 + 23\,560\text{ m}^2 = 34\,360\text{ m}^2$.

3. Compară:

a) $3{,}7\text{ hm}^2$ cu 37 ha; **b)** 0,000235 ari cu 235 cm^2.

Rezolvare:

a) Știm că $1\text{ hm}^2 = 1$ ha, deci 37 ha $= 37\text{ hm}^2$. Cum $3{,}7 < 37$, rezultă că $3{,}7\text{ hm}^2 < 37$ ha;

b) Este de preferat să transformăm ari în cm^2, deoarece este mai ușor de lucrat cu numere naturale decât cu numere zecimale. Știm că 1 ar $= 1\text{ dam}^2 = 100\text{ m}^2 = 1\,000\,000\text{ cm}^2$, rezultă că 0,000235 ari $=$ $= 0{,}000235\text{ dam}^2 = 0{,}000235\cdot 1\,000\,000\text{ cm}^2 = 235\text{ cm}^2$.

4. Calculează: $8\text{ m}^2\cdot 3 - 1\,100\text{ dm}^2$, exprimând rezultatul în decimetri pătrați.

Rezolvare: Efectuăm mai întâi înmulțirea, apoi vom face transformarea în unitatea de măsură indicată.
$8\text{ m}^2\cdot 3 = 24\text{ m}^2 = 24\cdot 100\text{ dm}^2 = 2\,400\text{ dm}^2$ și $2\,400\text{ dm}^2 - 1\,100\text{ dm}^2 = 1\,300\text{ dm}^2$.

5. Pentru ora de educație plastică, Maria și Ioana au pictat câte un tablou. Tabloul pictat de Maria are suprafața de 0,0025 dam^2, iar tabloul pictat de Ioana are suprafața de 22,5 dm^2. Doamna profesoară afirmă că tabloul Mariei are suprafața mai mare decât tabloul Ioanei. Afirmația este adevărată sau falsă? Justifică răspunsul.

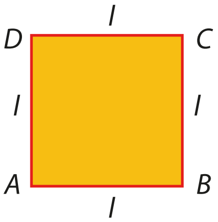
Rezolvare: Pentru a stabili valoarea de adevăr a afirmației profesoarei, vom transforma cele două suprafețe în centimetri pătrați, iar apoi le comparăm.

$0{,}0025\ dam^2 = 0{,}0025 \cdot 1\ 000\ 000\ cm^2 = 2\ 500\ cm^2$;

$22{,}5\ dm^2 = 22{,}5 \cdot 100\ cm^2 = 2\ 250\ cm^2$;

$2\ 500 > 2\ 250$, de unde rezultă că tabloul pictat de Maria are suprafața mai mare decât tabloul pictat de Ioana, deci afirmația profesoarei este adevărată.

Reține!



Aria pătratului este egală cu $l \cdot l = l^2$, unde l este latura pătratului.

$$\mathcal{A} = l \cdot l = l^2$$

Exersează

1. Alege răspunsul corect! Aria unui pătrat cu latura de lungime 0,45 dam este egală cu:

A. 2,025 m^2; **B.** 0,2025 m^2; **C.** 20,25 dam^2; **D.** 20,25 m^2.

Rezolvare: Pentru a stabili care este răspunsul corect, trebuie să transformăm 0,45 dam în metri, pentru a calcula aria în primele două cazuri. Deci, $l = 0{,}45\ dam = 0{,}45 \cdot 10\ m = 4{,}5\ m$.

$\mathcal{A} = l^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 4{,}5^2 = 20{,}25\ m^2 \Rightarrow$ răspuns corect D.

2. Calculează aria unui pătrat a cărui latură are lungimea de 5 cm.

Rezolvare: Deoarece $l = 5$ cm, aplicăm formula ariei și obținem $\mathcal{A} = l^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 5^2\ cm^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 25\ cm^2$.

3. Un pătrat are aria egală cu 144 cm^2. Calculează perimetrul pătratului.

Rezolvare: Pentru a putea calcula perimetrul pătratului, trebuie să aflăm lungimea laturii acestuia. Vom scrie formula ariei și vom înlocui cu datele cunoscute: $\mathcal{A} = l^2$ sau $l^2 = 144\ cm^2$.

Pentru a afla latura pătratului, trebuie să scriem numărul 144 ca un pătrat perfect. Cum $144 = 12^2$, rezultă că $l^2 = 12^2$ sau $l = 12$ cm, deoarece dacă două puteri egale au același exponent atunci bazele lor sunt egale.

Putem calcula perimetrul: $\mathcal{P} = 4 \cdot l = 4 \cdot 12 = 48$ cm.

4. Câți ari are un teren în formă de pătrat cu latura de lungime 3,5 m?

Rezolvare:

$\mathcal{A} = l^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 3{,}5^2 = 12{,}25\ m^2$.

1 ar = 1 dam^2, deci trebuie să transformăm și rezultă:

$\mathcal{A} = 12{,}25\ m^2 = 12{,}25 : 100\ dam^2 = 0{,}1225\ dam^2 = 0{,}1225$ ari.

5. Perimetrul unui teren agricol în formă de pătrat este 120 m. Câte hectare are terenul?

Rezolvare:

$\mathcal{P} = 4 \cdot l \Rightarrow 120 = 4 \cdot l \Rightarrow l = 120 : 4 \Rightarrow l = 30$ m.

Acum putem calcula aria în metri pătrați, iar la final vom transforma în hectare.

$\mathcal{A} = l^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 30^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 900\ m^2 = 900 : 10\ 000\ hm^2 = 0{,}09$ ha.

6. O grădină în formă de pătrat are aria egală cu 100 m^2. Bunicul vrea să o împrejmuiască cu 3 rânduri de sârmă. Câți metri de sârmă trebuie să cumpere bunicul?

Rezolvare: Vom afla mai întâi lungimea laturii grădinii: $\mathcal{A} = l^2 \Rightarrow l^2 = 100\ m^2 \Rightarrow l^2 = 10^2\ m^2 \Rightarrow l = 10$ m.

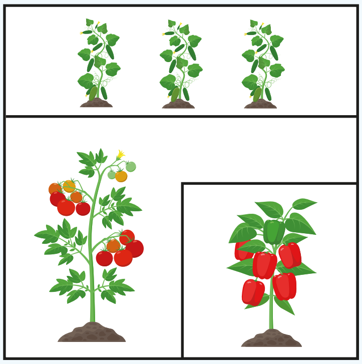
Deoarece bunicul vrea să pună 3 rânduri de sârmă, vom determina mai întâi perimetrul și apoi vom afla câtă sârmă este necesară.

$\mathcal{P} = 4 \cdot l = 4 \cdot 10 = 40$ m, deci $L_{\text{sârmă}} = 3 \cdot 40 = 120$ m.

7. Ina vrea să cumpere pentru camera ei un covor în formă de pătrat cu latura de 2,2 m. Cât va plăti Ina pentru covor, știind că prețul este de 80 de lei/m^2?

Rezolvare: Aflăm aria covorului: $\mathcal{A} = l^2 = 2{,}2^2 = 4{,}84\ m^2$. Deoarece 1 m^2 costă 80 de lei, suma plătită de Ina este: $4{,}84 \cdot 80 = 387{,}2$ lei.

8. Pe suprafața unei grădini în formă de pătrat, bunica plantează roșii, castraveți și ardei, după cum urmează: pe un sfert din suprafață ardei, pe o treime din suprafață castraveți și pe restul roșii. Știind că aria grădinii este de 324 m^2, calculează suprafața plantată cu roșii.



Rezolvare: Vom calcula mai întâi suprafața plantată cu ardei:

$$\frac{1}{4} \cdot 324 = \frac{324}{4} = 81\ m^2.$$

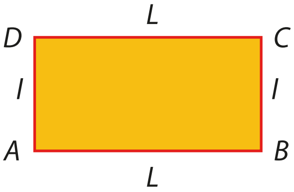
Suprafața plantată cu castraveți: $\frac{1}{3} \cdot 324 = \frac{324}{3} = 108\ m^2$.

Suprafața plantată cu roșii: $324 - 81 - 108 = 243 - 108 = 135\ m^2$.

Reține!

Aria dreptunghiului este egală cu $L \cdot l$, unde L este lungimea dreptunghiului, iar l este lățimea sa.

$$\mathcal{A} = L \cdot l$$



Exersează

1. Alege răspunsul corect! Aria unui dreptunghi cu $l = 12$ dm și $L = 1{,}5$ m este egală cu:

A. 1,8 m^2; **B.** 180 m^2; **C.** 18 m^2; **D.** 18 dm^2.

Rezolvare: Transformăm lățimea în metri și obținem: $l = 12\ dm = 12 : 10 = 1{,}2$ m.

$\mathcal{A} = L \cdot l = 1{,}2 \cdot 1{,}5 = 1{,}8\ m^2$. Răspunsul corect este A.

2. Aria unui dreptunghi este 100 cm^2. Știind că lățimea dreptunghiului este de 4 ori mai mică decât lungimea, calculează perimetrul dreptunghiului.

Rezolvare: Pentru a afla perimetrul, trebuie să aflăm lungimea și lățimea. Scriem matematic relația dintre ele și apoi înlocuim în formula ariei.

$l = L : 4 \Rightarrow L = 4 \cdot l$, iar $\mathcal{A} = L \cdot l \Rightarrow 4 \cdot l \cdot l = 100 \Rightarrow 4 \cdot l^2 = 100 \Rightarrow l^2 = 100 : 4 \Rightarrow l^2 = 25 \Rightarrow l^2 = 5^2 \Rightarrow l = 5$ cm.

Acum putem afla și lungimea dreptunghiului: $L = 4 \cdot 5 \Rightarrow L = 20$ cm.

$\mathcal{P} = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot (20 + 5) = 2 \cdot 25 = 50$ cm.

3. Semiperimetrul unui dreptunghi este de 55 cm. Știind că $2 \cdot L = 3 \cdot l$, calculează aria dreptunghiului.

Rezolvare: Știm că semiperimetrul este jumătate din perimetru, deci perimetrul dreptunghiului este $\mathcal{P} = 55 \cdot 2 = 110$ cm. Însă $\mathcal{P} = 2L + 2l$ și, ținând cont că $2L = 3l$, deducem că $\mathcal{P} = 3l + 2l = 5l$, ceea ce implică $5l = 110$, de unde $l = 22$ cm și atunci $2L = 3 \cdot 22 = 66$, deci $L = 33$ cm. Aria dreptunghiului este $\mathcal{A} = L \cdot l = 33 \cdot 22 = 726\ cm^2$.

4. Lungimea unui dreptunghi este de 3 ori mai mare decât lățimea. Știind că perimetrul este egal cu 32 cm, calculează aria dreptunghiului.

Rezolvare: Scriem datele problemei matematic:

$L = 3 \cdot l$;

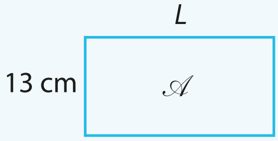
$\mathcal{P} = 2 \cdot (L + l) \Rightarrow 2 \cdot (L + l) = 32$ cm $\Rightarrow L + l = 32 : 2$ cm $\Rightarrow L + l = 16$ cm; $3l + l = 16$ cm $\Rightarrow 4 \cdot l = 16$ cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow l = 4$ cm $\Rightarrow L = 12$ cm;

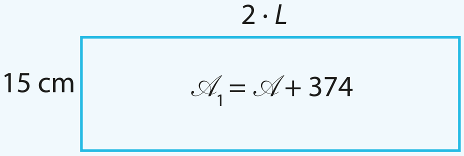
Calculăm aria dreptunghiului: $\mathcal{A} = L \cdot l \Rightarrow \mathcal{A} = 12 \cdot 4 = 48$ cm².

5. Un dreptunghi are lățimea de 13 cm. Calculează lungimea dreptunghiului, știind că dacă aceasta ar fi de 2 ori mai mare și lățimea cu 2 cm mai mare, aria sa ar fi cu 374 cm² mai mare.

Rezolvare: Scriem datele problemei:

- $l = 13$ cm, $L_1 = 2 \cdot L$, $l_1 = l + 2$;
- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} + 374$;





$\mathcal{A} = L \cdot l \Rightarrow \mathcal{A} = 13 \cdot L$;

$\mathcal{A}_1 = L_1 \cdot l_1 \Rightarrow \mathcal{A}_1 = 2 \cdot L \cdot (l + 2) = 2 \cdot L \cdot (13 + 2) = 2 \cdot L \cdot 15 = 30 \cdot L$.

Înlocuim acum pe $\mathcal{A}_1$ în relația cu arii și obținem:

$30 \cdot L = 13 \cdot L + 374 \Rightarrow 30 \cdot L - 13 \cdot L = 374 \Rightarrow 17 \cdot L = 374 \Rightarrow L = 374 : 17 \Rightarrow L = 22$ cm.

6. Câte hectare are un teren în formă de pătrat care are perimetrul egal cu perimetrul unui dreptunghi cu $L = 44$ m și $l = 120$ dm?

Rezolvare: Pentru început ne asigurăm că avem dimensiunile exprimate în aceeași unitate de măsură. Transformăm: $l = 120$ dm $= 120 : 10 = 12$ m.

Calculăm perimetrul dreptunghiului: $\mathcal{P}_{\text{dreptunghi}} = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot (44 + 12) = 2 \cdot 56 = 112$ m.

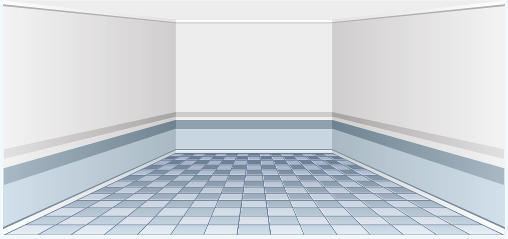
Cum $\mathcal{P}_{\text{dreptunghi}} = \mathcal{P}_{\text{pătrat}} \Rightarrow 4 \cdot l_{\text{pătrat}} = 112 \Rightarrow l_{\text{pătrat}} = 112 : 4 \Rightarrow l_{\text{pătrat}} = 28$ m.

