Gabriel POPA
Dorel LUCHIAN
Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

ediția a III-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene, Ionuţ Burcioiu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a : mate 2000 - standard / Gabriel Popa, Dorel Luchian, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea. - Ed. a 3-a. - Piteşti : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3667-6

I. Popa, Gabriel
II. Luchian, Dorel
III. Zanoschi, Adrian
IV. Iurea, Gheorghe

51

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasele V-VIII, a apărut din necesitatea sistematizării şi a interpretării creative şi aplicative a noţiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii şcolare cu setul de competenţe impus de programă şi cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmăreşte trecerea de la formarea noţiunilor şi a deprinderilor elementare de operare cu acestea la dezvoltarea raţionamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele şi noţiunile abstracte fireşti domeniului astfel încât elevul să vadă şi să exerseze aplicaţiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situaţia de a adapta aparatul teoretic la necesităţile şi la provocările vieţii de zi cu zi. Învăţarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută şi necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele iniţiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naţionale. Capitolele sunt împărţite în lecţii care pot fi parcurse în 1-3 ore şi se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecţiile încep cu o expunere detaliată şi temeinică a părţii teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării faţă de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecţiei, însoţite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât şi din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanţat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Naţională, iar cele care depăşesc acest nivel – puţine la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluţii. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Naţională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învăţării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noştri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

TESTE INIŢIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $3(\sqrt{2}-1)-\sqrt{18}$ este:

A. –1 B. –3 C. $6\sqrt{2}$ D. $-6\sqrt{2}$

(0,5p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\frac{x}{2}+\frac{1-x}{3}=1\frac{5}{6}$ este:

A. $\frac{9}{5}$ B. 11 C. 9 D. 0

(0,5p) **3.** Valoarea lui m pentru care perechea (–2, 1) este soluţie a sistemului $\begin{cases}2x+3y=-1\\ mx-y=3\end{cases}$ este:

A. 3 B. 4 C. 1 D. –2

(0,5p) **4.** Lungimea segmentului având capetele $A(1, 2)$ şi $B(2, -1)$ este:

A. 4 B. 5 C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$

(0,5p) **5.** Un romb $ABCD$ are $\sphericalangle BAD = 30°$. Măsura unghiului ABC este egală cu:

A. 90° B. 120° C. 150° D. 60°

(0,5p) **6.** Un pătrat are aria egală cu 8 cm^2. Lungimea diagonalei sale este:

A. 8 cm B. 4 cm C. $2\sqrt{2}$ cm D. $4\sqrt{2}$ cm

(0,5p) **7.** Lungimea cercului având raza egală cu π cm este:

A. $2\pi^2$ cm B. 2π cm C. π^2 cm D. 4π cm

(0,5p) **8.** Aria hexagonului regulat având apotema egală cu $6\sqrt{3}$ cm este:

A. 108 cm^2 B. $72\sqrt{3}$ cm^2 C. 54 cm^2 D. $216\sqrt{3}$ cm^2

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Fie numerele $a=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{7\frac{1}{9}}$ şi $b=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{5^2-4^2}$. Aflaţi media geometrică a celor două numere.

(1p) **2.** Preţul unui produs este 120 lei. După o scumpire, preţul devine 126 lei. Aflaţi cu ce procent s-a scumpit produsul.

(1p) **3.** Un trapez isoscel are lungimea bazei mari egală cu 12 cm şi lungimea liniei mijlocii egală cu 10 cm. Aflaţi lungimea segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor.

4. În figura 1, triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, E este mijlocul laturii AB, iar AD este perpendicular pe BC ($D \in BC$). Se ştie că $AD = 6\sqrt{2}$ cm şi $\frac{CD}{BD} = 0{,}5$.

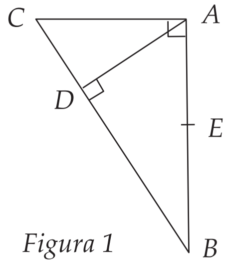


Figura 1

(1p) a) Aflaţi aria triunghiului ABC.

(1p) b) Aflaţi perimetrul triunghiului CDE.