Putem calcula aria terenului: $\mathcal{A} = l^2_{\text{pătrat}} = 28^2 = 784$ m² $= 784 : 10\,000$ hm² $= 0{,}0784$ hm² $= 0{,}0784$ ha.

7. Câte plăci de gresie în formă de dreptunghi cu dimensiunile $L = 40$ cm și $l = 25$ cm sunt necesare pentru a acoperi suprafața unei bucătării în formă de pătrat cu lungimea laturii de 3 m?

Rezolvare: Pentru a afla numărul de plăci necesare, calculăm mai întâi aria bucătăriei:

$\mathcal{A} = l^2 = 3^2 = 9$ m².



Calculăm apoi aria unei plăci de gresie:

$\mathcal{A} = L \cdot l = 40 \cdot 25 = 1\,000$ cm².

Observăm că cele două arii nu sunt exprimate în aceeași unitate de măsură deci trebuie să transformăm:

9 m² = 9 · 10 000 cm² = 90 000 cm².

Pentru a afla numărul de plăci necesare pentru a acoperi suprafața bucătăriei, înseamnă să calculăm de câte ori se cuprinde aria unei plăci în suprafața bucătăriei, adică să facem o operație de împărțire: 90 000 : 1 000 = 90 de plăci.

8. Irina vrea să pună parchet laminat în camera de oaspeți. Camera este de formă dreptunghiulară cu lungimea de 6 m și lățimea de 5 m. Plăcile de parchet sunt în formă de dreptunghi cu lungimea de 1 200 mm și lățimea de 200 mm. Știind că plăcile de parchet sunt ambalate în cutii de 1,92 m², determină câte plăci sunt într-o cutie și câte cutii trebuie să cumpere Irina.

Rezolvare: Calculăm suprafața camerei: $\mathcal{A} = L \cdot l = 6 \cdot 5 = 30$ m².

Observăm că ar fi indicat să transformăm în metri dimensiunile plăcii, înainte de a-i calcula aria.
1 200 mm = 1 200 : 1 000 m = 1,2 m; 200 mm = 200 : 1 000 m = 0,2 m.

Acum putem calcula suprafața unei plăci: $\mathcal{A} = L \cdot l = 1{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}24$ m².

Aflăm acum câte plăci sunt într-o cutie: 1,92 : 0,24 = 8 plăci. Pentru a ști câte cutii trebuie să cumpere Irina, vom împărți suprafața camerei la numărul de metri pătrați dintr-o cutie:
30 : 1,92 = 15,625, deci Irina trebuie să cumpere 16 cutii cu parchet.

Rezolvă

1. **Alege răspunsul corect!**

a) Aria unui pătrat cu latura de 0,8 dm este egală cu:

A. 6,4 dm^2; B. 64 dm^2; C. 64 cm^2; D. 0,64 cm^2.

b) Aria unui dreptunghi cu lungimea de 48 dm și lățimea de 0,24 dam este egală cu:

A. 115,2 m^2; B. 11,52 m^2; C. 1 152 m^2; D. 1,152 m^2.

2. Pentru ora de educație plastică Maria are o planșă în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 55 cm și, respectiv, 35 cm, iar Ioana are o planșă în formă de pătrat cu perimetrul egal cu 180 cm. Ioana afirmă că planșa ei are o suprafață mai mare decât planșa Mariei. Afirmația făcută de Ioana este:

a) adevărată; b) falsă.

3. Calculează aria unei grădini în formă de dreptunghi care are perimetrul 84 m și lățimea reprezintă 20% din lungime.

4. Aleea în formă de dreptunghi din fața casei are dimensiunile 12 m, respectiv 1,8 m. Aceasta trebuie pavată cu dale în formă de pătrat cu lungimea laturii de 60 cm. Câte dale sunt necesare pentru a pava aleea?

5. Maria are o grădină în formă de dreptunghi cu lungimea 3 dam și lățimea 1 250 cm. Pentru a cultiva mai multe legume, Maria vrea să mărească lungimea grădinii cu 4 m și lățimea cu 2 m, apoi să o împrejmuiască cu un gard cu 4 rânduri de sârmă.

a) Calculează cu câți metri pătrați se mărește suprafața grădinii.

b) Câți metri de sârmă sunt necesari pentru împrejmuirea grădinii mărite?

Evaluează-te

1. Alege răspunsul corect!

a) Perimetrul unui pătrat a cărui arie este 2,89 m^2 este:

A. 6,8 dm; B. 680 dm; C. 6,8 m; D. 0,68 m.

b) Aria unui dreptunghi care are lungimea egală cu latura unui pătrat de arie 169 cm^2 și lățimea egală cu 0,8 dm, este egală cu:

A. 1,04 dm^2; B. 10,4 dm^2; C. 10,4 cm^2; D. 104 dm^2. **3 puncte**

2. Suprafața unui pătrat cu aria egală cu 144 cm^2 se împarte exact în 3 dreptunghiuri cu arii egale.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Calculează perimetrul unuia dintre cele 3 dreptunghiuri.

c) Determină aria unui pătrat cu latura de lungime egală cu lățimea unuia dintre dreptunghiuri.

3 puncte

3. Dan vrea să își zugrăvească camera, așa că începe să calculeze suprafața pereților, pentru a ști câtă vopsea lavabilă să cumpere. Un perete are formă de dreptunghi cu lungimea egală cu 250 cm și lățimea egală cu 2,2 m, celălalt perete are formă de pătrat cu lungimea laturii egală cu lungimea dreptunghiului, iar pentru pereții unde se află ușa, respectiv geamul, Dan a calculat că i-ar mai trebui 50% din cantitatea de vopsea necesară pentru ceilalți doi pereți.

a) Calculează suprafața totală pe care trebuie să o zugrăvească Dan.

b) Știind că vopseaua dintr-o găleată acoperă 12 m^2, câte găleți trebuie să cumpere Dan?

c) Știind că la două găleți cu lavabilă cumpărate se acordă o reducere de 20%, iar o găleată cu lavabilă costă 32,99 de lei, cât îl va costa pe Dan lavabila cumpărată? **3 puncte**

Din oficiu: 1 punct

VII.3. UNITĂȚI DE MĂSURĂ PENTRU VOLUM. TRANSFORMĂRI. APLICAȚII: VOLUMUL CUBULUI ȘI AL PARALELIPIPEDULUI DREPTUNGHIC

Descoperă

În momentul în care vorbim despre volum trebuie să ne imaginăm un spațiu care are trei dimensiuni: lungime, lățime și înălțime (grosime).

Frecvent, în viața de zi cu zi, auzim despre volumul de apă consumat sau despre capacitatea unei sticle cu apă plată. Astfel, apare problema înțelegerii diferenței dintre volumul și capacitatea unui obiect. Atunci când vorbim despre volumul unui obiect ne referim atât la obiecte solide, cât și la obiecte goale, de exemplu: un cub de zahăr, o cutie, un baton de ciocolată în formă de paralelipiped dreptunghic (cuboid), pe când, dacă vorbim despre capacitate, ne referim la un obiect gol, de exemplu: un container, o găleată, un acvariu etc.

Volum

Capacitate

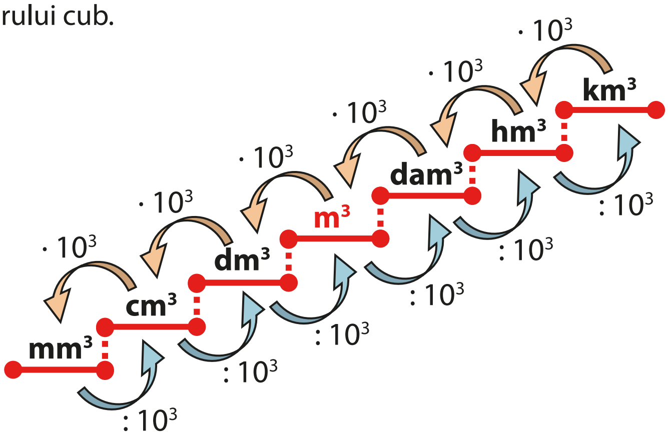
Reține!

- A măsura **volumul** unui corp înseamnă a măsura spațiul ocupat de acel corp.
- Unitatea de măsură principală pentru volum este o unitate de măsură derivată din metru, numită **metru cub**, și se notează cu m^3.
- Un metru cub reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 m.

Atunci când vrem să calculăm volumul unor corpuri foarte mari sau al unor corpuri foarte mici, vom utiliza multiplii, respectiv submultiplii metrului cub.

Multiplii metrului cub sunt:
- decametrul cub (dam^3);
- hectometrul cub (hm^3);
- kilometrul cub (km^3).

Submultiplii metrului cub sunt:
- decimetrul cub (dm^3);
- centimetrul cub (cm^3);
- milimetrul cub (mm^3).



Pentru a face transformări, ne vom ajuta de următoarele relații:

$1\ km = 10^3 \cdot 1\ m \Rightarrow 1\ km^3 = (10^3 \cdot 1\ m)^3 = 10^9 \cdot 1\ m^3 = 1\,000\,000\,000\ m^3$;

$1\ hm = 10^2 \cdot 1\ m \Rightarrow 1\ hm^3 = (10^2 \cdot 1\ m)^3 = 10^6 \cdot 1\ m^3 = 1\,000\,000\ m^3$;

$1\ dam = 10 \cdot 1\ m \Rightarrow 1\ dam^3 = (10 \cdot 1\ m)^3 = 10^3 \cdot 1\ m^3 = 1\,000\ m^3$;

$$1\ dm = \frac{1}{10} \cdot 1m \Rightarrow 1\ dm^3 = \left(\frac{1}{10} \cdot 1\,m\right)^3 = \frac{1}{10^3} \cdot 1\ m^3 = \frac{1}{1000}\ m^3 = 0{,}001\ m^3;$$

$$1\text{ cm} = \frac{1}{10^2}\cdot 1\text{ m} \Rightarrow 1\text{ cm}^3 = \left(\frac{1}{10^2}\cdot 1\text{ m}\right)^3 = \frac{1}{10^6}\cdot 1\text{m}^3 = \frac{1}{1000000}\text{ m}^3 = 0{,}000001\text{ m}^3;$$

$$1\text{ mm} = \frac{1}{10^3}\cdot 1\text{ m} \Rightarrow 1\text{ mm}^3 = \left(\frac{1}{10^3}\cdot 1\text{ m}\right)^3 = \frac{1}{10^9}\cdot 1\text{ m}^3 = \frac{1}{1000000000}\text{ m}^3 = 0{,}000000001\text{ m}^3.$$

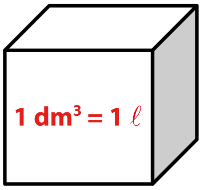
Observații:

- Un multiplu sau un submultiplu al metrului cub este de $10^3 = 1\ 000$ de ori mai mare decât cel imediat inferior și de $10^3 = 1\ 000$ de ori mai mic decât cel imediat superior.
- În operațiile de adunare sau de scădere trebuie să ne asigurăm că volumele calculate sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

Volumul unui obiect este cantitatea reală de materie care acoperă un spațiu definit și se măsoară în unități cubice (cm³, m³ etc.). Capacitatea, însă, se referă la cantitatea potențială de substanță pe care acel obiect este capabil să o dețină și se măsoară în unități metrice precum litrul, galonul etc.

De exemplu, turnând 1 litru de apă într-un recipient cubic, cu latura de 10 cm, vom observa că apa ocupă tot spațiul disponibil. Volumul recipientului cubic este $10\cdot 10\cdot 10\text{ cm}^3 = 1\ 000\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3$.

Spunem că un vas cu volumul egal cu 1 dm³ are capacitatea de 1 litru.



Exersează

1. Transformă:

a) $354{,}056\text{ m}^3 = ...\text{ dm}^3$;

b) $0{,}000122\text{ m}^3 = ...\text{ cm}^3$;

c) $0{,}00000285\text{ m}^3 = ...\text{ mm}^3$;

d) $2\ 150\text{ m}^3 = ...\text{ dam}^3$.

Rezolvare:

a) Atunci când transformăm dintr-o unitate de măsură mai mare într-una mai mică, facem înmulțire. În cazul nostru înmulțim cu 10^3, deoarece $1\text{ m}^3 = 10^3\text{ dm}^3$: $354{,}056\text{ m}^3 = 354{,}056\cdot 10^3\text{ dm}^3 = 354\ 056\text{ dm}^3$;

b) Deoarece $1\text{ m}^3 = 10^6\text{ cm}^3$, înmulțim cu 10^6: $0{,}000122\text{ m}^3 = 0{,}000122\cdot 10^6\text{ cm}^3 = 122\text{ cm}^3$;

c) Înmulțim cu 10^9, deoarece $1\text{ m}^3 = 10^9\text{ mm}^3$: $0{,}00000285\text{ m}^3 = 0{,}00000285\cdot 10^9\text{ mm}^3 = 2\ 850\text{ mm}^3$;

d) Atunci când transformăm dintr-o unitate de măsură mai mică într-una mai mare, facem împărțire. În cazul nostru împărțim la 1 000, deoarece $1\ 000\text{ dam}^3 = 1\text{ m}^3$; $2\ 150\text{ m}^3 = 2\ 150 : 1\ 000\text{ dam}^3 = 2{,}15\text{ dam}^3$.

2. Calculează: $1{,}24\text{ dam}^3 + 0{,}0000034\text{ hm}^3$.

Rezolvare: Deoarece nu este precizată unitatea de măsură, vom alege o unitate de măsură convenabilă și anume metrul cub.