TESTUL 2

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(2\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2}) \cdot 2^{-1}$ este:

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 0

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr întreg, mai mare decât $4\sqrt{3}$, este:

A. 7 B. 6 C. 49 D. 8

(0,5p) **3.** Suma soluţiilor ecuaţiei $|2x - 1| = 5$ este:

A. 5 B. 3 C. 1 D. –2

(0,5p) **4.** În tabelul de mai jos este reprezentată o dependenţă funcţională.

x	0	1	a
$y = 2x - 1$	–1	1	5

Valoarea lui a este:

A. 9 B. –2 C. 3 D. 4

(0,5p) **5.** Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $\sqrt{18}$ cm este:

A. 3 cm B. 6 cm C. 9 cm D. 4 cm

(0,5p) **6.** Aria rombului $ABCD$ în care $AB = 10$ cm şi $AC = 12$ cm este:

A. 192 cm^2 B. 120 cm^2 C. 60 cm^2 D. 96 cm^2

(0,5p) **7.** Fie un triunghi ABC şi punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, astfel încât $PQ \parallel BC$. Dacă $AB = 16$ cm, $AP = 12$ cm, $QC = 3$ cm, atunci lungimea laturii AC este:

A. 9 cm B. 12 cm C. 6 cm D. 8 cm

(0,5p) **8.** Rezultatul calculului 8 cos 60° sin 30° – tg 45° este:

A. 2 B. –1 C. 1 D. 0

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Numerele naturale x, y, z verifică relaţiile $\sqrt{x+1} = 2$ şi $\sqrt{y(z+4)} = 3$. Aflaţi media aritmetică a celor trei numere.

(1p) **2.** Şapte caiete de matematică şi cinci caiete dictando costă 41 lei. Aflaţi preţul fiecărui tip de caiet, ştiind că cel dictando costă cu un leu mai mult decât cel de matematică.

(1p) **3.** Fie xOy un sistem de axe ortogonale şi punctele $A(1, 1)$, $B(1, -2)$, $C(-2, 1)$. Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

4. În figura 2, triunghiul ABC este isoscel, cu $AB = AC = 3\sqrt{41}$ cm, $BC = 24$ cm, iar M este mijlocul laturii AC.

(1p) a) Arătaţi că aria triunghiului ABC este 180 cm^2.

(1p) b) Aflaţi lungimea medianei BM a triunghiului.

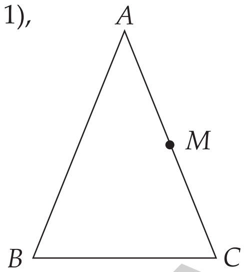


Figura 2

TESTUL 3

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Numărul numerelor întregi cuprinse între $-\sqrt{5}$ şi $3\sqrt{3}$ este:

A. 6 B. 2 C. 8 D. 3

(0,5p) **2.** Fie a, b, c numere reale, cu $a - 4b = 11$ şi $2b + c = 13$. Atunci $a + 2c$ este:

A. 35 B. 37 C. 15 D. –2

(0,5p) **3.** Valoarea lui m pentru care perechea $(-1, 2)$ este soluţie a ecuaţiei $4x - y + m = 0$ este:

A. 1 B. –6 C. 7 D. 6

(0,5p) **4.** Dacă $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{99}\}$, cardinalul mulţimii $A \cap \mathbb{Q}$ este:

A. 5 B. 9 C. 45 D. 0

(0,5p) **5.** Suma măsurilor unghiurilor alăturate bazei mici a unui trapez isoscel este 240°. Măsura unui unghi alăturat bazei mari este:

A. 90° B. 180° C. 120° D. 60°

(0,5p) **6.** Dacă lungimea apotemei unui triunghi echilateral este $2\sqrt{3}$ cm, atunci perimetrul triunghiului este:

A. 12 B. 36 C. 18 D. $18\sqrt{3}$

(0,5p) **7.** Punctele distincte A, B, C se află pe un cerc de centru O, astfel încât $\sphericalangle AOB = 60°$ şi C se află pe arcul mare $\overset{\frown}{AB}$. Măsura unghiului $\sphericalangle ACB$ este:

A. 120° B. 30° C. 90° D. 45°

(0,5p) **8.** Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 24 cm. Distanţa dintre centrul de greutate şi centrul cercului circumscris triunghiului este:

A. 4 cm B. 8 cm C. 12 cm D. $4\sqrt{3}$ cm

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Fie $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{27}}\right) : \frac{\sqrt{12}}{9}$ şi $y = \sqrt{8} \cdot \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$. Arătaţi că $\sqrt{x+y}$ este număr natural.