$1{,}24\text{ dam}^3 = 1{,}24\cdot 1\ 000\text{ m}^3 = 1\ 240\text{ m}^3$;

$0{,}0000034\text{ hm}^3 = 0{,}0000034\cdot 10^6\text{ m}^3 = 3{,}4\text{ m}^3$;

Acum putem efectua operația de adunare: $1{,}24\text{ dam}^3 + 0{,}0000034\text{ hm}^3 = 1\ 240\text{ m}^3 + 3{,}4\text{ m}^3 = 1\ 243{,}4\text{ m}^3$.

3. Compară:

a) $0{,}00065\text{ dam}^3$ cu $6\ 500\ \ell$;

b) $0{,}725\text{ dam}^3$ cu $72\cdot 10^7\text{ cm}^3$

Rezolvare:

a) Deoarece $1\ \ell = 1\text{ dm}^3$, rezultă că $6\ 500\ \ell = 6\ 500\text{ dm}^3 = 6\ 500 : 10^6\text{ dam}^3 = 0{,}0065\text{ dam}^3$;
Cum $0{,}00065\text{ dam}^3 < 0{,}0065\text{ dam}^3$, rezultă că $0{,}00065\text{ dam}^3 < 6\ 500\ \ell$;

b) Este de preferat să transformăm în metri cubi, deoarece este mai ușor de lucrat cu numere naturale decât cu numere zecimale.
$0{,}725\text{ dam}^3 = 0{,}725\cdot 10^3\text{ m}^3 = 725\text{ m}^3$, iar $72\cdot 10^7\text{ cm}^3 = (72\cdot 10^7) : 10^6\text{ m}^3 = 720\text{ m}^3$; cum $720 < 725$, rezultă că $0{,}725\text{ dam}^3 > 72\cdot 10^7\text{ cm}^3$.

Reține!

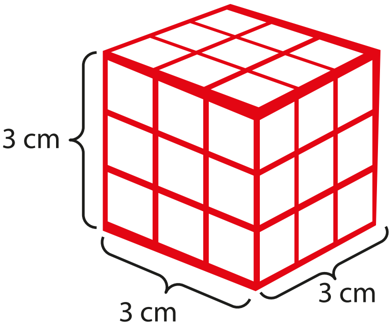
Cubul este un corp geometric mărginit de 6 fețe în formă de pătrat. Cele trei dimensiuni sunt egale și vom nota lungimea lor cu l.

lungimea = lățimea = înălțimea = l

Cubul din imagine este format din 27 de cuburi unitate (cu volumul de 1 cm^3). Observăm că 3 cm · 3 cm · 3 cm = 27 cm^3.

Deducem formula de calcul pentru **volumul unui cub** de latură l:

$$\mathcal{V} = l^3$$



Exersează

1. Maria, Ioana și Irina au calculat volumul unui cub cu latura de lungime 6 cm. Rezultatele obținute au fost trecute în următorul tabel:

	Maria	Ioana	Irina
Volumul cubului	64 cm^3	216 cm^3	196 cm^3

Rezultatul corect a fost obținut de:

A. Maria; **B.** Ioana; **C.** Irina.

Rezolvare: Înlocuind $l = 6$ cm în formula volumului, obținem $\mathcal{V} = 6^3\ cm^3 = 216\ cm^3$. Răspuns corect: B.

2. Volumul unui cub este 64 cm^3. Lungimea laturii cubului este egală cu:

A. 8 cm; **B.** 4 cm; **C.** 32 cm.

Rezolvare: Scriem formula volumului și înlocuim cu valoarea din enunț: $\mathcal{V} = l^3 \Rightarrow 64 = l^3$.

Pentru a afla valoarea laturii trebuie să îl scriem pe 64 ca un număr la puterea a treia; cum $64 = 4^3$, rezultă că $4^3 = l^3$, de unde obținem $l = 4$ cm. Răspuns corect: B.

3. Un acvariu în formă de cub are latura de 50 cm. Câți litri de apă sunt necesari pentru a umple acvariul?

Rezolvare: Pentru a afla volumul de apă trebuie să calculăm volumul acvariului în decimetri cubi. Acest lucru este mult mai simplu dacă transformăm lungimea laturii în decimetri:

$l = 50$ cm $= 50 : 10$ dm $= 5$ dm, prin urmare $\mathcal{V} = l^3 = 5^3\ dm^3 = 125$ litri.

4. Pentru a planta un pom fructifer în grădina școlii, elevii clasei a VIII-a trebuie să sape o groapă în formă de cub, cu latura de 60 cm. Câți metri cubi de pământ vor scoate prin săparea gropii?

Rezolvare: Volumul de pământ care va fi scos este egal cu volumul gropii, adică:

$\mathcal{V} = l^3 = 60^3 = 216\ 000\ cm^3 = 216\ 000 : 1\ 000\ 000\ m^3 = 0{,}216\ m^3$.

5. O piscină în formă de cub cu latura de 2,4 m trebuie umplută cu apă. În cât timp se va umple piscina, dacă printr-o țeavă de umplere intră 72 ℓ/minut?

Rezolvare: Aflăm volumul piscinei și transformăm rezultatul în litri:

$\mathcal{V} = l^3 = 2{,}4^3 = 13{,}824\ m^3 = 13{,}824 \cdot 1\ 000\ dm^3 = 13\ 824\ dm^3 = 13\ 824\ \ell$.

Pentru a afla timpul de umplere a piscinei, împărțim volumul piscinei la volumul de apă care curge prin țeavă într-un minut: 13 824 : 72 = 192 de minute = 3 ore și 12 minute.

6. Într-o cutie în formă de cub cu latura de 12 cm, Ina așază bucățele de zahăr cubic cu latura de 2 cm. Câte cuburi de zahăr încap în cutie?

Rezolvare: Calculăm volumul cutiei: $\mathcal{V} = 12^3 = 1\ 728\ cm^3$.

Calculăm volumul unui cub de zahăr: $\mathcal{V} = 2^3 = 8\ cm^3$.

Aflăm numărul de cuburi de zahăr care încap în cutie: 1 728 : 8 = 216 cuburi.

Reține!

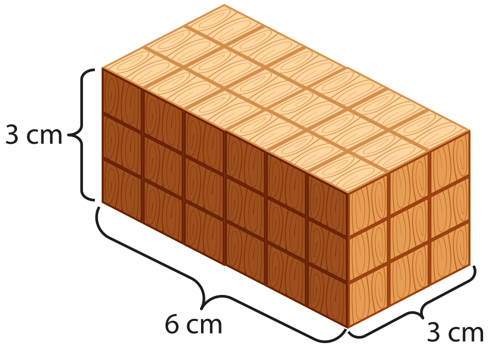
Paralelipipedul dreptunghic este un corp geometric mărginit de 6 fețe în formă de dreptunghi. Fețele opuse sunt de aceeași mărime, două câte două.

Dimensiunile paralelipipedului dreptunghic sunt lungimea (*L*), lățimea (*l*) și înălțimea (*h*).

Paralelipipedul dreptunghic din imagine este format din 54 de cuburi unitate (cu volumul de 1 cm^3). Observăm că 6 cm · 3 cm · 3 cm = 54 cm^3.

Deducem formula de calcul pentru volumul unui paralelipiped dreptunghic: $\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h$.

Observație: Dimensiunile paralelipipedului trebuie să fie exprimate în aceeași unitate de măsură înainte de a calcula volumul.



Exersează

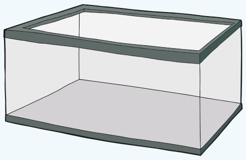
1. Un paralelipiped dreptunghic cu $L = 0{,}25$ hm și $l = 12$ m, are volumul egal cu 2 700 m^3. Calculează înălțimea paralelipipedului.

Rezolvare: Observăm că volumul este exprimat în metri cubi, deci este bine să transformăm toate dimensiunile în metri: $L = 0{,}25$ hm $= 0{,}25 \cdot 100$ m $= 25$ m.

Vom scrie acum formula volumului și vom înlocui valorile cunoscute:

$\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h \Rightarrow 2\,700 = 25 \cdot 12 \cdot h \Rightarrow 2\,700 = 300 \cdot h \Rightarrow h = 2\,700 : 300 \Rightarrow h = 9$ m.

2. Câți litri de apă sunt necesari pentru a umple un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 0{,}7$ dam, $l = 0{,}012$ hm și $h = 0{,}8$ m?



Rezolvare: Știm că 1 ℓ = 1 dm^3 deci vom transforma dimensiunile în decimetri:

$L = 0{,}7$ dam $= 0{,}7 \cdot 100$ dm $= 70$ dm;

$l = 0{,}012$ hm $= 0{,}012 \cdot 1\,000$ dm $= 12$ dm;

$h = 0{,}8$ m $= 0{,}8 \cdot 10$ dm $= 8$ dm.

Deci $\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h = 70 \cdot 12 \cdot 8 = 6\,720$ dm^3 $= 6\,720\ \ell$.

3. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 60$ cm, $l = 40$ cm și $h = 80$ cm se umple cu pachete în formă de cub cu latura de lungime 8 cm. Câte pachete încap în cutie?

Rezolvare: Calculăm mai întâi volumul cutiei, apoi volumul unui pachet. Pentru a determina câte pachete încap în cutie, împărțim volumul cutiei la volumul unui pachet.

$\mathcal{V}_{\text{cutie}} = 60 \cdot 40 \cdot 80 = 192\,000$ cm^3.

$\mathcal{V}_{\text{pachet}} = 8^3 = 512$ cm^3.

$\mathcal{V}_{\text{cutie}} : \mathcal{V}_{\text{pachet}} = 192\,000 : 512 = 375$ de cutii.

4. Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 10$ m, $l = 8$ m și $h = 2{,}5$ m urmează să fie umplut cu apă prin patru robinete. Știind că printr-un robinet curg 50 ℓ apă/minut, în cât timp se va umple bazinul?

Rezolvare: Calculăm volumul bazinului:

$\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h = 10 \cdot 8 \cdot 2{,}5 = 200$ m^3 $= 200 \cdot 1\,000$ dm^3 $= 200\,000$ dm^3 $= 200\,000\ \ell$.

Calculăm câți litri de apă curg prin patru robinete într-un minut: $50 \cdot 4 = 200\ \ell$.

Acum putem calcula timpul de umplere: 200 000 : 200 = 1 000 de minute = 16 ore și 40 de minute.

Rezolvă

1. Calculează volumul unui cub, știind că aria unei fețe este egală cu 64 m^2.

2. Calculează volumul unui dulap în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 80$ cm, $l = 55$ cm și $h = 1{,}5$ cm.

3. Lângă terenul de sport al unei școli se află o groapă în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 3 m, lățimea de 2,5 m și adâncimea de 50 cm. Câți metri cubi de nisip sunt necesari pentru a umple groapa?

4. Volumul unui cub este egal cu volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 20$ dm, $l = 160$ cm și $h = 2\,500$ mm. Calculează latura cubului.

5. Compară volumul unui cub cu latura de 12 cm cu volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 0{,}2$ m, $l = 1{,}1$ dm și $h = 0{,}8$ dm.

6. Într-un bax cu medicamente, în formă de paralelipiped dreptunghic cu $L = 50$ cm, $l = 30$ cm și $h = 20$ cm, urmează să fie așezate cutii în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 10$ cm, $l = 5$ cm și $h = 2$ cm. Precizează dacă în bax încap 250 de cutii. Justifică răspunsul.

7. Dan vrea să construiască un paravan în formă de paralelipiped dreptunghic, având volumul de 5 m^3. Câte cuburi din lemn cu latura de lungime $l = 25$ cm îi sunt necesare lui Dan pentru a construi paravanul?

8. Într-un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 60$ cm, $l = 40$ cm și $h = 50$ cm se află 96 ℓ de apă. În acvariu se introduc patru ornamente identice, în formă de cub, cu latura de 6 cm.

a) Până la ce înălțime se află apă în acvariu?

b) Până la ce înălțime se ridică apa în acvariu după introducerea ornamentelor?

Evaluează-te

1. Transformă în unitatea de măsură indicată:

a) $0{,}00045$ m^3 – $0{,}0145$ dm^3 = ... mm^3; b) $0{,}576$ dam^3 + $6\,500$ m^3 – $15\,000$ dm^3 = ... dm^3.

3 puncte

2. Stabilește valoarea de adevăr (A/F) a propozițiilor:

a) ☐ Volumul unui cub cu latura de 8 cm este egal cu 512 dm^3.

b) ☐ Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 32$ cm, $l = 18$ cm și $h = 24$ cm este 1,3824 m^3.

c) ☐ Într-un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 30$ cm, $l = 22$ cm și $h = 25$ cm încap 16 litri de apă.

3 puncte

3. Pentru a uda grădina de legume, bunicii au cumpărat un rezervor de apă în formă de paralelipiped dreptunghic, ale cărui dimensiuni sunt $L = 2{,}5$ m, $l = 2$ m și $h = 2{,}8$ m.

a) Câți litri de apă încap în rezervor?

b) Câte zile le-ar ajunge apa, dacă rezervorul ar fi plin și s-ar consuma 280 litri/zi?

c) Cât ar trebui să fie înălțimea rezervorului pentru ca apa să le ajungă 60 de zile, dacă lungimea și lățimea rămân aceleași?

3 puncte

Din oficiu: 1 punct

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima lungimea unui râu este:
a) m; **b)** km; **c)** cm; **d)** mm.

(5p) **2.** Instrumentul de măsură adecvat pentru a măsura lungimea unui teren de sport este:
a) rigla gradată; **b)** micrometrul; **c)** șublerul; **d)** ruleta.