(1p) **2.** Determinaţi numerele reale x şi y, ştiind că $|x - y + 1| + |x + 2y - 1| = 0$.

(1p) **3.** Reprezentaţi, în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy, mulţimea M formată din perechile de numere întregi (x, y) cu proprietatea că $x \cdot y = 3$.

4. În figura 3, dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 10$ cm şi $AD = 4\sqrt{3}$ cm. Punctul Q este mijlocul laturii BC, iar P se află pe latura AB, astfel încât $2 \cdot PB = 3 \cdot PA$.

(1p) a) Aflaţi aria patrulaterului $DPQC$.

(1p) b) Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle DPQ$.

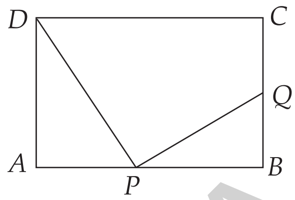


Figura 3

TESTUL 4

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $2^{-1} + 3^{-1} - 1\frac{5}{6}$ este:

A. -1 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

(0,5p) **2.** Fie $x = \sqrt{51}$, $y = 5\sqrt{2}$ şi $z = 7$. Ordinea crescătoare a numerelor este:

A. z, x, y B. z, y, x C. x, y, z D. x, z, y

(0,5p) **3.** Numărul natural lui n pentru care $\sqrt{3n} = 2\sqrt{6}$ este:

A. 4 B. 12 C. 8 D. 2

(0,5p) **4.** Soluţia reală a ecuaţiei $\frac{x}{2} - 1 = x$ este:

A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

(0,5p) **5.** Lungimea segmentului având capetele $A(0, 1)$ şi $B(3, 5)$ este:

A. 2 B. $3\sqrt{5}$ C. 5 D. 4

(0,5p) **6.** Dacă $ABCD$ este un paralelogram în care $\sphericalangle ABC = 100°$, atunci unghiul $\sphericalangle BCD$ are măsura de:

A. 80° B. 60° C. 100° D. 120°

(0,5p) **7.** Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $BC = 10$ cm şi $AB = 8$ cm. Lungimea laturii AC este:

A. 8 cm B. 6 cm C. 10 cm D. 12 cm

(0,5p) **8.** Cercul având lungimea 6π cm are diametrul de lungime:

A. 6 cm B. 3 cm C. 4 cm D. 8 cm

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Se consideră numerele $a = \left(\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}$ şi $b = (0,(3))^{-1}$. Aflaţi $(8b - a)^{101}$.

(1p) **2.** După două scumpiri succesive cu 20%, preţul unui produs devine 108 lei. Aflaţi preţul iniţial.

CAPITOLUL I
INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAŢII ÎN $\mathbb{R}$

I.1. Mulţimi definite cu ajutorul unei proprietăţi comune elementelor lor

Dacă, pentru o mulţime M, putem identifica o anumită proprietate p pe care toate elementele mulţimii o verifică şi niciun element care nu aparţine mulţimii nu o verifică (numită **proprietate caracteristică** a mulţimii M), vom nota mulţimea M astfel:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: „M este mulţimea acelor x care au proprietatea p”.

Probleme rezolvate

1. Scrieţi, prin enumerarea elementelor, următoarele mulţimi:

$A = \{x \mid x \text{ este vocală în cuvântul } \textit{paralelipiped}\}$; $B = \{a \mid a \text{ este cifră, } \overline{12a} \vdots 3\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x \le 3\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = -5\}$.

Soluţie: $A = \{a, e, i\}$; $B = \{0, 3, 6, 9\}$; $C = \{-1, 1, 2, 3\}$; $D = \{(-5, 1); (-1, 5); (1, -5); (5, -1)\}$.

2. Fie mulţimea $A = \{8, 12, 20, 27, 30, 45, 106\}$. Determinaţi mulţimile:

$$B = \{x \in A \mid x \vdots 4\};\ C = \{x \in A \mid x \vdots 9\};\ D = \{x \in A \mid x \vdots 2 \text{ şi } x \not\vdots\ 4\}.$$

Soluţie: $B = \{8, 12, 20\}$; $C = \{27, 45\}$; $D = \{30, 106\}$.

3. Considerăm, în plan, un sistem ortogonal de axe xOy şi notăm cu (x_P, y_P) coordonatele unui punct P. Reprezentaţi geometric mulţimile:

a) $A = \{P \mid x_P = 0\}$; b) $B = \{P \mid y_P = 1\}$; c) $C = \{P \mid x_P < 0\}$.

Soluţie: a) Elementele mulţimii A sunt acele puncte care au abscisa egală cu 0, adică toate punctele axei Oy (figura 1).

b) Elementele mulţimii B sunt acele puncte care au ordonata egală cu 1, adică punctele unei drepte paralele cu axa Ox, care conţine punctul $M(0, 1)$ (figura 2).

c) Elementele mulţimii C sunt acele puncte care au abscisa negativă şi ordonata neprecizată, adică toate punctele semiplanului deschis cu frontiera Oy, situat în stânga axei Oy (figura 3).

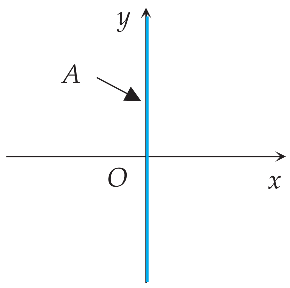


Figura 1

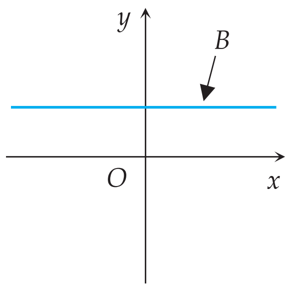


Figura 2

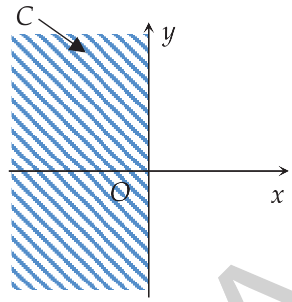


Figura 3

4. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 32 - 3p, p \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că $A = B$.

Soluţie: Vom demonstra că $A \subset B$ şi $B \subset A$. Fie $x \in A$, adică $x = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $x = 32 + 3k - 30 = 32 - 3(10 - k)$. Notând $10 - k = p \in \mathbb{Z}$, obţinem că $x = 32 - 3p$, deci $x \in B$ şi deducem că $A \subset B$. Reciproc: Dacă $x \in B$, rezultă că $x = 32 - 3p = 3(10 - p) + 2 = 3k + 2$, unde $k = 10 - p \in \mathbb{Z}$. Astfel, $x \in A$ şi am arătat că $B \subset A$, ceea ce încheie demonstraţia.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieţi, prin enumerarea elementelor, următoarele mulţimi:
$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *mulţime*$\}$; $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$;
$C = \{x \mid x$ este cifră a bazei 2$\}$; $D = \{x \mid x$ este număr prim de o cifră$\}$.

2. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A = \{x \mid \overline{2x5} \vdots 3\}$; b) $B = \{x \mid \overline{x32} \vdots 2\}$;
c) $C = \{x \mid \overline{xx72} \vdots 9\}$; d) $D = \{x \mid \overline{12x} \vdots 4\}$.

3. Fie mulţimile $A = \{-2, 1, 7\}$ şi $B = \{0, 1\}$. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$;
c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$; d) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ şi $y \in B\}$.

4. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x < 15\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 2\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, |x| < 2\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x - 1 \leq 3\}$.

5. Scrieţi cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice următoarele mulţimi:
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$;
c) $C = \{1, 2, 4, 8\}$; d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$.