(5p) **3.** Unitatea de măsură pentru arie este:
a) m; **b)** m^2; **c)** m^3; **d)** hm.

(5p) **4.** Rezultatul calculului 800 m – 50 dam este:
a) 300 dm; **b)** 300 dam; **c)** 300 m; **d)** 300 cm.

(5p) **5.** Rezultatul calculului 186 dam^2 – 0,056 hm^2 este:
a) 186,56 dam^2; **b)** 180,4 dam^2; **c)** 179,44 dam^2; **d)** 130 dam^2.

(5p) **6.** Rezultatul calculului 12,44 dam^3 + 0,00056 hm^3 este:
a) 13 hm^3; **b)** 13 dam^3; **c)** 12,496 dam^3; **d)** 12,496 hm^3.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Perimetrul unui triunghi cu lungimile laturilor $a = 12$ cm, $b = 1,3$ dm și $c = 5$ cm este:
a) 18,3 cm; **b)** 17,13 cm; **c)** 30 cm; **d)** 7,5 dm.

(5p) **2.** Aria unui dreptunghi care are lungimea egală cu latura unui pătrat cu perimetrul egal cu 48 cm și lățimea egală cu o treime din lungime este:
a) 48 cm^2; **b)** 12 cm^2; **c)** 32 cm^2; **d)** 4,8 dm^2.

(5p) **3.** Tudor vrea să pună gresie pe o suprafață de 4,32 m^2. Plăcile de gresie sunt în formă de pătrat cu latura de lungime egală cu cel mai mic număr natural compus, exprimată în decimetri. Numărul de plăci necesare pentru a acoperi suprafața este:
a) 43 de plăci; **b)** 10 plăci; **c)** 27 de plăci; **d)** 18 plăci.

(5p) **4.** Pentru a umple cu apă un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 50 cm, lățimea de 40 cm și adâncimea de 45 cm sunt necesari:
a) 9 litri; **b)** 0,9 litri; **c)** 900 de litri; **d)** 90 de litri.

(5p) **5.** Într-un rezervor în formă de cub sunt 1 728 litri de apă, rezervorul fiind plin. Latura rezervorului are:
a) 12 dm; **b)** 1,2 dm; **c)** 0,12 dm; **d)** 12 m.

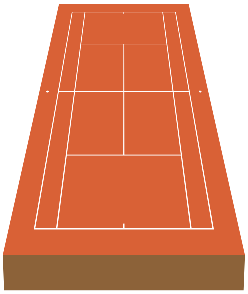
(5p) **6.** Pentru a pava o alee cu lungimea de 24 m, lățimea de 1,8 m și grosimea de 20 cm, volumul de pietriș necesar este:
a) 0,864 m^3; **b)** 8,64 m^3; **c)** 864 m^3; **d)** 86,4 m^3.

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Andrei vrea să își amenajeze un teren de tenis. Terenul trebuie să aibă lungimea de 24 m și lățimea de 110 dm, iar peste stratul de pietriș va pune un strat de zgură având o grosime de 8 cm.

(5p) **a)** Calculează perimetrul și aria terenului de tenis.

(5p) **b)** Câți metri cubi de zgură trebuie să cumpere Andrei?



2. Maria și-a cumpărat un acvariu în formă de cub cu latura de lungime 500 mm și vrea să îl așeze pe un suport în formă de pătrat.

(5p) **a)** Câți litri de apă sunt necesari pentru a umple acvariul până la înălțimea de 40 cm?

(5p) **b)** Cât sunt perimetrul și suprafața suportului, știind că după așezarea acvariului suprafața rămasă liberă este 2 400 cm^2?

3. În cadrul proiectului „Săptămâna verde”, elevii clasei a VIII-a au hotărât să vopsească gardul ce împrejmuiește grădina școlii în formă de dreptunghi, care are lungimea de 2,5 dam și lățimea de 0,06 hm.

(5p) **a)** Câți litri de vopsea trebuie să cumpere elevii, știind că gardul are înălțimea de 1,2 m, iar pentru a vopsi o suprafață de un metru pătrat sunt necesari 0,35 litri de vopsea?

(5p) **b)** Calculează suprafața grădinii în ari.

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

INVESTIGAȚIE

MICUL DECORATOR

Planul investigației

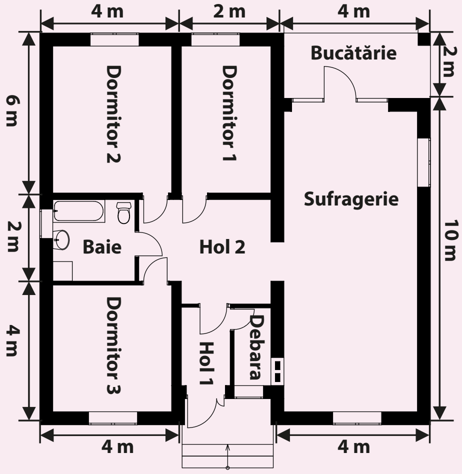
- Materiale necesare: ruletă, riglă, creion, coli de hârtie A4.
- Scopul: vei realiza o schiță a casei/apartamentului în care locuiești.

Realizarea investigației

- Folosind o ruletă, măsoară toate spațiile utile din casa/apartamentul în care locuiești. Notează valorile într-un tabel asemănător.

Spațiul	Lungimea (în metri)	Lățimea (în metri)	Suprafața podelei (m²)	Suprafața pereților (m²)
Sufragerie				
Bucătărie				
Baie				
Hol 1				
Hol 2				
Dormitor 1				
Dormitor 2				
Dormitor 3				
Debara				

- Folosind scara 100:1, desenează pe o coală de hârtie A4 planul casei/apartamentului. Dacă, de exemplu, sufrageria are 10 m lungime și 4 m lățime, pe hârtie o vei reprezenta printr-un dreptunghi de lungime 10 cm și lățime 4 cm.
- Folosind rigla, reprezintă corect în planul tău toate spațiile utile de locuit (vezi exemplul de mai jos).



Analiză

- Estimează cantitatea de parchet (m^2) necesar pentru a decora podeaua casei. Realizează un studiu din care să poți determina, pentru diferite forme/mărimi ale plăcilor de parchet disponibile la magazin, câte cutii îți sunt necesare pentru placarea întregii suprafețe a podelei.
- Estimează necesarul de gresie și de faianță (m^2) de care ai nevoie pentru a placa suprafața băii și/sau bucătăriei. Fă mai multe estimări, luând în calcul diverse forme și mărimi ale plăcilor de gresie/faianță disponibile în magazine.
- Estimează necesarul de vopsea lavabilă (litri) pentru a vopsi pereții interiori/exteriori ai casei. Nu uita să scazi suprafețele ferestrelor și ale ușilor!

Prezentarea investigației

- Prezintă în fața colegilor rezultatele tale.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE FINALĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

SUBIECTUL I. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului 12 + 8 : 2 este egal cu:
a) 10; **b)** 15; **c)** 16; **d)** 20.

(5p) **2.** Restul împărțirii numărului 43 la 10 este egal cu:
a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5.

(5p) **3.** Dintre numerele 25, 32, 42 și 50, divizibil cu 6 (adică cu 2 și cu 3) este:
a) 25; **b)** 32; **c)** 42; **d)** 50.

(5p) **4.** Tabelul de mai jos conține numărul de cărți împrumutate de la biblioteca școlii, de elevii clasei a V-a, pe parcursul unei săptămâni.

Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
25	22	14	18	21

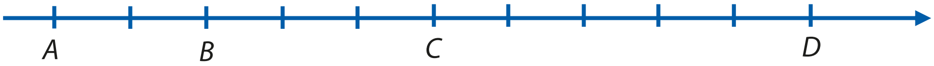
43% din numărul total de cărți împrumutate pe parcursul întregii săptămâni, au fost cerute în zilele:
a) luni și miercuri; **b)** luni și marți; **c)** marți și joi; **d)** marți și vineri.

(5p) **5.** Rezultatul calculului (3,25 + 5,75) : 3 este egal cu:
a) 2,30; **b)** 2,00; **c)** 2,45; **d)** 3,00.

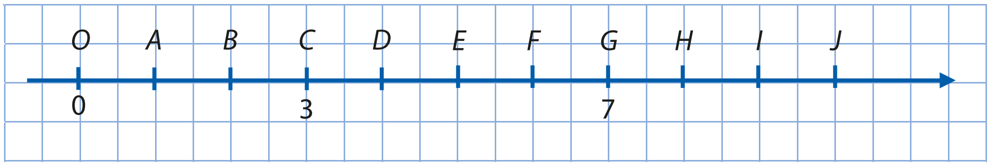
(5p) **6.** Diana spune că, dacă ea cumpără 3 trandafiri cu 15 lei, atunci Larisa poate cumpăra 4 trandafiri cu 20 de lei. Afirmația Dianei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

Subiectul al II-lea. Notează în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

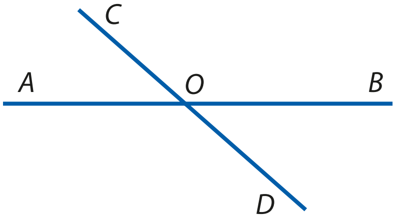
(5p) **1.** În figura de mai jos, punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt coliniare, în această ordine, cu *AB* = 2 cm, *BC* = 3 cm și *CD* = 5 cm. Mijlocul segmentului *AD* este:
a) *A*;
b) *B*;
c) *C*;
d) *D*.



(5p) **2.** Coordonata punctului *J* din desenul de mai jos este:
a) 8;
b) 9;
c) 10;
d) 11.

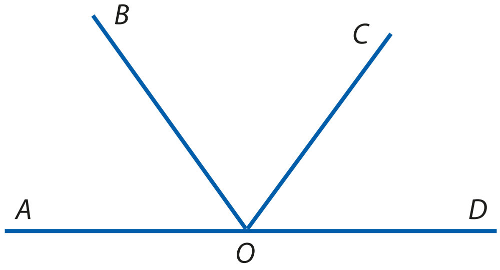


(5p) **3.** În figura de mai jos, măsura unghiului *AOC* are 35° și unghiul *AOB* este unghi alungit.



Măsura unghiului *BOC* este egală cu:
a) 35°; **b)** 55°; **c)** 70°; **d)** 145°.

(5p) **4.** În figura de mai jos, punctele *A*, *O* și *D* sunt coliniare, iar unghiurile *AOB*, *BOC* și *COD* sunt congruente.



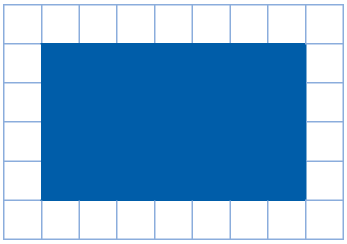
Măsura unghiului *BOC* este egală cu:

a) 45°; **b)** 60°; **c)** 90°; **d)** 120°.

(5p) **5.** Curtea școlii are forma unui dreptunghi cu lungimea de 120 metri, iar lățimea reprezintă $\frac{2}{3}$ din lungime. Perimetrul curții este egal cu:

a) 200 m; **b)** 300 m; **c)** 400 m; **d)** 500 m.

(5p) **6.** În figura de mai jos, aria unui pătrat este de 10 cm². Aria dreptunghiului colorat, exprimată în decimetri pătrați, este egală cu:



a) 1,4 dm²; **b)** 2 dm²; **c)** 2,4 dm²; **d)** 2,8 dm².

Subiectul al III-lea. Scrie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Rezolvă:

(5p) **a)** $26{,}73 + 42{,}54 - 19{,}42$;

(5p) **b)** $[(3^9)^8 \cdot 27^{13}] : 81^{11}$.

(5p) **2.** **a)** Transformă următoarele fracții zecimale în fracții ordinare ireductibile: 7,4; 3,25; 0,012; 0,(5); 2,(36); 4,1(6); 0,16(03).

(5p) **b)** Calculează: $\left[\frac{7}{5} : \frac{14}{15} + \frac{3}{2} : \left(\frac{9}{4} - 1\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \frac{4}{14}$.

(5p) **3.** **a)** Dacă 2 kg de cartofi si 3 kg de mere costă 13,75 lei, iar 3 kg de cartofi si 1 kg de mere costă 9,25 lei, calculează cât costă un kilogram de mere.

(5p) **b)** Determină termenul necunoscut: $4x - 3{,}28 = 14{,}72$.

Verifică răspunsurile date cu ajutorul colegilor și al profesorului tău.
Calculează punctajul obținut cu ajutorul baremului, împarte rezultatul la 10 și află ce notă ai luat!

SOLUȚII

Recapitulare și evaluare inițială

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** a). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** a). **3.** d). **4.** b). **5.** b) **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. 120. **2.** 15 kg. **3.** 7:35, 10:10, 2 ore și 35 de minute.

Unitatea I

Pagina 15: **2.** a) 509; b) 105 724; c) 38 540 021; d) 8 000 000 025. **5.** 437. **6.** 2 432. **7.** 14, 28, 41, 82. **8.** 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312, 321. **9.** 4, 6, 3, 7, 1. **10.** 470, 472, 474, 476, 478.
Evaluează-te: 1. d). **2.** b). **3.** 1050, 1252, 1454, 1656, 1858.

Pagina 20. **2.** 47 și 49, 600 și 602, 24 855 și 24 857, 3 001 și 3 003, 3 603 599 și 3 603 601. **3.** 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. **4.** a) <; b) >; c) =; d) <. **5.** a) A; b) F; c) A; d) A. **6.** 17 < 23 < 87 < 98 < 107 < 208. **7.** 251 > 195 > 102 > 74 > 68 > 49. **8.** a) 10 numere; b) 12 numere; c) 15 numere; d) 20 de numere. **9.** 400 și 500, 5 200 și 5 300, 62 300 și 62 400, 485 600 și 485 700. **10.** 63, 65, 67, 69, 71; 64, 66, 68, 70.
Evaluează-te: 1. a) 34 745 < 34 756; b) 1 022 < 1 202; c) 90 555 > 50 999. **2.** 76, 77, 78, ..., 98, 99. **3.** 545, 556, 567, 578, 589.