6. Se consideră mulţimile $A = \{x \mid x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Scrieţi câte trei elemente din fiecare mulţime.
b) Stabiliţi dacă numerele 200, 201 şi 202 aparţin celor două mulţimi.
c) Arătaţi că $A \subset B$ şi $B \not\subset A$.

7. Se consideră mulţimile $A = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$.

a) Stabiliţi dacă numerele 2018, 2019 şi 2020 aparţin celor trei mulţimi.
b) Determinaţi $A \cap B$.
c) Determinaţi $A \cup B \cup C$.

8. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 7\}$; b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 2\}$;
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + y = 1$ şi $x - 2y = 5\}$.

9. Determinaţi cardinalul fiecăreia dintre următoarele mulţimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \le 25\}$;
c) $C = \{\overline{abc} \mid a + c = 2\}$; d) $D = \{\overline{xy} \mid x > y\}$.

10. Se consideră mulţimea $M = \left\{0; -\frac{6}{2}; -\sqrt{2\frac{1}{4}}; \pi; 3\sqrt{2}; 0,(2)\right\}$. Determinaţi mulţimile:

a) $A = \{x \in M \mid x \ge 0\}$; b) $B = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$;
c) $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; d) $D = \{x \in M \mid x \ge y, \forall\, y \in M\}$.

11. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4}{x} \in \mathbb{N}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;
c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{9}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-3}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. Fie mulţimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \le 9\}$. Determinaţi elementele mulţimilor A, B, C şi D, unde: $A = \{x \in M \mid |x| = x\}$, $B = \{x \in M \mid |x| = -x\}$, $C = \{x \in M \mid |x| \le 2\}$, $D = \{x \in M \mid |x| \ge 4\}$.

13. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 201 - 2p, p \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că $A = B$.

14. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, determinaţi următoarele mulţimi:

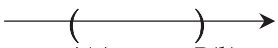
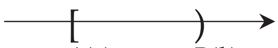
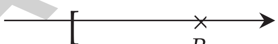
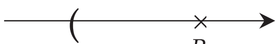
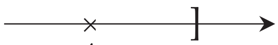
a) $P = \{M \mid M \in BC, BM = MC\}$; b) $Q = \{M \mid MA = MB = MC\}$;
c) $R = \{M \mid MA = MB\}$; d) $S = \{M \mid d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)\}$.

15. Reprezentaţi, în raport cu un reper cartezian xOy, următoarele mulţimi de puncte din plan:

a) $B_1 = \{M \mid x_M = y_M\}$; b) $B_1 = \{M \mid x_M = -y_M\}$; c) $C = \{M \mid x_M = y_M; -1 \le x_M \le 1\}$.

I.2. Intervale

Un **interval** este o submulţime a mulţimii numerelor reale care, odată cu două valori reale a şi b, conţine toate numerele reale cuprinse între a şi b.

Definiţie şi notaţie	Reprezentare geometrică	Caracterizare
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	Segmentul închis $[AB]$  $A(a)$ $B(b)$	Intervalul închis, mărginit, având capetele a şi b. Există un cel mai mic şi un cel mai mare element în acest interval.
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Segmentul deschis (AB)  $A(a)$ $B(b)$	Intervalul deschis, mărginit, având capetele a şi b. Nu există un cel mai mic şi un cel mai mare element în acest interval.
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	Segmentul semiînchis $[AB)$  $A(a)$ $B(b)$	Intervalul mărginit, închis la stânga, deschis la dreapta, având capetele a şi b. Există un cel mai mic element, dar nu există un cel mai mare element în acest interval.
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	Segmentul semiînchis $(AB]$  $A(a)$ $B(b)$	Intervalul mărginit, deschis la stânga, închis la dreapta, având capetele a şi b. Există un cel mai mare element, dar nu există un cel mai mic element în acest interval.
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	Semidreapta închisă cu originea în punctul A, care conţine punctul B, $[AB$  $A(a)$ B	Interval mărginit la stânga şi nemărginit la dreapta, având capătul din stânga a. Există un cel mai mic element, dar nu există un cel mai mare element în acest interval.
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Semidreapta deschisă cu originea în punctul A, care conţine punctul B, $(AB$  $A(a)$ B	Interval mărginit la stânga şi nemărginit la dreapta, având capătul din stânga a. Nu există un cel mai mic şi un cel mai mare element în acest interval.
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	Semidreapta închisă cu originea în punctul B, care conţine punctul A, $AB]$  A $B(b)$	Interval mărginit la dreapta şi nemărginit la stânga, având capătul din dreapta b. Există un cel mai mare element, dar nu există un cel mai mic element în acest interval.

CAPITOLUL II
CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

II.1. OPERAŢII CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE: ADUNAREA ŞI SCĂDEREA. REDUCEREA TERMENILOR ASEMENEA

1. Pentru a calcula sumele $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ sau $3\cdot 7^{13}+5\cdot 7^{13}$ folosim proprietăţi ale operaţiilor cu numere reale:

$$3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(3+5)\sqrt{3}=8\sqrt{3};$$
$$3\cdot 7^{13}+5\cdot 7^{13}=(3+5)\cdot 7^{13}=8\cdot 7^{13}.$$

Dacă înlocuim numerele $\sqrt{3}$ sau 7^{13} cu un număr real oarecare x, avem în mod analog:

$$3x+5x=(3+5)x=8x.$$

În toate calculele pe care le vom efectua în continuare, prin litere desemnăm numere reale oarecare.

2. În suma algebrică:

$$3x^2-2xy+y^2-5,$$

termenii sunt $3x^2$, $-2xy$, y^2 şi -5; termenul $3x^2$ are coeficientul 3, $-2xy$ are coeficientul -2, iar y^2 are coeficientul 1.

3. Termenii $-2xy$ şi $7xy$, care au aceeaşi parte literală, se numesc **termeni asemenea**.
De obicei, într-o sumă algebrică, termenii asemenea se reduc:

$$\underline{6x^2}-\underline{\underline{2xy}}+\underline{\underline{7xy}}-\underline{10x^2}+3=-4x^2+5xy+3.$$

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Fie x şi y două numere reale. Calculaţi:

a) $9x-7y+3y-2x$;
b) $x+4x+5y-11x-12y+7y$;
c) $2(x+3y)-3(2x-y)$;
d) $(2x-y)-(x-3y)-(-x+2y)$.

Soluţie: a) $9x-7y+3y-2x=(9x-2x)+(-7y+3y)=7x-4y$;
b) $x+4x+5y-11x-12y+7y=(x+4x-11x)+(5y-12y+7y)=-6x+0=-6x$;
c) $2(x+3y)-3(2x-y)=2x+6y-6x+3y=-4x+9y$;
d) $(2x-y)-(x-3y)-(-x+2y)=2x-y-x+3y+x-2y=2x$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculaţi:
   a) $-3x + 5x$;
   b) $2x + 11x - 15x$;
   c) $2y - 3y + 10y - 7y$;
   d) $12t - 10t - 20t + 15t$.

2. Calculaţi:
   a) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x$;
   b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x$;
   c) $0,3x - 0,5x + 1,2x$;
   d) $0,2y - \frac{1}{5}y - 0,8y + \frac{4}{5}y$.

3. Calculaţi:
   a) $20a - 17a + a$;
   b) $9a + 2a - 13a$;
   c) $-5b + b + 3b$;
   d) $5b - (-2b) + 8b$;
   e) $19c - 12c - (7c)$;
   f) $-(-3c) + (-2c) - (4c) + 5c$.

4. Calculaţi:
   a) $2a - 3a - 4$;
   b) $x - 5 + 6x - 4$;
   c) $-2a + 3x + 5a - 9x$;
   d) $11a + 3x - 12x - 4a$;
   e) $3a - 2 + a + 3 - 5a - 1$;
   f) $-2x + 7x - 5a - 4x + 4a$.

5. Calculaţi:
   a) $x - 2y + 3x + 7y$;
   b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$;
   c) $\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{3}b - 2a$;
   d) $3x - x + 2y - 2x$;
   e) $a - 3b - a + 4c - b + 8c$;
   f) $x - 3y + 4x - 2z + 5y + (-3z)$.