Pagina 23. **1.** a) 70; b) 70; c) 475; d) 475; e) 60; f) 60; g) 120. **2.** a) 581; b) 2 353; c) 10 040; d) 18 985; e) 142 483; f)1 328 143. **3.** a) 400; b) 8 000; c) 2 400; d) 302. **4.** a) 180; b) 400; c) 3 990; d) 24 990. **5.** a) 83; b) 204; c) 205; d) 204 < 205. **6.** 9 876 + 1 023 = 10 899. **7.** a) =; b) <; c) >; d) 12, 21, 22. **8.** a) 21 375; b) 4 585; c) 2 550; d) 2 500. **9.** 350. **10.** 9 = 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = 9 + 0; 5 soluții.
Evaluează-te: 1. a) 4 801; b) 7 779; c) 550 538. **2.** a) 4 420; b) 6 700; c) 3 886. **3.** 4, 3, 6.

Pagina 25. **1.** a) 49; b) 699; c) 13 141; d) 83 693. **3.** a) 973; b) 7 083. **4.** 708. **6.** a) 252; b) 315; c) 11 903; d) 5 449. **7.** 81, 59, 160. **8.** a) 123; b)1 378; c) 97 532; d) 40 921. **11.** 45 de lei.
Evaluează-te: 1. a) 869; b) 6 665; c) 444 952. **2.** 401. **3.** 300, 400, 534.

Pagina 30. **1.** a) 517; b) 6 592; c) 39 091; d) 59 143. **2.** a) – 3, b) – 4, c) – 5, d) – 1. **3.** a) 750; b) 10 300; c) 59 000; d) 30 000. **4.** a) 6 300; b)12 772; c) 3 468; d) 59 059; e) $47(a + b - c)$. **5.** 360 cuburi, 2 880 vârfuri, 2 160 fețe. **7.** a) 5; b) 9. **8.** 25 250. **9.** a) 135; b) 111; c) 196; d) 307. **10.** 8, 1.
Evaluează-te: 1. a) 10 750; b) 14 300; c) 185. **2.** 432. **3.** 0, 0.

Pagina 32. **1.** a) 79; b) 152; c) 986; d) 56. **2.** a) 51; b) 91; c) 875; d) 806. **3.** 75 de lei. **4.** 55. **5.** 4 254.
Evaluează-te: 1. a) 34; b) 240; c) 56. **2.** 1 656 : 23 = 72; 2 254 : 23 = 98, 3910 : 23 = 170, 598 : 23 = 26. **3.** 112, 952, 16 numere.

Pagina 34. **1.** a) 13 rest 1; b) 227 rest 11; c) 45 rest 103; d) 3 rest 415. **3.** 77. **4.** 756. **5.** 122, 247, 372, 497. **6.** 120, 43, 87. **7.** $n : 13 = r$ rest $r \Rightarrow n = 13r + r = 14r$, $r < 13$; 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168. **8.** $n : 15 = 7$ rest 14; $n : 15 = 7$ rest 0, $n = 119$, $n = 105$. **9.** 5. **10.** $a = 23$, $b = 15$.
Evaluează-te: 1. a) 2 rest 17; b) 54 rest 400; 144 rest 0. **2.** 65, 25. **3.** 447.

Recapitulare

Testul 1: **1.** 25 089; **2.** a) 3 401; b) 5 397; c) 1 334; d) 56. **3.** 5. **4.** a) <; b) <; c) <; d) >. **5.** 63 700, 63 800, 63 800. **6.** 1 275. **7.** 495. **8.** 30, 53, 86. **9.** 43, 45, 47.

Testul 2: **1.** a) 2 118; b) 2 290; c) 576; d) 52. **2.** 8. **3.** 612 cifre. **4.** 7 800, 7 900, 7 800. **5.** 3 775. **6.** 126 + 621 + 223 + 322 = 1 292. **7.** 132. **8.** 10 lei. **9.** 5, 27, 6, 32.

Pagina 37. **1.** baza = 11, exponentul = 4; b) 7, 6; c) 2022, 2; d) 3, 5; e) 53, 4; f) m, 4. **3.** a) 16; b) 1; c) 9; d) 1; e) 0; f) 99; g) 102; h) 12 957. **4.** a) – 4), b) – 5), c) – 3), d) – 6), e) – 1). **5.** $2^3 + 1^2 + 3^0 = 10$. **6.** 75. **7.** $9 = 3 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9$, $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, $10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100 \cdot 100$.
Evaluează-te: 1. a) 1; b) 1; c) 64. **2.** a) 9; b) 1; c) 5. **3.** a) $x = 4$, $y = 2$; b) $x = 2$, $y = 3$.

Pagina 39. **1.** 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196. **2.** 64, 125, 216, 343. **4.** a) 121; b) 144; c) 196. **7.** a) $2\,022 \cdot (1 + 2\,021) = 2\,022 \cdot 2\,022 = 2\,022^2$; b) $1\,005(300 + 605 + 100) = 1\,005 \cdot 1\,005 = 1\,005^2$; c) $16 + 9 = 25 = 5^2$; d) $36 + 64 = 100 = 10^2$. **9.** $n(n + 1) - n = n(n + 1 - 1) = n^2$. **11.** $10^2 < 10\,009 < 11^2 \Rightarrow 10\,009$ nu este pătrat perfect. **12.** $a = 5$, $b = 4$. **13.** 4, 5, 6. **14.** $6^2 + 8^2 = 100$. **15.** a) – 5), b) – 1), c) – 4), d) – 2), e) – 3), f) – 7).
Evaluează-te: 1. a) 4; b) 8; c) 25; d) 125. **2.** $10^2 < 119 < 11^2 \Rightarrow 119$ nu este pătrat perfect. **3.** $a = 2\,023 + 2 \cdot (2\,022 \cdot 2\,023) : 2 = 2\,023 + 2\,022 \cdot 2\,023 = 2\,023(1 + 2\,022) = 2\,023 \cdot 2\,023 = 2\,023^2$.

Pagina 42. **1.** a) 3^{11}; b) 2^{11}; c) 7^{14}; d) 11^{100}; e) 2^{5x}; f) 13^{5a+5b}; g) 5^{100}; h) 7^{5050}. **2.** a) 2^2; b) 7^2; c) 12; d) 14^2; e) 1; f) 13^{x-y}; g) 20^2; h) 37^3. **3.** a) 1; b) 2^{15}; c) 1; d) 1; e) 1; f) 3^8; g) 21; h) 2^9. **4.** a)10^3; b) 21^{16}; c) 10^{40}; d) 35^{16}. **5.** a) 2^6; b) 2^8; c) 2^{30}; d) 1. **6.** a) 217; b) 5^4; c) 3^{16}; d) 2^{22}; e) 400. **7.** 52. **8.** a) $(9^{11})^2$; b) $(15^{21})^2$; c) $(7^{16x+2y})^2$. **9.** a) $(5^7)^3$; b) $(31^{14})^3$; c) $(9^{11x+6y})^3$. **10.** a) 1 027; b) 1 004; c) 102; d) 4. **11.** a) 2^{17}; b) 3^{22}; c) $29 \cdot 5^n$; d) $11 \cdot 6^n$.
Evaluează-te: 1. a) 2^8; b) 3^1; c) 5^8; d) 2^6. **2.** a) $24 \cdot 5^4$; b) 0; c) 810. **3.** 3.

Pagina 44. **1.** a) <; b) >; c) <. **2.** a) <; b) >; c) >. **3.** a) >; b) =; c) >. **4.** $4^{30} < 64^{12} < 128^{11} < 32^{20} < 16^{30} < 8^{50}$. **5.** $3^{400} > 16^{150} > 2^{500} > 5^{200} > 4^{100} > 64^{10}$. **6.** a) $3^9(3^2 + 3 + 1) : 39 = 3^9 \cdot 13 : 39 = 3^8 \cdot 3 \cdot 13 : 39 = 3^8 = (3^4)^2 = 81^2$. **7.** a) 0, 1, 2; b) 0, 1; c) 0, 1; d) 0. **8.** $2^{155} = 2^{5 \cdot 31} = 32^{31}$; $3^{93} = 3^{3 \cdot 31} = 27^{31}$, deci $2^{155} > 3^{93}$. **9.** $a < b$. **10.** Ultima cifră este 5, deci restul împărțirii la 10 este 5. **11.** $2^{85}(2^2 + 2 + 1) = 2^{85} \cdot 7 = 2^{17 \cdot 5} \cdot 7 = 7(2^5)^{17} = 7 \cdot 32^{17}$, $5^{34}(5 + 1) = 5^{34} \cdot 6 = 6 \cdot (5^2)^{17} = 6 \cdot 25^{17}$; $7 \cdot 32^{17} > 6 \cdot 25^{17}$. **12.** 2^{32}, 2^{130}, 2^{46}. **13.** $7^{34} + 20^{36} > 49^{17} + 300^{18}$. **14.** $7^{30} < 5^{45} < 8^{60}$. **15.** a) – 5), b) – 3), c) – 2), d) – 6), e) – 1).
Evaluează-te: 1. a) 3; b) 6; c) 6. **2.** a) <; b) <; c) >. **3.** $41^{2\,025} = 41 \cdot 41^{2\,024} = (25 + 16) \cdot 41^{2\,024} = (5^2 + 4^2) \cdot (41^{1\,012})^2 = 5^2 \cdot (41^{1\,012})^2 + 4^2 \cdot (41^{1\,012})^2 = (5 \cdot 41^{1\,012})^2 + (4 \cdot 41^{1\,012})^2$; $41^{2\,025} = (41^{675})^3$.

Pagina 46. **1.** a) A; b) F; c) A; d) A. **2.** a) 560; b) 70 842; c) 202 022; d) 9 577. **3.** $1101_{(2)} = 13_{(10)}$, $11011001_{(2)} = 217_{(10)}$, $100100_{(2)} = 36_{(10)}$. **4.** $47_{(10)} = 101111_{(2)}$, $85_{(10)} = 1010101_{(2)}$, $107_{(10)} = 1101011_{(2)}$. **5.** 1. **6.** 256. **7.** 2 357. **8.** 25. **9.** 3. **10.** 114, 123, 132, 141, 213, 222, 231, 312, 321, 411.
Evaluează-te: 1. a) 110110; b) 53. **2.** 4 215. **3.** 106, 124, 142, 160, 205, 214, 241, 250, 304, 340, 403, 412, 421, 430, 502, 520, 601, 610.

Pagina 47. **1.** a) 32; b) 79; c) 283; d) 34. **2.** a) 18; b) 2; c) 2; d) 2. **3.** a) 22; b) 1 338; c) 31; d) 181.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** b) **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) nu; b) 55, 110, 143. **2.** a) 17, 18, 19; b) $6^{2n} \cdot 369$.
3. a) $x = 1$, $y = 18$; $x = 3$, $y = 4$; $x = 7$, $y = 0$; b) 2^8, 4^4, 16^2, 256^1.

Unitatea II

Pagina 51. **1.** 40 de biscuiți. **2.** 63 de lalele. **3.** 165 de lei. **4.** 80 de zile. **5.** 10 cutii. **6.** 60 ℓ. **7.** 3, 12, 20. **8.** 12, 12, 4. **9.** a) 35 de lei; b) 49 de lei; c) 147 de lei; d) 252 de lei. **10.** a) 1 750 kg; b) 8 400 kg; c) 22 de văcuțe; d) 5 săptămâni.
Evaluează-te: 1. a) A; b) F; c) A. **2.** 12 ℓ. **3.** 21 de zile.

Pagina 55. **1.** 3 lei, 8 lei. **2.** 32 kg, 24 kg. **3.** 200 de lei, 150 de lei. **4.** 120 de lei, 150 de lei. **5.** 2 kl, 3 kl. **6.** 30 de lei, 45 de lei. **7.** 46 de lei. **8.** 2 500 de lei. **9.** 3 lei, 6 lei, 9 lei. **10.** 200 de lei, 200 de lei, 300 de lei.
Evaluează-te: 1. 2 lei, 3 lei. **2.** 3 lei, 4 lei. **3.** 20 de lei, 40 de lei.

Pagina 58. **1.** 210, 290. **2.** 79, 80, 81. **3.** 12 lei, 36 de lei. **4.** 9 ani, 9 ani, 12 ani. **5.** 245, 60. **6.** 10 stâlpi și 24 de vrăbiuțe. **7.** 35 m. **8.** 400 de lei, 100 de lei, 260 de lei.
Evaluează-te: 1. 26 de meri, 19 pruni. **2.** 101, 103, 105. **3.** 10 elevi, 27 de puieți.

Pagina 61. **1.** a) 2 499; b) 57. **2.** b), 200. **3.** 100. **4.** 108. **5.** 86. **6.** 100. **7.** 1. **8.** 750 de lei. **9.** 162. **10.** 160.
Evaluează-te: 1. 1 101. **2.** 584. **3.** 3 000 de lei.

Pagina 64. **1.** 20, 8. **2.** 17. **3.** 100, 400. **4.** 300 kg, 50 kg. **5.** 140, 160. **6.** 20, 15, 5. **7.** 12, 13.
Evaluează-te: 1. 10, 15. **2.** 8, 6. **3.** 8.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** a). **4.** d). **5.** a). **6.** c).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** b) **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. 31 de elevi și 16 bănci. **2.** 538, 85, 177. **3.** 16.