6. Calculaţi:
   a) $3x - (4x - 2)$;
   b) $(x - 1) - (-3x + 1) - (2x - 3)$;
   c) $-(3 - 2x) - (-x + 2) + (-4x)$;
   d) $7 - (2x - 3) + (-3x + 4)$.

7. Calculaţi:
   a) $(4a - 3b) - (-a + 2b) + (5b - 4a)$;
   b) $(x^2 - x + 2) - (-x^2 + 3x + 1) - (4x^2 + 1)$;
   c) $-(4x + x^2) - (2 - x) + (x^2 - 3x + 2)$;
   d) $-(a - b + c) + (a + b - c) - (-a + b + c) + (-a - b + c)$.

8. Calculaţi:
   a) $7x - 2 - [-x - (-6x + 2)]$;
   b) $x + 5 - [3x - 6 - (2x - 10)]$;
   c) $x - 2 - \{x - 3 - [5x - 4 - (6x - 2)]\}$;
   d) $9 - \{2x - [x - (1 - x) + (2x - 1)]\}$.

9. Fie a, b şi c trei numere reale astfel încât $a + 2b = 174$ şi $a + b + c = 426$. Determinaţi $b - c$ şi $2a + 3b + c$.

10. Fie $a = x + 2y - 3z$, $b = 2x - 3y + z$ şi $c = -3x + y + 2z$, unde x, y, z sunt numere reale. Arătaţi că $a + b + c$ este număr întreg.

11. Fie x, y, z trei numere reale şi $a = 2x - 3y + z$, $b = 3x - 3y - z$. Calculaţi $a + b$ şi $a - b$.

12. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $x = 3a^2 - 3a + 5$, $y = -a^2 - a + 3$, $z = 2a^2 + 4a - 8$. Calculaţi $z - y$, $x + y - z$, $x + y + z$, $x - (y + z)$ şi $y - (x - z)$.

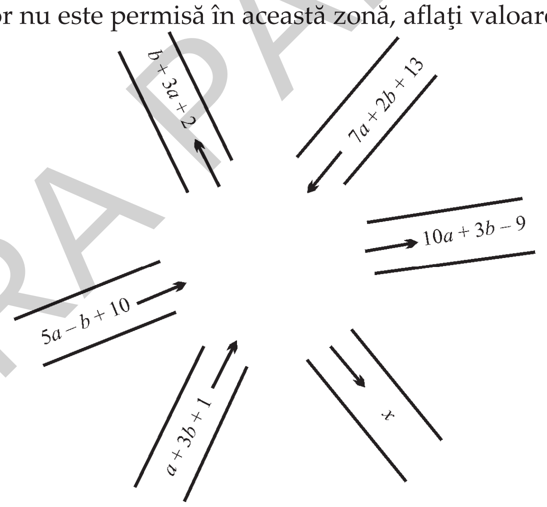
13. Vlad a cumpărat 3 caiete şi 2 creioane. Dacă un caiet costă $6a$ lei, iar un creion costă un sfert din preţul unui caiet, aflaţi câţi lei a plătit Vlad.

14. Se consideră expresia $E(x) = 3x - (7x - 5) + (7 - 4x) - (11 - 9x)$. Calculaţi $E\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

15. Maria a cumpărat de la piaţă 3 kg de roşii cu a lei kilogramul, 2 kg de struguri cu $(a + b)$ lei kilogramul, 5 kg de pere cu $(b - a + 9)$ lei kilogramul şi 7 kg de ardei cu $(12 - b)$ lei kilogramul. Câţi lei a cheltuit Maria la piaţă?

16. Un fermier duce într-o zi la piaţă 30 kg de fructe: mere, pere şi struguri, pe care le vinde cu următoarele preţuri: merele cu 2 lei/kg, perele cu 3 lei/kg şi strugurii cu 4 lei/kg. Într-o altă zi, fermierul vinde aceeaşi cantitate din fiecare fel de fructe, cu următoarele preţuri: merele cu 4 lei/kg, perele cu 2 lei/kg şi strugurii cu 3 lei/kg. Ştiind că, în fiecare din cele două zile, el a obţinut aceeaşi sumă de bani, aflaţi cantitatea de mere adusă la piaţă de fermier (într-o zi).

17. Figura de mai jos reprezintă schematic străzile adiacente centrului civic, cu sens unic de deplasare, precum şi numărul maşinilor care au trecut într-o oră. Ştiind că staţionarea maşinilor nu este permisă în această zonă, aflaţi valoarea lui x.



18. Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $\dfrac{b + a}{13} = \dfrac{3a - 2b}{29} = \dfrac{b - 4a}{73}$.

19. Calculaţi:

a) $a - 2a + 3a - 4a + 5a - 6a$;

b) $x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 19x - 20x$;

c) $b - 2b - 3b + 4b + 5b - 6b - 7b + 8b + \ldots + 37b - 38b - 39b + 40b$;

d) $y + 2y - 3y + 4y + 5y - 6y + \ldots + (31y + 32y - 33y)$.

20. Fie x, y, z trei numere reale astfel încât $2x - 3y + 5 \geq 0$, $3y - 5z + 16 \geq 0$ şi $5z - 2x - 21 \geq$ ≥ 0. Arătaţi că $2x - 6y + 5z$ este un număr prim.

II.2. OPERAŢII CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE: ÎNMULŢIREA, ÎMPĂRŢIREA ŞI RIDICAREA LA PUTERE

Pentru a efectua calculele în care avem înmulţiri, împărţiri sau ridicări la putere, folosim regulile de calcul cu puteri, distributivitatea înmulţirii faţă de adunare/scădere, regulile de desfacere a parantezelor:

$(2x^3y^2)\cdot(-3xy^4) = -6x^4y^6$;

$(-4x^2y^5):(-3xy^3) = \frac{4}{3}xy^2 \ (x, y \neq 0)$;

$(x+1)^3 : (-x-1)^2 = (x+1)^3 : (x+1)^2 = x+1 \ (x \neq -1)$;

$(2x-1)^2 \cdot (6x-3)^3 = (2x-1)^2 \cdot (27(2x-1)^3) = 27(2x-1)^5$;

$(-2x^2y^3z)^3 = -8x^6y^9z^3$;

$x \cdot (2x - y) = x \cdot (2x) - x \cdot y = 2x^2 - xy$;

$(x^2 - x - 1)\cdot(-2x) = x^2 \cdot (-2x) - x\cdot(-2x) - 1\cdot(-2x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x$;

$(2x^3 - 3x^2 + 4x) : x = (2x^3) : x - (3x^2) : x + (4x) : x = 2x^2 - 3x + 4 \ (x \neq 0)$;

$(x+1)(2x-1) = (x+1)\cdot 2x + (x+1)\cdot(-1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 1)(x - 2) - (x + 3)(x - 3) - (5 - 6x)$. Arătaţi că $E(x) =$ $(x + 1)(x + 2)$, pentru orice număr real x.

Soluţie: $E(x) = 2x^2 - 4x + x - 2 - (x^2 - 3x + 3x - 9) - 9 + 6x = 2x^2 - 3x - 2 - (x^2 - 9) - 5 + 6x =$ $2x^2 - 3x - 2 - x^2 + 9 - 5 + 6x = x^2 + 3x + 2$ şi $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$, rezultă că $E(x) = (x + 1)(x + 2)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră expresia $E(x) = x^2 - 2x\cdot\left[x^2 + \left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right)\right] + 5(2x+5)$, unde x este număr real.

a) Arătaţi că $E(x) = x^2 + 25$, pentru orice număr real x.

b) Calculaţi $\sqrt{E(12)}$.

Soluţie: a) $E(x) = x^2 - 2x\cdot\left(x^2 + 5 + x\sqrt{5} - x\sqrt{5} - x^2\right) + 10x + 25 = x^2 - 10x + 10x + 25 = x^2 + 25$.

b) Deoarece $E(12) = 12^2 + 25 = 169$, rezultă că $\sqrt{E(12)} = 13$.

CUPRINS