Unitatea III

Pagina 69. **1.** a) divide pe; b) este divizibil cu; c) divide pe; d) nu divide pe; e) este divizibil cu; f) nu divide pe. **2.** a) A; b) F; c) F; d) A; e) A; f) F; g) F; h) F. **6.** $\mathcal{M}_6$: 0, 6,12,18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60; $\mathcal{M}_7$: 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63; $\mathcal{M}_8$: 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64; $\mathcal{M}_9$: 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63; $\mathcal{M}_{10}$: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60.
7. a) 2, 8, 12, 18, 24, 42, 50; b) 5, 15, 35, 50; c) 3, 12, 15, 18, 24, 42; d) 35, 42. **8.** 30, 36, 42. **9.** 42, 49, 56, 63, 70.
10. a) $25^{15} = (5^2)^{15} = 5^{30}$, $5^{37} = 5^{30} \cdot 5^7$; b) $49^{19} = (7^2)^{19} = 7^{38} = 7^{28} \cdot 7^{10}$; c) $9^{15} = (3^2)^{15} = 3^{30}$; $27^{13} = (3^3)^{13} = 3^{39} = 3^{30} \cdot 3^9$; d) $16^{10} = (2^4)^{10} = 2^{40}$; $8^{15} = (2^3)^{15} = 2^{45} = 2^{40} \cdot 2^5$.
Evaluează-te: 1. 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96; 432. **2.** 0, 13, 26, 39, 52. **3.** $n = 2^{20} \cdot 39$.

Pagina 71. **1.** C. **2.** 1, 3, 9; 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6, 9, 18; 1, 2, 3, 4, 6, 12. **3.** a) 60 + 120; b) 30 + 150; c) 18 + 36 + 126; d) 10 + 40 + 55 + 75. **4.** 25 : 5 = 5, 35 : 5 = 7. **5.** 25 **6.** 15. **7.** a) nu; b) 8. **8.** a) 18, 54, 90; b) 12, 24, 48, 60, 84, 96.

Pagina 73. **1.** B. **2.** 54, 108; 84, 168; 72, 144; 84, 252. **3.** 100. **4.** 105 **5.** 814 : 37 = 22, 814 : 11 = 74. **6.** 0, 28, 56. **7.** 80. **8.** $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$. **9.** $n : 69 = a$ rest 46, $n = 69a + 46 = 23(3a + 2)$. **10.** 7.
Evaluează-te: 1. 56 : 8 = 7; b) 76 : 5 = 15 rest 1. **2.** a) 64 : 12 = 5 rest 4; b) 90 : 18 = 5. **3.** $\overline{abcabc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$.

Pagina 75. **1.** a) nu; b) da; c) da; d) nu; e) da; f) nu; g) da; h) da; i) da; j) da. **2.** 30, 32, 34, 36, 38 **3.** a) 102; b) 986. **4.** 38, 56, 74, 92. **5.** a) da; b) nu; c) da; d) da; e) nu; f) da; g) da; h) da; i) nu; j) da. **6.** 310, 315. **7.** a)105; b) 985. **8.** 18. **10.** a) 430, 432, 434, 436, 438; b) 430, 435; c) 430. **11.** a) da; b) nu; c) da; d) nu; e) da. **12.** 312, 342, 372. **13.** 210, 510, 810, 315, 615, 915. **14.** a) nu; b) da; c) da; d) da; e) da. **15.** a) $1\underbrace{000...0}_{2025 \text{ de cifre}} - 1 = \underbrace{999...9}_{2025 \text{ de cifre}}$; b) 25 000 029.

Evaluează-te: 1. a) 250, 252, 254, 256, 258; b) 250, 255; c) 250. **2.** 4 320, 2 322, 9 324, 7 326, 5 328. **3.** $a = 3$, $b = 9$; $a = 4$, $b = 8$.

Pagina 77. **1.** Numerele prime mai mici decât 100 sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. **3.** $6 = 3 + 3$, $14 = 3 + 11$, $26 = 3 + 23$, $42 = 5 + 37$, $108 = 5 + 103$. **4.** $15 = 3 + 5 + 7$, $20 = 2 + 5 + 13$. **5.** $a = 2$, $b = 53$. **6.** $a = 5$, $b = 2$, $c = 31$. **7.** $2\underbrace{000...0}_{11\text{cifre}}1$. **8.** 211, 233, 277. **9.** $2 \cdot 59 = 118$. **10.** 1, 3. **11.** Ultima cifră este $1 + 5 + 6 + 0 = 2$.

Evaluează-te: 2. $a = 11$, $b = 2$, $c = 2$. **3.** $a = 3$, $b = 7$; $a = 7$, $b = 3$.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** d). **4.** c). **5.** a). **6.** b).

Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) 9, 81, 303, 327; b) 720. **2.** a) $12^n \cdot 504 = 12^n \cdot 24 \cdot 21$; b) ultima cifră este 0. **3.** a) $x = 2$, $y = 11$; b) 2 160, 2 862.

Unitatea IV

Pagina 83: **2.** a) 7%; b) 21%; c) 13%; d) 131%; e) 180%; f) 300%. **3.** a) $\frac{2}{100}$; b) $\frac{25}{100}$; c) $\frac{50}{100}$; d) $\frac{100}{100}$; e) $\frac{150}{100}$; f) $\frac{230}{100}$. **4.** a) nu există; b) 0; c) orice număr natural nenul. **5.** $\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, \frac{11}{7}, \frac{13}{5}, \frac{13}{7}, \frac{13}{11}$. **7.** p: A, q: F, r: F. **8.** $\frac{16}{13}, \frac{36}{13}, \frac{36}{23}$. **9.** 10, 11, 12, 20, 21, 30. **10.** a) $\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{3}{12}, \frac{4}{11}, \frac{5}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{8}$; b) $\frac{36}{1}, \frac{18}{2}, \frac{12}{3}, \frac{9}{4}$.

Evaluează-te: 1. a) $\frac{2^0}{65}, \frac{2^1}{65}, \frac{2^2}{65}, \frac{2^3}{65}, \frac{2^4}{65}, \frac{2^5}{65}, \frac{2^6}{65}$; b) $\frac{2^3}{1}, \frac{2^3}{2}, \frac{2^3}{3}, \frac{2^3}{4}, \frac{2^3}{6}$; c) $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$. **2.** a) A; b) A; c) A. **3.** a) 5, 6, 7, ...; b) 5; c) 0, 1, 2, 3.

Pagina 87: **1.** a) $\frac{1}{5} < \frac{4}{5} < \frac{9}{5} < \frac{12}{5} < \frac{16}{5}$; b) $\frac{7}{14} < \frac{7}{12} < \frac{7}{9} < \frac{7}{8} < \frac{7}{2}$; c) $\frac{6}{93} < \frac{10}{93} < \frac{37}{93} < \frac{58}{93} < \frac{93}{93}$. **2.** a) $\frac{9}{2} > \frac{9}{14} > \frac{9}{25} > \frac{9}{43} > \frac{9}{100}$; b) $\frac{23}{11} > \frac{13}{11} > \frac{9}{11} > \frac{8}{11} > \frac{7}{11} > \frac{2}{11}$; c) $\frac{23}{12} > \frac{23}{15} > \frac{23}{23} > \frac{23}{25} > \frac{23}{83} > \frac{23}{105}$. **3.** a) $1 > \frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{5} < \frac{7}{5}$; c) $\frac{29}{33} > \frac{23}{33}$; d) $\frac{83}{94} > \frac{15}{94}$; e) $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$; f) $\frac{54}{13} > \frac{54}{15}$; g) $\frac{100}{106} > \frac{100}{103}$; h) $\frac{13}{27} > \frac{13}{47}$. **4.** $\frac{6}{10} > \frac{4}{10}$; $\frac{2}{6} < \frac{2}{3}$. **5.** a) 6, 7, 8, ...; b) 0, 1, 2, ..., 7; c) 1, 2, 3, ..., 6; d) 7, 8, 9, ...; e) 5, 6, 7, 8; f) 4, 5, 6. **7.** $B\left(\frac{5}{8}\right), C(1), D\left(\frac{10}{8}\right), E\left(\frac{14}{8}\right), F\left(\frac{17}{8}\right), G\left(\frac{21}{8}\right)$. **8.** $\frac{2}{11}, \frac{5}{11}, \frac{8}{11}$. **10.** $\frac{1001}{99}$.

Evaluează-te: 2. a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{17}$; c) $\frac{101}{102}$. **3.** $\frac{97}{102}$.

Pagina 90: **2.** a) $\frac{7}{3}$; b) $\frac{37}{10}$; c) $\frac{80}{7}$; d) $\frac{154}{12}$; e) $\frac{1077}{10}$; f) $\frac{23453}{77}$; g) $\frac{17061}{8}$; h) $\frac{1831}{21}$. **3.** a) $6\frac{1}{3}$; b) $1\frac{1}{6}$; c) $4\frac{4}{17}$; d) $4\frac{19}{21}$; e) $4\frac{91}{103}$; f) $23\frac{13}{43}$; g) $4\frac{2}{3}$; h) $18\frac{2}{5}$. **5.** b) 2, 3; c) 13, 14; d) 8, 9. **6.** a) 4; b) 9; c) 11; d) 32.

Pagina 91: **1.** $\mathcal{D}_4$: 1, 2, 4; $\mathcal{D}_{12}$: 1, 2, 3, 4, 6, 12. **2.** a) 2; b) 9; c) 3; d) 2; e) 5; f) 27; g) 1; h) 25. **3.** 2, 3, $2 \cdot 3$. **4.** (7, 42), (14, 35), (21, 28), (28, 21), (35, 14), (42, 7). **5.** a) $(5, 9) = 1$; b) $(15, 25) = 5$; c) $(24, 25) = 1$; d) $(14, 17) = 1$.

Pagina 92: **1.** $\frac{2}{4},\frac{6}{10},\frac{20}{26},\frac{204}{202},\frac{162}{166},\frac{4x}{4y},\frac{2(x+3)}{2(y+2)},\frac{2(a+b+1)}{2(x+y-3)}$. **2.** a) 3; b) 4; c) 5. **3.** a) 2; b) 6; c) 25; d) 96; e) 258; f) 321.

Pagina 93: **1.** $\frac{2}{3},\frac{3}{9},\frac{a}{2b},\frac{11}{15},\frac{25}{20},\frac{2x+2y}{3a+3b},\frac{3^2}{2}$. **2.** a) 4; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{32}$; e) $\frac{1}{256}$; f) $\frac{1}{2}$. **4.** a) 1, 2, 3, 6; b) 1, 2, 3, 6, 9, 18; c) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40; d) 1, 2, 3, 6; e) 1; f) 1, 2, 4; g) 1, 3, 9, 27, 81. **5.** a) $\frac{10}{5},\frac{2}{1},\frac{4}{2}$; b) $\frac{24}{18},\frac{16}{12},\frac{12}{9},\frac{8}{6},\frac{4}{3}$; c) $\frac{2}{11}$; d) $\frac{75}{18},\frac{50}{12},\frac{25}{6}$; e) $\frac{12}{8},\frac{6}{4},\frac{3}{2}$; f) $\frac{28}{21},\frac{4}{3}$; g) $\frac{36}{60},\frac{24}{40},\frac{18}{30},\frac{12}{20},\frac{9}{15},\frac{6}{10},\frac{3}{5}$; h) $\frac{42}{105},\frac{28}{70},\frac{14}{35},\frac{4}{10},\frac{2}{5}$.

Pagina 95: **1.** B. **2.** a) $\frac{35}{56}$; b) $\frac{112}{77}$; c) $\frac{119}{63}$; d) $\frac{28}{91}$; e) $\frac{700}{875}$; f) $\frac{2149}{4711}$; g) $\frac{8484}{5068}$. **3.** a) $\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{2}{9},\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{10}{13}$; b) $\frac{3}{4},\frac{7}{12},\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{3}$. **4.** a) $\frac{476}{971}$; b) $\frac{\overline{ab}}{16}$; c) $\frac{37}{2}$. **5.** a) 4; b) 9; c) 5. **6.** a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{4}{5}$. **7.** a) $\frac{11}{22},\frac{22}{44},\frac{33}{66},\frac{44}{88}$; b) $\frac{222}{333},\frac{444}{666},\frac{666}{999}$. **8.** $\frac{117}{21},\frac{117}{51},\frac{117}{81},\frac{147}{24},\frac{147}{54},\frac{147}{84},\frac{177}{27},\frac{177}{57},\frac{177}{87}$. **9.** a) $\frac{20}{72},\frac{22}{72},\frac{24}{72},\frac{26}{72},\frac{28}{72}$; b) $\frac{21}{72},\frac{24}{72},\frac{27}{72}$; c) $\frac{27}{72}$; d) $\frac{24}{72}$. **10.** a) 2, 3, 4, 5, 6; b) 3, 4, 5; c) 8; d) 2, 6, 8, 12, 14, 18, 24; e) 2, 4, 8.

Evaluează-te: 1. ${}^{20)}\frac{3}{5}=\frac{60}{100}$, ${}^{5)}\frac{13}{20}=\frac{65}{100}$, ${}^{4)}\frac{7}{25}=\frac{28}{100}$. **2.** $\frac{64^{(8}}{24}=\frac{8}{3}$, $\frac{125^{(25}}{75}=\frac{5}{3}$. **3.** $\frac{19^n}{4^{n-1}}$.

Pagina 97: **1.** 0, 6, 12, 18, 24, 30. **2.** 12, 18, 24. **3.** a) 12; b) 8; c) 30; d) 12; e) 16; f) 63; g) 12; h) 900; i) 200; j) 60; k) 240; l) 90. **5.** 72.

Pagina 99: **1.** a) $\frac{3}{6},\frac{4}{6}$; b) $\frac{8}{12},\frac{9}{12}$; c) $\frac{3}{12},\frac{10}{12}$; d) $\frac{5}{30},\frac{20}{30},\frac{21}{30}$; e) $\frac{6}{12},\frac{8}{12},\frac{9}{12}$; f) $\frac{15}{30},\frac{20}{30},\frac{24}{30}$; g) $\frac{10}{15},\frac{9}{15}$; h) $\frac{5}{10},\frac{4}{10},\frac{3}{10}$; i) $\frac{12}{24},\frac{16}{24},\frac{3}{24}$; j) $\frac{8}{140},\frac{2}{140},\frac{3}{140}$. **2.** a) 10; b) 36; c) 24; d) 35; e) 63. **3.** a) $\frac{3}{4},\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4},\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$; d) $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5}$. **4.** $a = 0, 1$; $b = 5, 6, 7, ..., 14$. **5.** $\frac{17}{60}<\frac{13}{30}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{7}{10}<\frac{3}{4}<\frac{13}{15}<\frac{13}{12}<\frac{7}{6}<\frac{4}{3}$. **6.** $\frac{13}{2}>\frac{17}{4}>\frac{11}{6}>\frac{9}{8}>\frac{5}{12}>\frac{1}{3}>\frac{7}{24}$. **7.** $\frac{120}{9}<\frac{750}{9}<\frac{1250}{9}$; pe locul doi ajunge girafa. **8.** $\frac{35}{42}>\frac{24}{42}$; Alina a cheltuit mai mult.

Evaluează-te: 1. [10, 6, 15] = 30. **2.** a) $\frac{3}{7}>\frac{2}{5}$; b) $\frac{10}{17}<\frac{3}{5}$; c) $\frac{7}{24}<\frac{11}{36}$. **3.** 1, 4.

Recapitulare

Testul 1: **2.** a) 7, 8, 9, …; b) 11; c) 1, 2. **3.** $2\cdot 27=9\cdot 6 \Leftrightarrow 54=54$ (A).

4. a) $\frac{7}{11}<\frac{7}{9}$; b) $\frac{5}{6}<\frac{17}{6}$; c) $\frac{8}{11}<\frac{13}{9}$. **5.** $\frac{1407}{123}$. **6.** $25\frac{7}{17}$. **7.** $\frac{5}{9}$. **8.** 36. **9.** 2, 5, 6, 8, 9.

Testul 2: **2.** a) 0, 1, 2, …, 8; b) 7; c) 1, 2. **3.** $\frac{8}{14}, \frac{12}{21}, \frac{16}{28}$. **4.** a) $\frac{6}{9} > \frac{4}{9}$; b) $\frac{5}{12} < \frac{5}{9}$; c) $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$. **5.** a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{148}{11}$; c) $\frac{342}{121}$. **6.** 2. **7.** 12. **8.** 4. **9.** 2, 3, 4, 6, 7, 9.

Pagina 104: **1.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{15}{17}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{22}{7}$; f) $\frac{3}{5}$; g) $\frac{54}{7}$; h) $\frac{63}{2}$; i) $\frac{41}{50}$; j) $\frac{1}{2}$. **2.** D. **3.** a) $\frac{43}{48}$; b) $\frac{17}{144}$; c) $\frac{65}{143}$. **4.** a) $\frac{19}{6}$; b) $\frac{7}{72}$; c) $\frac{11}{20}$; d) $\frac{37}{48}$; e) $\frac{7}{18}$; f) 0; g) $\frac{9}{10}$; h) $\frac{109}{8}$. **5.** a) 13; b) 52; c) $\frac{299}{2}$; d) $\frac{63}{64}$; e) $\frac{7}{5}$; f) $\frac{2021}{2}$.

Evaluează-te: **1.** a) $\frac{17}{4}$; b) 6. **2.** d). **3.** $a = 1, b = 1$.

Pagina 107: **2.** a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{27}{16}$; e) 3; f) $\frac{1}{5}$; g) $\frac{1}{18}$; h) $\frac{72}{35}$.

3. $x = 2, y = 4, z = 4$. **4.** 30. **5.** 1011. **6.** $a \cdot b = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = \frac{9}{9} = 1$. **7.** a) 1; b) $\frac{1}{70}$; c) $\frac{3}{19}$; d) $\frac{140}{11}$. **8.** c).

Evaluează-te: **1.** a) $\frac{32}{3}$; b) $\frac{52}{49}$. **2.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{9}{20}$; c) $\frac{5}{24}$. **3.** 1.

Pagina 110: **1.** a) $\frac{9}{2}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{7}{25}$; d) $\frac{11}{135}$. **2.** a) $\frac{3}{4}$; b) 25; c) $\frac{49}{81}$; d) $\frac{4}{15}$. **3.** $\frac{10}{3}$; $\frac{3}{10}$. **5.** a) $\frac{1}{3}$; b) 49; c) $\frac{7}{9}$; d) 3; e) $\frac{7}{2}$; f) $\frac{42}{45}$. **6.** 16.

Evaluează-te: **1.** a) $\frac{17}{5}$; b) $\frac{16}{121}$; c) $\frac{27}{4}$. **2.** a) $\frac{7}{18}$; b) $\frac{5}{18}$; c) $\frac{1}{5}$. **3.** $\frac{11}{3}, \frac{121}{21}$.

Pagina 113: **1.** a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{32}{243}$; c) $\frac{729}{64}$; d) $\frac{49}{121}$; e) 1; f) $\frac{23}{45}$; g) 1. **2.** a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$; b) $\left(\frac{15}{17}\right)^{15}$; c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{5}$; d) $\left(\frac{19}{8}\right)^{21}$; e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{12}$; f) $\left(\frac{8}{3}\right)^{44}$; g) 1; h) 1. **3.** a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{7}$; b) 1; c) 1; d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$. **4.** a) $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$; c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{4}$.

5. b) $343^5, 128^5$; c) $\left(\frac{8}{343}\right)^{7}, \left(\frac{81}{625}\right)^{7}$. **6.** a) 4; b) 4; c) 1. **7.** $\frac{2^{51}}{3^{34}} = \frac{(2^3)^{17}}{(3^2)^{17}} = \frac{8^{17}}{9^{17}}$, $8^{17} < 9^{17}$.

Evaluează-te: **1.** a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{21}$; b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{12}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{28}$. **2.** a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{5}$; b) $\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$; c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5}$. **3.** $\frac{8^{10}}{32^6} = \frac{(2^3)^{10}}{(2^5)^6} = \frac{2^{30}}{2^{30}} = 1$.

Pagina 116: **1.** a) 50; b) 156; c) 72; d) 35; e) 624; f) 169; g) 297; h) 1 140. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\frac{5}{7}$; f) $\frac{37}{10}$; g) 15; h) $\frac{11}{3}$. **3.** a) $\frac{15}{2}$; b) 6; c) 450; d) 300; e) 1 175; f) 135; g) 12; h) 28. **5.** 16. **6.** 198 de lei.

Evaluează-te: **1.** a) 150; b) $\frac{1}{4}$; c) 36. **2.** 9 băieți. **3.** 60 km.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I: 1. b). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** a). **6.** a).

Subiectul al II-lea: 1. c). **2.** a). **3.** b). **4.** c). **5.** c). **6.** c).

Subiectul al III-lea: 1. a) 192; b) U(2^{2005}) = 2 $\Rightarrow$ U(2^{2005} + 3) = 5. **2.** a) 80%; b) 192. **3.** a) $a = \left(\frac{5}{4}\right)^4 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 - \frac{2}{3} =$ $= {}^{3)}\frac{5}{4} - {}^{4)}\frac{2}{3} = \frac{15-8}{12} = \frac{7}{12}$, $b = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{9}\right) = \frac{5}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{32}^{16}}{9} = \frac{80}{9}$; b) $\left(\frac{7}{{}_3\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{80}^{20}}{9}\right) : \frac{140}{27} = \frac{140}{27} \cdot \frac{27}{140} = 1.$

Unitatea V

Pagina 122: **1.** a) $\frac{4}{10} = 0{,}4$; b) $\frac{8}{100} = 0{,}08$; c) $\frac{29}{1000} = 0{,}029$; d) $7\frac{9}{100} = 7{,}09$; e) $\frac{809}{10} = 80{,}9$; f) $2\frac{14}{1000}$ = 2,014. **2.** Partea întreagă: 13, 105, 43, 14, 25, 561. Partea zecimală: 0,2; 0,6; 0,56; 0,347; 0,08; 0,9. **3.** a) 0,5; 3,2; 56,7; b) 0,04; 0,65; 8,76; c) 0,031; 0,123; 6,879. **4.** a) 6; 3,2; 2; 0,12; b) 0,056; 0,25; 0,128; 0,117; c) 0,15; 2,8875; 14,88; 1,275. **5.** a) 2; b) 1 423; c) 7; d) 14 237. **6.** a) $\frac{37}{10}$; b) $\frac{3457}{100}$; c) $\frac{106243}{200}$; d) $\frac{3}{25}$; e) $\frac{517}{500}$. **7.** a) 9 + $\frac{8}{10}$; b) 80 + 1 + $\frac{2}{10} + \frac{3}{100}$; c) 300 + 20 + 5 + $\frac{1}{10} + \frac{3}{1000}$; d) 5 000 + + 100 + 40 + 2 + $\frac{2}{100}$ + $\frac{3}{1000}$ + $\frac{4}{10000}$. **8.** a) 240,37; b) 5031,074. **9.** a) 846; b) 100; c) 4. **10.** a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$; b) $a = 7$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 5$.

Evaluează-te: 1. a) 0,34; b) 0,006; c) 1,235. **2.** a) $\frac{63}{125}$; b) $\frac{4509}{100}$; c) $\frac{3}{500}$. **3.** 34 și 0,563.

Pagina 125: **1.** a) <; b) <; c) >; d) <; e) <; f) <. **2.** a) Corina; b) Dragoș. **3.** 0,404; 0,44; 3,62; 8,45; 9,7; 36,23. **4.** 9,07; 8,425; 3,612; 3,23; 0,48; 0,04. **5.** A(3,42), B(3,45), C(3,46), D(3,49), E(3,51), F(3,53), G(3,57), H(3,61). **6.** a) 2 < 2,03 < 3; b) 3 < 3,12 < 4; c) 0 < 0,123 < 1; d) 7 < 7,0012 < 8. **7.** a) 5,123; 5,13; 5,139; b) 0,234; 0,24; 0,35; c) 6,346; 6,347; 6,348; d)1,003; 1,01; 1,1. **8.** zecimi: 9,9; 23; 109,2; 0,5; sutimi: 9,98; 23,03; 109,21; 0,56. **9.** zecimi: 10; 3,1; 19,3; 0,1; sutimi: 9,92; 3,04; 19,22; 0,07. **10.** zecimi: 34,6; 531,2; 0,1; 1; sutimi: 34,57; 531,22; 0,12; 1,03. **11.** 20 numere.

Evaluează-te: 1. a) >; b) =; c) <. **3.** 4,6; 4,56; 4,564.

Pagina 127: **1.** a) 8,8; b) 2,69; c) 81,83; d) 42,13; e) 78,566; f) 21,77. **2.** a) 5,3; b) 13,9; c) 14,03; d) 46,327; e) 67,72; f) 93,735. **3.** 41,63. **4.** 69,53. **6.** 29,17. **7.** a) 555,555; 111,111; b) 1,112; 1,1. **8.** a) 11,1; b) 30. **9.** $a = 9$, $b = 4$; $a = 8$, $b = 3$; $a = 7$, $b = 2$; $a = 6$, $b = 1$. **10.** 1,5.

Evaluează-te: 1. a) 46,033; b) 2,31; c) 102,24. **2.** 58,42. **3.** 239.

Pagina 129: **1.** a) 47; b) 9543,2; c) 2320; d) 4; e) 20,4; f) 123; g) 25,5; h)182,1; i) 10,24; j) 9,24; k) 1,64; l) 424,26; m) 1,196; n) 60,575; o) 0,1573; p) 2,556; q) 0,1; r) 7,248483. **2.** a) 20; b) 253; c) 234; d) 3020; e) 28; f) 520; g) 7,14. **3.** a) 8 kg; b) 1,5 l. **4.** a) 22,5; b) 33; c) 46,45. **5.** a) 3,56 · 10; b) 2,8102 · 100; c) 21,514503 · 1000; d) 0,00231 · 100. **6.** a) 59,4; b) 29,15. **8.** a) 31,3; b) 23,4; c) 141; d) 98,4. **9.** a) 10; b) 14,3; c) 21,4; d) 20. **10.** 150,1. **12.** 3,7.

Evaluează-te: 1. a) 2230; b) 4,485; c) 4,3223. **2.** a) 1,8; b) 6,327. **3.** 8,25 kg.

Pagina 133: **1.** a) 10,2; b) 9,24 ; c) 11,8(3); d) 35,(6); e) 5,048; f) 1414,1(3). **2.** a) 5,2; 0,55; 0,72; 0,192; 0,72; 0,125. b) 1(3); 6,(1); 2,2(6); 3,(7); 2,(6); 0,(962); c) 3,8(3); 2,0(5); 3,41(6); 2,402(7); 55,63(8); 13,541(6). **3.** a) 31; b) 44; c) 6; d) 9,8; e) 2,89; f) 5,4(6). **4.** 2,17. **6.** a) 10; b) 5; c) 2. **7.** a) 3; b) 305.
Evaluează-te: 1. a) 68,5; b) 9,72; c) 6,(3); **2.** a) 16,(6); b) 3,291(6); c) 12,25. **3.** 2,(3).

Pagina 136: **1.** a) 2,6; 0,36; 2,356; 23,42; 0,032; 345,643; b) 0,26; 0,036; 0,2356; 2,342; 0,0032; 34,5643; c) 0,026; 0,0036; 0,02356; 0,2342; 0,00032; 3,45643. **2.** a) 1,02; b) 3,5(6); c) 1,825; d) 0,924; e) 2,5625; f) 10,605; g) 38,(3); h) 34,(6); i) 1183,(3); j) 22,05; k) 25,05; l) 140,14. **3.** a) $\frac{11}{3}, \frac{286}{9}, \frac{428}{99}, \frac{2300}{99}, \frac{23100}{999}$; b) $\frac{292}{90}, \frac{3821}{900}, \frac{1221087}{9900}, \frac{32098992}{99900}$. **4.** 0,77, 10,03, 1,25. **6.** 5,4321; 5,432(1); 5,43(21); 5,4(321); 5,(4321). **7.** a) 260, 604, 5 423, 56; b) 7 000, 300, 6 540, 28 280. **8.** a) 5,5(4); b) 2,(14). **9.** a) 4; b) 3; c) 3.
Evaluează-te: 1. a) 1,37; b) 4,86; c) 57. **2.** a) $\frac{233}{9}$; b) $\frac{511}{90}$; c) $\frac{5378}{9900}$. **3.** 2,3 lei; 6,9 lei.

Pagina 138: **1.** a) 3,9; b) 0,73 ; c) 106,63; d) 35,23; e) 64,672; f) 34,01. **2.** a) 106; b) 1 390; c) 1,403; d) 4 630; e) 19,07; f) 77,4934. **3.** a) 1,96; b) 0,95; c) 0,541(6); d) 2,3(8). **4.** 35 131 de lei. **5.** 387 lei. **6.** 6,3. **7.** $\frac{123}{99} = \frac{41}{33} = \frac{82}{66} = \frac{820}{660}$. **8.** 360,515. **9.** a) 1,22; b) 1,41; c) 1,75.
Evaluează-te: 1. a) $\frac{24}{10} = \frac{12}{5} = \frac{240}{100}$; b) $\frac{282}{90} = \frac{141}{45} = \frac{2820}{900}$; c) $\frac{21}{9} = \frac{7}{3} = \frac{70}{30}$. **2.** a) 264,1; b) 0,77; c) 5,37. **3.** 2,92.

Pagina 143: **1.** 4 822 litri. **2.** 115,5 lei. **3.** 81,4 lei; 72,95 de lei. **4.** 24 de minute, 6 minute. **5.** 625,62 de lei; 274,34 de lei; 208,54 de lei. **6.** 21,25; 64,7; 54,55. **7.** 216 elevi. **8.** 0,8. **9.** 4 kg de banane, 8 kg de portocale. **10.** 15 ferestre și 7 uși.
Evaluează-te: 1. 26,4 minute. **2.** 6, 15. **3.** 80,45; 104,22; 16,09.

Pagina 146: **1.** a) fotbal; b) 9 din 30; c) 26,(6)%. **2.** a) a VI-a; a VIII-a; b) 24,5%. **3.** a) 7,8; b) 9. **4.** b) 18 kg; c) 46,6 lei; d) 2,5(8). **5.** a) ora 7; ora 14; b) 4,14°C.
Evaluează-te: 1. 9. **2.** 30; 18. **3.** 7,8.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I: 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** a). **6.** d).
Subiectul al II-lea: 1. c). **2.** b). **3.** d). **4.** a). **5.** d). **6.** c).
Subiectul al III-lea: 1. a) 18,2; b) 6,7. **2.** 5. **3** 28,2 lei; 9,4 lei.

Unitatea VI

Pagina 155: **3.** puncte identice: $N = Q$; puncte distincte: $M \neq P$, $N \neq M$, $N \neq P$, $Q \neq M$, $Q \neq P$. **4.** A, F, A, A, F, A. **5.** 1. – c); 2. – e); 3. – a); 4. – b); 5. – d). **6.** *DE*, *DF*, *DG*, *EF*, *EG*, *FG*. **7.** a) 10 segmente: *AB*, *AC*, *BC*, *EF*, *AE*, *AF*, *BE*, *BF*, *CE*, *CF*; b) 8 drepte: d_1, d_2, *AE*, *AF*, *BE*, *BF*, *CE*, *CF*. **8.** *QF* opus *QM*, $QM = QE$, $QP \neq QE$. **9.** a) *MN*, *NP*, *MP*; b) *MN*, *NM*, *NP*, *PN*, *MP*, *PM*; c) *MN*, *NP*, *PM*. **10.** 6 segmente.
Evaluează-te: 2. F, F, A, A. **3.** 6 segmente: *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA*.

Pagina 159: **1.** Punctele *D* și *F* sunt situate pe dreapta *a*; punctul *E* se află în exteriorul dreptei *a*. **5.** A, A, A, A, F, A. **6.** a) puncte coliniare; b) o singură; c) punct interior. **7.** 15. **8.** 1 225. **9.** minim o dreaptă, maxim 21 de drepte. **10.** o dreaptă sau 3 drepte.

Pagina 161: **1.** a) paralele; b) concurente; c) coplanare. **3.** F, A, A. **5.** o singură dreaptă. **6.** F, A, F, F, F. **7.** concurente, paralele. **8.** paralele.
Evaluează-te: 1. A, A, A, A, F, A. **2.** a) 10; b) o dreaptă, punctele sunt coliniare; 4 950 de drepte, punctele sunt diferite, oricare trei necoliniare. **3.** gimnastică, arhitectură, croitorie, producție de mobilier etc.

Pagina 165: **3.** A, F, A, A. **4.** 3,8 cm. **5.** 7,8 cm. **6.** $EF = FG$. **7.** Irina. **8.** 11 cm sau 3 cm. **9.** a). **10.** $AC = AB + BC$. **11.** a) A, E, D, B; b) 4 cm.

Pagina 169: **1.** F, F, A, A. **2.** A cu C, B cu D, A cu E. **3.** 7 cm; 9,5 cm. **4.** 17 cm. **5.** a) 9 cm; b) sunt congruente. **7.** 5 cm; 4,5 cm. **8.** b) 5 cm; 12,5 cm. **9.** a) 6 m; b) 9 m. **10.** b) 5,4 cm; 10,8 cm; 21, 6 cm.
Evaluează-te: 1. A, A, A, A, A. **2.** a) 4 cm, 2 cm, 4 cm; b) $BP = PN = 2$ cm. **3.** a) 42 cm, 54 cm, 30 cm; b) $DB = 36$ cm, $BC = 18$ cm.

Pagina 174: **4.** $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$. **5.** 120°, 90°, 150°.

Pagina 176: **1.** b). **2.** F, A, A, A, A, F. **3.** 60°, 150°. **4.** a) 105°; b) $n < 15°$; c) 15°; d) $15° < n < 105°$. **5.** 40°, 120°. **6.** 20°, 65°. **7.** $\sphericalangle AEB = 180° - (32° + 58°) = 90°$. **8.** $\sphericalangle SNT = \sphericalangle SNQ = 65°$. **9.** 45°.

Pagina 178: **1.** a) 300′; b) 720′; c) 205′; d) 990′; e) 2 095′. **2.** a) 3°20′; b) 21°40′; c) 68°40′; d) 62°50′; e) 91°25′. **3.** a) 155°; b) 59°; c) 75°; d) 36°; e) 38°51′; f) 75°45′; g) 18°48′; h) 63°50′; i) 72°45′; j) 170°33′; k) 28°33′; l) 25°33′.
Evaluează-te: 1. a) au aceeași măsură; b) unghiuri proprii; c) semidrepte opuse. **2.** a) 130°, 35°; b) unghiuri ascuțite: $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle MNQ$; unghi drept: $\sphericalangle QNP$; unghiuri obtuze: $\sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle MNP$. **3.** b) 27°30′; c) $\sphericalangle EBC = \sphericalangle EBF = 152°30'$.

Pagina 181: **1.** a) congruente; b) patru; c) corespund; două. **2.** F, A, F, A. **3.** o infinitate. **4.** 0, 3, 8. **5.** A, B, C, D, O, Y, U. **6.** 40°. **9.** AB este axă de simetrie a segmentului PQ, deoarece, dacă îndoim segmentul PQ de-a lungul segmentului AB, cele două segmente rezultate, prin suprapunere, coincid. **10.** Punctele C, O, D sunt coliniare, deci $\sphericalangle COD = 180° \Rightarrow \sphericalangle BOD = 180° - 30° = 150°$, $\sphericalangle AOB = 180°$, deci $\sphericalangle AOD = 180° - 150° = 30°$, deci $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD$.
Evaluează-te: 1. A, F, A, A. 2. i) b); ii) c); iv) d). **3.** b) 60°; c) $\sphericalangle EOD = 60° = \sphericalangle COD$, deci OD este axă de simetrie pentru unghiul EOC.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I: 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** d). **6.** d).
Subiectul al II-lea: 1. d). **2.** a). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al III-lea: 1. a) $MP = 3$ cm; b) $AM = PB = 3$ cm. **2.** a) $\sphericalangle POB = 22°30'$, $\sphericalangle AOM = 67°30'$; b) $\sphericalangle QOM = 180° - \sphericalangle MOP = 180° - 90° = 90°$. **3.** a) $AB = 2$ cm, $BC = 8$ cm; b) $\sphericalangle XBY = 85°$, $\sphericalangle ABX = 137°30'$.

Unitatea VII

Pagina 191: **1.** B. **2.** D. **3.** 10,42 m. **4.** 303,75 m. **5.** a) ruleta; b) 42 m. **6.** a) 4,77 km; b) 284; c) 313,218 cm; d) 2227,2 mm. **7.** 24 cm. **8.** $l = 6$ dm, $L = 8$ dm. **9.** 11 160 m. **10.** 30.
Evaluează-te: 1. a) 14,912 km; b) 1274,3 m; c) 3010,8 mm; d) 1 770 560 cm. **2.** $\mathcal{P}_{\text{triunghi}} = 56$ cm, $\mathcal{P}_{\text{pătrat}} = 64$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{\text{pătrat}} > \mathcal{P}_{\text{triunghi}}$. **3.** $\mathcal{P} = 340$ m.

Pagina 197: **1.** a) C; b) B. **2.** a). **3.** 245 m^2. **4.** 60. **5.** a) 118 m^2; b) 388 m.
Evaluează-te: 1. a) C; b) A. **2.** b) 32 cm; c) 16 cm^2. **3.** a) 17,625 m^2; b) 2; c) 52,784 de lei.

Pagina 202: **1.** 512 m^3. **2.** 6 600 cm^3. **3.** 3,75 m^3. **4.** 2 m. **5.** $\mathcal{V}_{cub} = 1\ 728\ cm^3$, $\mathcal{V}_{paralelipiped} = 1\ 760\ cm^3 \Rightarrow \mathcal{V}_{cub} <$ $< \mathcal{V}_{paralelipiped}$. **6.** $\mathcal{V}_{bax} = 30\ 000\ cm^3$, $\mathcal{V}_{cutie} = 100\ cm^3 \Rightarrow 30\ 000 : 100 = 300$ de cutii, deci $250 < 300 \Rightarrow 250$ de cutii încap în bax. **7.** $\mathcal{V}_{paravan} = 5\ 000\ 000\ cm^3$, $\mathcal{V}_{cub} = 15\ 625\ cm^3 \Rightarrow 320$ de cuburi. **8.** a) 4 dm; b) 40,36 cm.

Evaluează-te: 1. a) 435 500 mm^3; b) 7 061 000 dm^3. **2.** a) F; b) F; c) A. **3.** a) 14 000 ℓ; b) 50 de zile; c) 3,36 m.

Recapitulare și evaluare

Subiectul I: 1. b). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** b).

Subiectul al II-lea: 1. c). **2.** a). **3.** c). **4.** d). **5.** a). **6.** b).

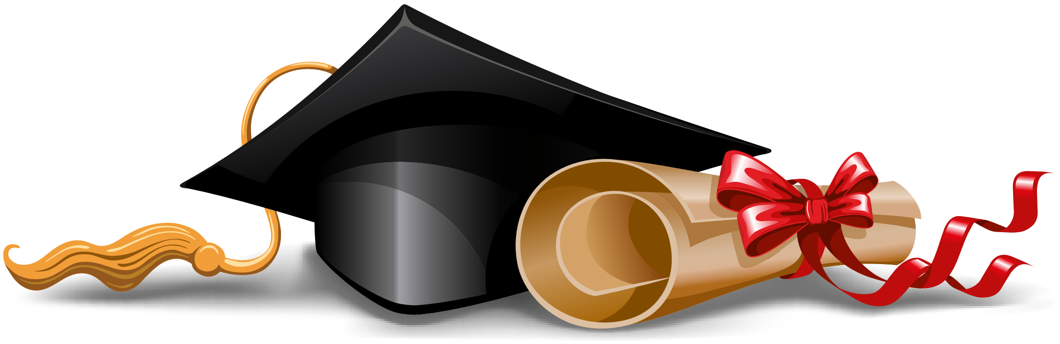
Subiectul al III-lea: 1. a) $\mathcal{P} = 70$ m, $\mathcal{A} = 264\ m^2$; b) 21,12 m^3. **2.** a) 100 ℓ; b) $\mathcal{A}_{suport} = 4\ 900\ cm^2$, $\mathcal{P}_{suport} = 280$ cm. **3.** a) 26,04 litri; b) 1,5 ari.

Recapitulare și evaluare finală

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** d). **5.** d). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** d). **4.** b). **5.** c) **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) 49,85; b) 3^{67}. **2.** $\frac{37}{5}; \frac{13}{4}; \frac{3}{250}; \frac{5}{9}; \frac{26}{11}; \frac{25}{6}; \frac{529}{3300};$ b) 1. **3.** a) 3,25 de lei; b) 4,5.



MINISTERUL EDUCAȚIEI

MATEMATICĂ

manual pentru
CLASA A V-A

ISBN 978-973-47-3668-3
edituraparalela45.ro
EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL